УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

С. В. Галаев[1], **Ю. В. Шевцова**[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, yv-shevtsova@mail.ru

Распределение D почти контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ является нечетным аналогом касательного расслоения. В предлагаемой работе строится внутренняя симплектическая связность, естественным образом ассоциированная с исходной почти контактной метрической структурой. Внутренняя связность задает параллельный перенос допустимых векторов (т. е. векторов, принадлежащих распределению D) вдоль допустимых кривых. Всякая соответствующая ей продолженная связность является связностью в векторном расслоении (D, π, X), определяемой внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \to D$. От выбора эндоморфизма $N : D \to D$ зависят свойства продолженной связности и, как следствие, свойства почти контактной метрической структуры, возникающей на пространстве D векторного расслоения (D, π, X). Показывается, что так же как и расслоение TTX, касательное расслоение TD, благодаря заданию связности над распределением (а затем и N-продолженной связности — связности в векторном расслоении (X, D)), расщепляется в прямую сумму вертикального и горизонтального распределения. Тем самым, на распределении D естественным образом определяется (продолженная) почти контактная метрическая структура. Исследуются свойства продолженной структуры. В частности, доказывается, что продолженная почти контактная метрическая структура почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: контактная структура, почти контактная метрическая структура, внутренняя симплектическая связность, продолженная симплектическая связность, почти контактное кэлерово пространство.

ВВЕДЕНИЕ

В современной дифференциальной геометрии касательные расслоения гладких многообразий занимают почетное место. Начало исследованиям касательных расслоений было положено в работе [1]. В большом числе случаев в качестве многообразия выбирается риманово (или финслерово) пространство, касательное расслоение к которому наделяется римановой структурой. Существуют и другие возможности задания на касательном расслоении многообразия римановой метрики. Так, например, в работе [2] в качестве исходного многообразия берется симплектическое пространство. Если многообразие X наделено контактной структурой с распределением D [3], появляется возможность рассматривать гладкое распределение D как многообразие, в основу развития геометрии которого могут быть положены уже апробированные в геометрии касательных расслоение методы и конструкции. Первые исследования геометрии многообразия D, наделенного естественным образом дополнительными структурами, были представлены в работе [4]. В отличие от многообразия TX, многообразие D имеет нечетную размерность. Таким образом, многообразие D, например, не может быть наделено симплектической формой, зато оно естественным образом может нести на себе (продолженную) почти контактную метрическую структуру. Вообще говоря, продолженная почти контактная метрическая структура не возникает непосредственно вследствие вложения D в TX как подмногообразия. Это обстоятельство объясняет целесообразность рассмотрения многообразия D независимо от его вложения в многообразие TX. Известно [5], что многообразие D можно использовать в качестве модельного пространства в задачах неголономной механики, что указывает на прикладной аспект обсуждаемой темы.

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Вначале даются краткие сведения о внутренней геометрии [3] почти контактных метрических пространств. Более подробно соответствующий материал излагается в [3]. Новым является подробное обсуждение допустимых симплектических связностей. Впервые о допустимых симплектических связностях упоминается в работе [6]. Если внутренняя связность задает параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых, то ассоциируемая с ней продолженная связность является связностью в векторном расслоении (D, π, X) и, тем самым, определяет перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X. Продолженная связность определяется внутренней связностью и эндоморфизмом $N : D \to D$, от выбора которого зависят свойства почти контактной метрической структуры, конструируемой на пространстве D векторного расслоения (D, π, X). В заключительной части работы на многообразии D с продолженной симплектической связностью определяется и изучается продолженная почти контактная метрическая структура.

1. ВНУТРЕННЯЯ И ПРОДОЛЖЕННАЯ СВЯЗНОСТИ

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, ΓTX — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые структурным вектором и контактной формой соответственно, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0,$$
$$\varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi}, \quad g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}), \quad d\eta(\vec{\xi}, \vec{X}) = 0,$$

где $\vec{X}, \vec{Y} \in \Gamma TX$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие, с заданной на нем сасакиевой структурой, называется сасакиевым многообразием. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Более подробно в этом параграфе остановимся на так называемых почти контактных кэлеровых пространствах [7].

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0. \tag{1}$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти K-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}} g = 0$ и $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$.

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны — многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В то же время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств [7], что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [5].

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,n};\ a, b, c, e = \overline{1, n-1})$ многообразия X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = \mathrm{Span}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ [3]. Пусть $P : TX \to D$ —

проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D : D = \mathrm{Span}\,(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a,\ \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a\, dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [3]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты. Тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид
$$t = t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае назвать допустимой симплектической формой.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:
$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$
где $A^a_{a'} = \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da}Cdb$, $\psi^b_a = g^{db}\omega da$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви – Чивита тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви – Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид*
$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a, \quad \tilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \quad \tilde{\Gamma}^a_{nn} = 0,$$
где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_b g_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой [8] понимается отображение
$$\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D,$$
удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{u}_1 + f_2\vec{u}_2} = f_1\nabla_{\vec{u}_1} + f_2\nabla_{\vec{u}_2}$;

2) $\nabla_{\vec{u}} f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v}$.

где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным
$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - p[\vec{X}, \vec{Y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем:
$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}.$$

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$, $S = 0$ [8]. В адаптированных координатах мы имеем:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_b g_{bc}). \tag{2}$$

Заметим, что $\Gamma^a_{bc} = \tilde{\Gamma}^a_{bc}$ (см. теорему 1).

Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D.

Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(X^\alpha, X^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}\,(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(X^a, X^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. В работе [3] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность является связностью в векторном расслоении и всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением. Продолженная связность и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$, где эндоморфизм $N : D \to D$ может быть выбран произвольно. В настоящей работе мы полагаем $N = 0$. Соответствующую продолженную связность обозначим ∇^1. В работе [8] допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{v}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{p[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w} - p[q[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$, названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a\|e\|} \Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемого распределения размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [8]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения* D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [8].

Векторные поля ($\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}$) определяют на D неголономное поле базисов, а формы (dx^a, $\Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a$, $\Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+b} dx^c$) — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc} x^{n+c} \partial_{n+e}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+c} P^b_{ac} \partial_{n+b}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}, \tag{5}$$

Рассмотрим векторное расслоение (D, π, X), где D – распределение контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. До конца работы будем предполагать, что $n > 3$. Допустимая симплектическая форма $\omega = d\eta$ является допустимой интегрируемой тензорной структурой [3] (т. е. найдется такой атлас адаптированных карт, в котором компоненты формы ω постоянны). Из замечания 1 следует, что в этом случае $\partial_n \omega_{ab} = 0$. Исследование внутренних связностей, совместимых с формой ω, проводится по аналогии со случаем симплектического многообразия [6]. Так, например, справедлива следующая теорема [6].

Теорема 2. *Пусть ∇' — произвольная внутренняя связность с коэффициентами Γ'^a_{bc}. Тогда связность $\overline{\overline{\nabla}}$, коэффициенты $\overline{\overline{\Gamma}}^a_{bc}$ которой определяются равенствами*

$$\overline{\overline{\Gamma}}^a_{bc} = \Gamma'^a_{bc} + \frac{1}{2}\omega^{da}\nabla'_b\omega_{cd},$$

совместима с ω.

2. ПРОДОЛЖЕННАЯ СВЯЗНОСТЬ КАК ПОЧТИ КОНТАКТНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Будем считать, что на гладком многообразии X задана контактная структура $(D, \eta, D^\perp, \vec{\xi})$ и внутренняя симметричная связность, совместимая с формой $\omega = d\eta$. На тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, X) определим почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$, где

$$\tilde{\eta} = \eta \circ \pi_*, \quad J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}, \quad J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a, \quad J(\partial_n) = 0,$$
$$\tilde{g} = \omega_{ab} dx^a \otimes \Theta^{n+b} - \omega_{ab}\Theta^{n+a} \otimes dx^b + \Theta^n \oplus \Theta^n, \quad \tilde{D} = \pi_*^{-1}(D),$$

$\tilde{D} = HD \oplus VD$, VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D, а HD — горизонтальное распределение, определяемое внутренней линейной связностью. Полем Риба для почти контактной метрической структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ является поле $\vec{u} = \partial_n$.

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Перепишем равенство (1) в новых обозначениях.

$$N_j + 2(d\tilde{\eta} \circ J) \otimes \vec{u} = 0.$$

В работе [3] было доказано, почти контактная структура является почти нормальной тогда и только тогда, когда $\tilde{P} \circ N_j = 0$, где $\tilde{P} : TD \to \tilde{D}$ — проектор.

Воспользовавшись равенствами (3)–(5), получаем следующие выражения для компонент тензора Нейенхейса аффинора J:

$$N_j(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}, \quad N_j(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e},$$
$$N_j(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0, \quad N_j(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_j(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c}P^b_{ac}\partial_{n+b}.$$

Таким образом, почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ почти нормальна тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензор кривизны Схоутена.

Используя прямые вычисления, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 4. *Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{\eta}, D)$ является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

Библиографический список

1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. № 10. P. 338–354.
2. *Паньженский В. И., Сухова О. В.* Почти эрмитовы структуры на касательном расслоении почти симплектического многообразия // Изв. вузов. Математика. 2007. № 11. С. 75–78.
3. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
5. *Галаев С. В., Гохман А. В.* Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях с почти контактной метрической структурой// Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 23–26.

6. *Галаев С. В., Гохман А. В.* Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28–31.
7. *Галаев С. В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 42–52.
8. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

Almost Contact Metric Structures Defined by a Symplectic Structure Over a Distribution

S. V. Galaev, Yu. V. Shevtsova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru, yv-shevtsova@mail.ru

The distribution D of an almost contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ is an odd analogue of the tangent bundle. In the paper an intrinsic symplectic structure naturally associated with the initial almost contact metric structure is constructed. The interior connection defines the parallel transport of admissible vectors (i.e. vectors belonging to the distribution D) along admissible curves. Each corresponding extended connection is a connection in the vector bundle (D, π, X) defined by the interior connection and by an endomorphism $N : D \to D$. The choice of the endomorphism $N : D \to D$ determines the properties of the extended connection, whence those of the almost contact metric structure appearing on the space D of the vector bundle (D, π, X). It is shown that similarly to the bundle TTX, the tangent bundle TD due to the fixation of the connection over the distribution (and later also the N-extended connection, i.e. connection in the vector bundle (D, π, X)) is decomposable in the direct sum of the vertical and horizontal distributions. Thus on the distribution D the (extended) almost contact metric structure is defined in a natural way. The properties of the extended structure are investigated. In particular, it is proved that the extended almost contact structure is almost normal if and only if the distribution D is a distribution of zero curvature.

Key words: contact structure, almost contact metric structure, interior symplectic connection, extended symplectic structure, almost contact Kaehlerian space.

References

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, 1958, no. 10, pp. 338–354.
2. Panzhenskii V. I., Sukhova O. V. Almost Hermitian structures on the tangent bundle of almost symplectic manifold. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2007, vol. 51, iss. 11, pp. 73–75. DOI: 10.3103/S1066369X07110102.
3. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).
4. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).
5. Galaev S. V., Gokhman A. V. Obobshchennye gamil'tonovy sistemy na mnogoobraziiakh s pochti kontaktnoi metricheskoi strukturoi [Generalized Hamiltonian systems on manifolds with an almost contact metric structure]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauch. tr.* [Mathematics. Mechanics: collection of proceedings]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, iss. 14, pp. 23–26 (in Russian).
6. Galaev S. V., Gokhman A. V. Pochti simplekticheskie sviaznosti na negolonomnom mnogoobrazii [Almost symplectic connection on a nonholonomic manifold]. *Matematika. Mekhanika: sb. nauch. tr.* [Mathematics Mechanics: collection of proceedings]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2001, iss. 3, pp. 28–31 (in Russian).
7. Galaev S. V. Almost contact Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, vol. 58, iss. 8, pp 35–42. DOI: 10.3103/S1066369X14080040
8. Vagner V. V. The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).