References

1. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).
2. Djakov P, Mityagin B. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–776. DOI: 10.1070/RM2006v061n04AB EH004343.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, no. 3, pp. 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003.
4. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 445–469. DOI: 10.1070/ IM2011v075n03ABEH002540.
5. Savchuk A. M., Sadovnichaya I. V. Asymptotic formulas for fundamental solutions of the Dirac system with complex-valued integrable potential. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 5, pp. 545–556. DOI: 10.1134/S0012266113050030.
6. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Dirac operator with complex-valued summable potential. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5–6, pp. 777–810. DOI: 10.1134/S0001434614110169.
7. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system. *Doklady Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 240–242. DOI: 10.1134/S1064562412020238.
8. Burlutskaia M. Sh., Kurdiumov V. P., Khromov A. P. Refined Asymptotic Formulas for Eigenvalues and Eigenfunctions of the Dirac System with Nondifferentiable Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 56–66 (in Russian).
9. Khromov A. P. The behavior of the formal solution of the mixed problem for wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2. pp. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149.

УДК 519.62

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. С. Лукомский[1], С. Ф. Лукомский[2], П. А. Терехин[3]

[1]Лукомский Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiDS@info.sgu.ru

[2]Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru

[3]Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории приближений функций, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача приближенного решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Для этого производную решения мы ищем в виде суммы ряда Хаара. Получены оценки погрешности приближенного решения. Приведены результаты численного эксперимента. Примеры показывают, что в некоторых случаях погрешность предлагаемого метода намного меньше, чем в методе Рунге – Кутта второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, численные методы, приближенное решение, оценка погрешности, система Хаара.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-151-159

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] и других были рассмотрены методы численного решения дифференциальных уравнений с использованием системы Хаара. При этом искомая функция представлялась приближенно в виде частичной суммы ряда по системе Хаара. Так как в уравнении присутствуют производные неизвестной функции, то приходилось вводить оператор дифференцирования ступенчатой функции, что сразу делает проблематичной оценку погрешности рассматриваемого метода. В работе Д. С. Лукомского [4] была рассмотрена задача Коши для линейного уравнения второго порядка, и многочленом

Хаара заменялась не сама искомая функция, а ее вторая производная и был указан алгоритм получения решения. Оценки погрешности этого метода были приведены без доказательств в работе [5]. В настоящей работе приводятся доказательства оценок погрешности в случае решения уравнения 1-й степени. Приведены результаты численного эксперимента.

1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0,1]$ — непрерывные функции. Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (1), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n:

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k}\chi_k(x).$$

Такой полином является ступенчатой функцией:

$$y_n'(x) = y_{n,k}, \qquad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 — своему пределу изнутри отрезка $[0,1]$, т. е. $y_n'(0) = y_{n,0}$, $y_n'(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2$ при $k = 1, \dots, 2^n - 1$, $y_n'(1) = y_{n,2^n-1}$.

Сразу заметим, что переход от набора $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ значений ступенчатой функции к набору $\{\hat{y}_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ ее коэффициентов Фурье – Хаара (и обратно) может быть осуществлен с использованием быстрого преобразования Хаара.

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \leqslant x \leqslant (k+1)2^{-n},$$

где $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $0 < \theta_{n,k} < 1$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (1) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$, обозначив для краткости $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$, будем иметь:

$$y_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1. \tag{2}$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (2) величины $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно, если только $1 + a_{n,k}\theta_{n,k}2^{-n} \neq 0$ для всех $k = 0, \dots, 2^n - 1$, что заведомо выполняется для достаточно больших n, а именно при $2^n \geqslant \|a\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |a(x)|$.

Можно избежать произвола при выборе множества промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ полагая, например, $\theta_{n,k} = 1/2$. В таком случае каждая точка $x_{n,k}$ будет серединой отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$. Далее мы покажем, что от выбора промежуточных точек принципиально не зависят аппроксимативные свойства приближенного решения $y_n(x)$ задачи (1). Для этого определим новые величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1. \tag{3}$$

Очевидно, что из уравнений (3) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно для любого натурального числа n. По построенным величинам $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определим функции $z_n'(x)$ и $z_n(x)$ равенствами $z_n'(x) = z_{n,k}$, где $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, и

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad k2^{-n} \leqslant x \leqslant (k+1)2^{-n}. \tag{4}$$

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (3) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0.

2. СВОЙСТВА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Введем следующие характеристики задачи (1):

$$C = |y_0|\,\|a\| + \|b\|, \qquad \Omega_n = |y_0|\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}), \qquad \Omega_n^* = \omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{\|a\|}{2^n},$$

где $\omega(f, \delta) = \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$ — равномерный модуль непрерывности, а также характеристики входных интерполяционных и начальных данных:

$$A_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |a_{n,k}|, \qquad B_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |b_{n,k}|, \qquad C_n = |y_0| A_n + B_n$$

и приближенных решений

$$Y_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |y_{n,k}|, \qquad Z_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |z_{n,k}|, \qquad \Delta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |y_{n,k} - z_{n,k}|.$$

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$Z_n \leqslant C_n e^{A_n} \leqslant C e^{\|a\|}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Неравенства из сформулированной леммы 1 дают, во-первых, оценку для приближенных решений $z_n(x)$ через введенные характеристики входных данных и, во-вторых, показывают равномерную ограниченность функций $z_n(x)$ и их производных.

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\Delta_n \leqslant \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leqslant \frac{2C\|a\| e^{3\|a\|}}{2^n}, \qquad n \geqslant \log_2 \|a\| + 1.$$

Оценка леммы 2 показывает, что $\Delta_n = O(2^{-n})$ при достаточно больших n. Следовательно, переход от приближенного решения $y_n(x)$ к $z_n(x)$ оправдан, и независимость аппроксимативных свойств приближенного решения от выбора промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ обоснована. Из лемм 1 и 2 также вытекает равномерная ограниченность функций $y_n(x)$ и их производных, поскольку

$$Y_n \leqslant Z_n + \Delta_n \leqslant C e^{\|a\|}(1 + O(2^{-n})).$$

Обозначим через $y(x)$ точное решение задачи (1).

Теорема 1. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство*

$$\|y' - z_n'\| \leqslant e^{\|a\|}(\Omega_n + C e^{\|a\|} \Omega_n^*). \tag{5}$$

Неравенство (5) можно записать в виде

$$\|y' - z_n'\| = O\big(\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}) + \tfrac{1}{2^n}\big), \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\|y' - y_n'\|$ для достаточно больших n. Постоянные в O-соотношениях зависят от величин $\|a\|$, $\|b\|$ и $|y_0|$.

Следует заметить, что оценка для уклонения $\|y - z_n\|$ повторяет оценку (5). Улучшения порядка сходимости, как это имеет место для интерполяционных сплайнов в нашем случае, вообще говоря, не происходит. Простым примером служит случай $a(x) \equiv 0$, когда теорема 1 дает нам оценку

$\|y' - z_n'\| \leqslant \omega(b, \frac{1}{2^n})$ и при этом оценка $\|y - z_n\| \leqslant \omega(b, \frac{1}{2^n})$ не улучшаема на классе всех непрерывных функций $b(x) \in C[0,1]$. В самом деле, при $a(x) \equiv 0$ имеем $y(x) = y_0 + \int_0^x b(t)\,dt$ и $z_{n,k} = b_{n,k}$, откуда $y(1) - z_n(1) = \int_0^1 b(x)\,dx - 2^{-n} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} b_{n,k}$. Соотношение

$$\sup_{\substack{\{b(x)\in C[0,1]: b(x_{n,k})=0,\\ k=0,\ldots 2^n-1\}}} \frac{\int_0^1 b(x)\,dx}{\omega(b, \frac{1}{2^n})} = 1$$

показывает неулучшаемость оценки $\|y - z_n\| \leqslant \omega(b, \frac{1}{2^n})$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ И ТЕОРЕМ

Лемма 3. *Если набор неотрицательных чисел $\{f_k\}_{k=0}^N$ удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию*

$$f_k \leqslant \alpha + \beta \sum_{j=0}^{k-1} f_j, \qquad k = 0, \ldots, N,$$

то выполняется неравенство

$$f_k \leqslant \alpha e^{\beta k}, \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Доказательство. Из условия леммы следует оценка

$$f_k \leqslant \alpha(1+\beta)^k, \qquad k = 0, \ldots, N,$$

которая легко проверяется по индукции

$$f_{k+1} \leqslant \alpha + \beta \sum_{j=0}^{k} f_j \leqslant \alpha\left(1 + \beta \sum_{j=0}^{k} (1+\beta)^j\right) = \alpha(1+\beta)^{k+1}.$$

Следовательно, имеем $f_k \leqslant \alpha(1+\beta)^k \leqslant \alpha e^{\beta k}$. □

Лемма 3 является дискретным вариантом леммы Гронуолла (точнее, ее простейшего частного случая).

Лемма Гронуолла. *Если неотрицательная непрерывная функция $f(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant X$, удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию*

$$f(x) \leqslant \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant X,$$

то выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant \alpha e^{\beta(x - x_0)}, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant X.$$

Нам потребуется непосредственно вытекающая из леммы Гронуолла

Лемма 4. *Если неотрицательная функция $f(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant X$, имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода $\{x_k\}_{k=1}^N \subset (x_0, X)$, в которых $f(x_k) \leqslant \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\}$, $k = 1, \ldots, N$, и удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию*

$$f(x) \leqslant \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

хотя бы во всех точках непрерывности (а тогда и вообще во всех точках отрезка $[x_0, X]$), то при $x_0 \leqslant x \leqslant X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant \alpha e^{\beta(x - x_0)}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = X$. При $x_0 \leqslant x < x_1$ неравенство (6) выполняется в силу классической леммы Гронуолла. Теперь предположим, что (6) верно при $x_0 \leqslant x < x_1, \ldots, x_{k-1} < x < x_k$.

При $x_k < x < x_{k+1}$ по условию имеем:

$$f(x) \leqslant \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} f(t)\,dt + \beta \int_{x_k}^{x} f(t)\,dt,$$

откуда снова в силу классической леммы Гронуолла находим

$$f(x) \leqslant \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} f(t)\,dt\right) e^{\beta(x-x_k)}. \tag{7}$$

Рассуждая более строго, следовало бы сначала вместо x_k взять $x_k + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, применить лемму Гронуолла, потом устремить $\varepsilon \to 0$ и получить (7).

Далее подставим в интеграл из (7) оценку $f(t) \leqslant \alpha e^{\beta(t-x_0)}$, $t \neq x_1, \ldots, x_k$, которая верна по нашему предположению. Будем иметь

$$f(x) \leqslant \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} \alpha e^{\beta(t-x_0)}\,dt\right) e^{\beta(x-x_k)} = \alpha e^{\beta(x-x_0)}.$$

Таким образом, неравенство (6) доказано по индукции для всех $x \neq x_1, \ldots, x_N$. Тогда в точках разрыва первого рода $f(x_k \pm 0) \leqslant \alpha e^{\beta(x_k - x_0)}$ и, следовательно,

$$f(x_k) \leqslant \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\} \leqslant \alpha e^{\beta(x_k - x_0)}, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

(Точно так же проверяется утверждение из формулировки леммы, заключенное в скобки). □

Доказательство леммы 1. Из рекуррентных соотношений (3) для всех $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ получаем оценку

$$|z_{n,k}| \leqslant |y_0|\,|a_{n,k}| + |b_{n,k}| + |a_{n,k}| 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |z_{n,j}| \leqslant C_n + A_n 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |z_{n,j}|.$$

По лемме 3 отсюда следуют неравенства

$$Z_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |z_{n,k}| \leqslant C_n e^{A_n 2^{-n}(2^n - 1)} \leqslant C_n e^{A_n} \leqslant C e^{\|a\|}. \qquad \square$$

Доказательство леммы 2. Сравним рекуррентные соотношения (2) и (3), причем последние запишем в виде

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}\theta_{n,k} 2^{-n}\right) = b_{n,k} + a_{n,k} z_{n,k} \theta_{n,k} 2^{-n}.$$

При $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ находим

$$|y_{n,k} - z_{n,k}| \leqslant |a_{n,k}| 2^{-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}| + |y_{n,k} - z_{n,k}|\theta_{n,k} + |z_{n,k}|\theta_{n,k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A_n 2^{-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}| + |y_{n,k} - z_{n,k}| + Z_n\right).$$

Поскольку $1 - A_n 2^{-n} \geqslant 1 - \|a\| 2^{-n} \geqslant \frac{1}{2}$ при $n \geqslant \log_2 \|a\| + 1$, то

$$|y_{n,k} - z_{n,k}| \leqslant 2A_n Z_n 2^{-n} + 2A_n 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}|.$$

По лемме 3 отсюда следуют неравенства

$$\varDelta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1} |y_{n,k} - z_{n,k}| \leqslant \frac{2A_n Z_n e^{2A_n}}{2^n} \leqslant \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leqslant \frac{2C\|a\| e^{3\|a\|}}{2^n}.$$

Учли оценку $Z_n \leqslant C_n e^{A_n}$ из леммы 1. □

Доказательство теоремы 1. При $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, для производных точного и приближенного решений будем иметь

$$y'(x) - z_n'(x) = b(x) - a(x)y(x) - z_{n,k} =$$
$$= b(x) - a(x)\left(y_0 + \int_0^x y'(t)\,dt\right) - b_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) =$$
$$= b(x) - b_{n,k} - y_0(a(x) - a_{n,k}) - a(x)\int_0^x y'(t)\,dt + a_{n,k}\int_0^{k2^{-n}} z_n'(t)\,dt.$$

В последнем выражении отдельно оценим неинтегральные разности

$$|b(x) - b_{n,k} - y_0(a(x) - a_{n,k})| \leqslant |y_0|\omega(a, \tfrac{1}{2^n}) + \omega(b, \tfrac{1}{2^n}) = \Omega_n$$

и после преобразования

$$a(x)\int_0^x y'(t)\,dt - a_{n,k}\int_0^{k2^{-n}} z_n'(t)\,dt =$$
$$= a(x)\int_0^x (y'(t) - z_n'(t))\,dt + (a(x) - a_{n,k})\int_0^x z_n'(t)\,dt + a_{n,k}\int_{k2^{-n}}^x z_n'(t)\,dt$$

оценим разность интегралов

$$\left|a(x)\int_0^x y'(t)\,dt - a_{n,k}\int_0^{k2^{-n}} z_n'(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|\int_0^x |y'(t) - z_n'(t)|\,dt + \omega(a, \tfrac{1}{2^n})\int_0^1 |z_n'(t)|\,dt + \|a\|\int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |z_n'(t)|\,dt.$$

Теперь заметим, что по лемме 1

$$\int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |z_n'(t)|\,dt = 2^{-n}|z_{n,k}| \leqslant 2^{-n}Ce^{\|a\|}, \qquad \int_0^1 |z_n'(t)|\,dt \leqslant Ce^{\|a\|}.$$

В результате получаем:

$$|y'(x) - z_n'(x)| \leqslant \Omega_n + Ce^{\|a\|}\Omega_n^* + \|a\|\int_0^x |y'(t) - z_n'(t)|\,dt.$$

Функция $f(x) = |y'(x) - z_n'(x)|$ имеет разрывы первого рода в точках $k2^{-n}$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$, в которых

$$f(\tfrac{k}{2^n}) = \left|y'(\tfrac{k}{2^n}) - \frac{z_n'(\frac{k}{2^n} - 0) + z_n'(\frac{k}{2^n} + 0)}{2}\right| \leqslant \max\{f(\tfrac{k}{2^n} - 0), f(\tfrac{k}{2^n} + 0)\}.$$

По лемме 4

$$|y'(x) - z_n'(x)| \leqslant e^{\|a\|x}(\Omega_n + Ce^{\|a\|}\Omega_n^*), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad \square$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим алгоритм решения задачи (1).

Зафиксируем $n \geqslant 2$ и построим систему узлов $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $\theta_{n,k} = 1/2$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Вычисляем $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$.

Используя рекуррентные соотношения

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + 2^{-n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \qquad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

находим величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$.

Восстановим функцию $z_n(x)$ по ее производной:

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \qquad x = (k+1/2)2^{-n},$$

где $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Функция $z_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (1), где

$$a(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2], \\ 1 - x, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \qquad b(x) = 4\cos(4x) + a(x) * \sin(4x),$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Очевидно, что точное решение данной задачи есть $y(x) = \sin(4x)$.

В табл. 1 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка $[0, 1]$. Точки выведены через одну для краткости изложения.

Таблица 1

x	$Y(x)$	$\lvert Y(x) - H(x)\rvert$	$\lvert Y(x) - RK(x)\rvert$
0.07813	0.30744	0.00021	0.06260
0.14063	0.53330	0.00012	0.06248
0.20313	0.72601	0.00015	0.06209
0.26563	0.87357	0.00048	0.06143
0.32813	0.96683	0.00078	0.06049
0.39063	0.99997	0.00089	0.05928
0.45313	0.97093	0.00071	0.05780
0.51563	0.88153	0.00014	0.05610
0.57813	0.73732	0.00069	0.05443
0.64063	0.54726	0.00157	0.05294
0.70313	0.32318	0.00239	0.05161
0.76563	0.07901	0.00304	0.05045
0.82813	−0.17008	0.00347	0.04949
0.89063	−0.40859	0.00365	0.04874
0.95313	−0.62170	0.00362	0.04822

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответвтенно

$$R_H = 0.00366032835420937, \qquad R_{RK} = 0.0625980949896783.$$

Данный пример показывает, что в определенных случаях метод Хаара дает погрешность на порядок лучше, чем метод Рунге – Кутта.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + \sin(x)y = (2x + 1 + \sin(x)(x^2 + x)), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Точное решение данной задачи имеет вид $y(x) = x^2 + x$.

В табл. 2 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка $[0, 1]$.

Таблица 2

x	$Y(x)$	$\|Y(x) - H(x)\|$	$\|Y(x) - RK(x)\|$
0.07813	0.08423	0.00030	0.01582
0.14063	0.16040	0.00043	0.01571
0.20313	0.24438	0.00065	0.01554
0.26563	0.33618	0.00097	0.01531
0.32813	0.43579	0.00141	0.01502
0.39063	0.54321	0.00196	0.01468
0.45313	0.65845	0.00265	0.01430
0.51563	0.78149	0.00346	0.01387
0.57813	0.91235	0.00440	0.01341
0.64063	1,05103	0.00548	0.01292
0.70313	1,19751	0.00668	0.01241
0.76563	1,35181	0.00800	0.01188
0.82813	1,51392	0.00944	0.01134
0.89063	1,68384	0.01098	0.01079
0.95313	1,86157	0.01263	0.01025

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответственно

$$R_H = 0.0134854117964, \qquad R_{RK} = 0.015869140625.$$

В данном случае погрешности методов Хаара и Рунге – Кутта практически идентичны.

Работа подготовлена частично в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. *Ohkita M., Kobayashi Y.* An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations // IEEE Transactions on Circuit and Systems. 1968. Vol. 33, iss. 9. P. 853–862.
2. *Razzaghi M., Ordokhani Y.* Solution of differential equations via rationalized Haar functions // Mathematics and computers in simulation. 2001. Vol. 56, iss. 3. P. 235–246.
3. *Razzaghi M., Ordokhani Y.* An application of rationalized Haar functions for variational problems // Applied Mathematics and Computation. 2001. Vol. 122, iss. 3. P. 353–364.
4. *Лукомский Д. С.* Применение системы Хаара для решения задачи Коши // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 14. С. 47–50.
5. *Лукомский Д. С., Терехин П. А.* Об оценке погрешности решения задачи Коши с помощью систем сжатий и сдвигов// Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2015. Т. 51. С. 295–297.

Solution of Cauchy Problem for Equation First Order Via Haar Functions

D. S. Lukomskii[1], S. F. Lukomskii[2], P. A. Terekhin[3]

[1]Dmitry S. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru
[2]Sergey F. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru
[3]Pavel A. Terekhin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, TerekhinPA@info.sgu.ru

In this article we consider a Cauchy problem for the first order differential equation and are looking for its numerical solution. For this aim we represent the derivative of the solution as Haar decomposition. We also obtain estimates of approximate solution. The method is computationally simple and applications are demonstrated through illustrative examples. These examples show that in some cases the error of the proposed method is much less, than in second order Runge – Kutta method.

Key words: differential equations, numerical methods, approximate solution, approximation error, Haar system.

The work has been prepared partially in the framework of the state task Russian Ministry of Education and Science (project no. 1.1520.2014/K) and with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00152).

References

1. Ohkita M., Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1968, vol. 33, iss. 9, pp. 853–862.
2. Razzaghi M., Ordokhani Y. Solution of differential equations via rationalized Haar functions. *Mathematics and computers in simulation*, 2001, vol. 56, iss. 3, pp. 235–246.
3. Razzaghi M., Ordokhani Y. An application of rationalized Haar functions for variational problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 122, iss. 3, pp. 353–364.
4. Lukomskii D. S. Primenenie sistemy Haara dlya resheniya zadachi Koshi [Application of Haar system for solving the Cauchy problem]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 14, pp. 47–50 (in Russian).
5. Lukomskii D. S., Terekhin P. A. Ob ocenke pogreshnosti resheniya zadachi Koshi s pomosch'yu sistem sjatiy i sdvigov [An error estimate for the Cauchy problem by using compression systems and shifts]. *Trudy Matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo* [Proceedings of the Mathematical Centre named N. I. Lobachevsky]. Kazan, Kazan Matnematical Society, 2015, vol. 51, pp. 295–297 (in Russian).

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман

Перельман Наталья Романовна, ассистент кафедры математики и информатики, Смоленский государственный университет, nataly@mannet.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана в классе аналитических функций, непрерывно продолжимых на контур в смысле Гельдера, в случае, когда эта задача не редуцируется к двухэлементным краевым задачам. В качестве контура рассматривается единичная окружность. Для определенности исследуется случай обратного сдвига контура. В этом случае решение рассматриваемой задачи сводится к решению системы из двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода; при этом существенным образом используется теория Ф. Д. Гахова краевой задачи Римана для аналитических функций. На основании этого результата построен алгоритм решения исследуемой задачи. Далее в статье доказывается, что если в краевом условии коэффициенты являются рациональными функциями, а функция сдвига дробно-линейная, то исследуемая краевая задача решается в явном виде (в квадратурах). Затем рассмотрен более простой случай явного решения задачи, когда, кроме вышеуказанных ограничений на коэффициенты и функцию сдвига, требуется еще и аналитическая продолжимость некоторых функций, заданных на контуре, внутрь области. Этот случай иллюстрируется на конкретном примере.

Ключевые слова: краевая задача, сдвиг Карлемана.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-159-165

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важным направлением в исследованиях краевых задач являются многоэлементные краевые задачи для аналитических и полианалитических функций, в том числе и задачи со сдвигом. В статье [1] исследовалась одна из таких задач — трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций. В частности, там было показано, что решение такой задачи в случае круговой области сводится к решению двух трехэлементных краевых задач типа Карлемана для аналитических функций (обозначим их для краткости задачи $\boldsymbol{K}_3$).

Для задачи $\boldsymbol{K}_3$ достаточно подробно была исследована ее разрешимость при различных предположениях относительно исходных данных (см., например, [2]).

Однако до недавнего времени не существовало конструктивного алгоритма решения задачи $\boldsymbol{K}_3$ в случае, когда она не редуцируется к двухэлементной задаче. Поэтому разработка такого алгоритма и выявление случаев, когда задача $\boldsymbol{K}_3$ решается в явном виде, является актуальной проблемой.