5. Salimov R. B., Shabalin P. L. *Hilbert boundary value problem of the theory analytic functions and its applications*. Kazan, Kazan Math. Publ., 2005, 297 p. (in Russian).
6. Salimov R. B., Shabalin P. L. On solvability of homogeneous Riemann – Hilbert problem with a countable set of coefficients discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 82–93 (in Russian).
7. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 632 p. (in Russian).

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Хромов

Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи о нахождении равномерных приближений к правой части линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида в случае, когда заданы приближения к точному решению. Построенный метод имеет простую конструкцию, не требует дополнительной информации о точной правой части, дает равномерные приближения к ней на всем отрезке, не связан с краевыми условиями.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, регуляризация, оператор Стеклова.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-180-183

1. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x) \tag{1}$$

в предположении, что $y(x) \in C^n[0,1]$, $a_i(x) \in C[0,1]$, $i = 0, \dots, n$.

Пусть $y(x)$ — решение некоторой краевой задачи для уравнения (1), и нам известно равномерное приближение $y_\delta(x)$ к $y(x)$ такое, что $\|y_\delta - y\|_{C[0,1]} \leqslant \delta$. Требуется по $y_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$.

Эта задача поставлена некорректно и ее решение требует применения методов регуляризации [1].

В работе [2] предлагается несколько таких способов: либо свести задачу к задаче решения интегрального уравнения первого рода с ядром Грина, либо аппроксимировать производные с помощью разностных формул, либо свести вычисление каждой из производных к решению интегрального уравнения первого рода с оператором кратного интегрирования. Недостатками этих способов являются в первом случае трудности с обращением дифференциального оператора при произвольных краевых условиях, во втором случае — невозможность получить решение на всем отрезке $[0,1]$, так как аргументы в разностных формулах выводят нас за границы отрезка, а третий способ можно применить лишь в частном случае краевых условий. При этом в первом и третьем способах еще нужно найти метод регуляризации интегрального уравнения, не требующий никакой дополнительной информации о решении, а только его непрерывности, что является самостоятельной проблемой.

В [3] на базе операторов из [4] дается метод решения поставленной задачи при $n = 2$ применительно к известной обратной задаче для уравнения теплопроводности, свободный от указанных недостатков. В настоящей работе приводится обобщение метода из [3].

Используем семейство интегральных операторов из [5], равномерно аппроксимирующих непрерывную производную любого порядка функции, заданной на отрезке $[0,1]$. Оно имеет вид

$$T_{m\alpha}y = \begin{cases} T_{m\alpha 2}y, & x \in [0,1/2], \\ T_{m\alpha 1}y, & x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где

$$T_{m\alpha 1}y \equiv D^m S_{\alpha 1}^{m+1} y = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha),$$

$$T_{m\alpha 2}y \equiv D^m S_{\alpha 2}^{m+1}y = \alpha^{-(m+1)}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k F_2(x+(m-k)\alpha), \tag{2}$$

$$S_{\alpha 1}y = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} y(t)dt, \qquad S_{\alpha 2}y = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} y(t)dt,$$

D — оператор дифференцирования,

$$F_1(x) = \int\limits_{x-\alpha}^{x} y(\xi)d\xi, \qquad F_2(x) = \int\limits_{x}^{x+\alpha} y(\xi)d\xi, \qquad m \geqslant 1, \qquad \alpha \leqslant \frac{1}{2(m+1)}.$$

Справедлива [5]

Теорема 1. *Для любой $y(x) \in C^m[0,1]$ при $\alpha \leqslant \frac{1}{2(m+1)}$ имеет место сходимость*

$$\|T_{m\alpha}y - y^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \alpha \to 0,$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}$.

Лемма 1. *Справедливы равенства:*

$$\|T_{m\alpha}\|_{C[0,1]\to L_\infty[0,1]} = 2^m\alpha^{-m}, \qquad m = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Доказательство вытекает из формул:

$$\|T_{m\alpha}\|_{C\to L_\infty} = \max\{\|T_{m\alpha 2}\|_{C[0,1]\to C[0,1/2]}, \|T_{m\alpha 1}\|_{C[0,1]\to C[1/2,1]}\},$$

$$\|T_{m\alpha j}\|_{C[0,1]\to C[c,d]} = \max_{c\leqslant x\leqslant d}\int\limits_0^1 |T_{m\alpha j}(x,t)|dt,$$

где $T_{m\alpha j}(x,t)$ — ядро интегрального оператора $T_{m\alpha j}$, $j = 1, 2$; $[c,d] = [0,1/2]$ для $j = 2$, $[c,d] = [1/2,1]$ для $j = 1$, и формул (2).

Введем в рассмотрение величины:

$$\Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}) = \sup\{\|T_{m\alpha}y_\delta - y^{(m)}\|_{L_\infty} : \|y_\delta - y\|_C \leqslant \delta\}, \qquad m = 1, \ldots, n.$$

По аналогии с теоремой 3 в [5] из теоремы 1 и леммы 1 следует

Теорема 2. *Для сходимости $\Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta))$, удовлетворяющего условиям: $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-m} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

2. Построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов $T_{m\alpha}$. Рассмотрим функции

$$f_\delta^\alpha(x) = a_0(x)T_{n\alpha}y_\delta + a_1(x)T_{n-1,\alpha}y_\delta + \cdots + a_{n-1}(x)T_{1\alpha}y_\delta + a_n(x)y_\delta.$$

Теорема 3. *При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям $\alpha(\delta) \to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-n} \to 0$ при $\delta \to 0$, имеет место сходимость*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0.$$

Доказательство. Из (1) следует очевидная оценка:

$$\|f_\delta^\alpha(x) - f(x)\|_{L_\infty} \leqslant A_0\|T_{n\alpha}y_\delta - y^{(n)}\|_{L_\infty} + \cdots + A_{n-1}\|T_{1\alpha}y_\delta - y'\|_{L_\infty} + A_n\|y_\delta - y\|_C, \tag{4}$$

где $A_k = \|a_k(x)\|_{C[0,1]}$, $k = 0, \ldots, n$.

Поскольку

$$\|T_{m\alpha}y_\delta - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leqslant \Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}),$$

$m = 1, \ldots, n$, а согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, указанное в теореме, достаточно для сходимости $\delta(\alpha(\delta))^{-m} \to 0$ при $\delta \to 0$, если $m \leqslant n$, то отсюда вытекает утверждение теоремы. □

3. Пусть нам известно, что $y^{(n)} \in Lip_k 1$. Справедлива

Лемма 2. *При каждом фиксированном α выполняются оценки:*

$$\|T_{m\alpha} y - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leqslant (m+1) M_{m+1} \alpha, \tag{5}$$

где $M_{m+1} = \|y^{(m+1)}\|_{C[0,1]}$, $m = 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Из равенств $T_{m\alpha j} = D^m S_{\alpha j}^{m+1}$, $D^m S_{\alpha j}^{m+1} y = S_{\alpha j}^{m+1} y^{(m)}$ и оценки $\|S_{\alpha j}^k \varphi - \varphi\|_C \leqslant \omega(\varphi, k\alpha)$, где $j = 1, 2$, $\varphi(x)$ — любая непрерывная на $[0,1]$ функция, $\omega(\varphi, k\alpha)$ — ее модуль непрерывности, следует, что

$$\|T_{m\alpha} y - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leqslant \omega(y^{(m)}, (m+1)\alpha).$$

Но каждая из функций $y^{(m)}(x)$ при $m = 1, \ldots, n-1$ принадлежит в силу ограниченности ее производной классу $Lip_{M_{m+1}} 1$. Значит, $\omega(y^{(m)}, (m+1)\alpha) \leqslant M_{m+1}(m+1)\alpha$, откуда следует утверждение леммы. □

Теорема 4. *Если $y^{(n)}(x) \in Lip_k 1$, то справедлива оценка:*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leqslant C_0 \delta^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \delta^{\frac{n-k}{n+1}} + A_n \delta, \tag{6}$$

где

$$\alpha(\delta) = C \delta^{\frac{1}{n+1}}, \tag{7}$$

$C = (A_0 2^n B^{-1})^{\frac{1}{n+1}}$, $B = A_0 K(n+1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k M_{n-k+1}$, $C_0 = 2(A_0 2^n B^n)^{\frac{1}{n+1}}$, $C_k = A_k 2^{n-k} (\frac{B}{A_0 2^n})^{\frac{n-k}{n+1}}$.

Доказательство. Запишем оценку (4) в виде

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant A_0(\|T_{n\alpha} y - y^{(n)}\|_{L_\infty} + \delta \|T_{n\alpha}\|_{C \to L_\infty}) + A_1(\|T_{n-1,\alpha} y - y^{(n-1)}\|_{L_\infty} + \\ + \delta \|T_{n-1,\alpha}\|_{C \to L_\infty}) + \cdots + A_{n-1}(\|T_{1\alpha} y - y'\|_{L_\infty} + \delta \|T_{1\alpha}\|_{C \to L_\infty}) + A_n \delta.$$

Подставим в правую часть этой оценки равенства (3) и оценки (5). Тогда получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant B\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} \alpha^{-(n-k)} + A_n \delta, \tag{8}$$

где B определена в теореме, $M_k = \|y^{(k)}\|_{C[0,1]}$.

Выберем $\alpha = \alpha(\delta)$ из разумных соображений — из равенства первого слагаемого в правой части оценки (8) самому большому по асимптотике α, содержащему отрицательные степени α, т. е. из равенства $B\alpha = A_0 2^n \alpha^{-n} \delta$. Отсюда получаем (7). Подставляем (7) в оценку (8) — получаем оценку (6).

Если известны числа M_k, то все константы в (6) и (7) имеют конкретные значения, если же неизвестны, то формула (7) и оценка (6) дают нам информацию лишь о порядке по δ этих формул.

Библиографический список

1. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
2. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
3. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
4. *Хромов А. А.* Приближение функции и её производных с помощью модифицированных операторов Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.
5. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задаче равномерного приближения производных на отрезке // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2014. Т. 54, № 9. С. 1442–1447. DOI: 10.7868/S0044466914090099.

The Solution of a Certain Inverse Problem

A. A. Khromov

Aleksandr A. Khromov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

The solution is given for the problem of findinging uniform approximations of a the right-hand side of a general linear ordinary differential equation in the case when approximations of the exact solution are known. The constructed method has a simple structure, produces approximations of the right-hand side on the whole interval of definition and does not employ boundary conditions.

Key words: ordinary differential equation, regularization, Steklov discontinuous operator.

References

1. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* [The theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
2. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994, 206 p. (in Russian).
3. Khromov A. A., Khromova G. V. The Solution of the Problem of Determining the Dendity of Heat Sources in a Rod. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314 (in Russian).
4. Khromov A. A. Approximation of Function and Its Derivative by the Modificated Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 593–597 (in Russian).
5. Khromov A. P., Khromova G. V. Discontinuous Steklov operators in the problem of uniform approximation of derivatives on closed integral. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1389–1394. DOI: 10.1134/S09655425140 90085.