УДК 519.7

О ЗАДАЧЕ АБСТРАКТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов[1], **Е. В. Хворостухина**[2]

[1]Молчанов Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, v.molchanov@inbox.ru

[2]Хворостухина Екатерина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационно-коммуникационных систем и программной инженерии, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., 410054, Россия, Саратов, Политехническая, 77, katyanew2007@rambler.ru

Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных символов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов представляются автоматами $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ с гиперграфом состояний H_1, гиперграфом выходных символов H_2 и полугруппой входных символов $S = \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}\,(H_1, H_2)$, которые называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для такого автомата $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ полугруппа входных символов S является производной алгеброй отображений, свойства которой взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры данного автомата. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных символов. В настоящей работе исследуется проблема абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов, суть которой заключается в нахождении условий изоморфности произвольного автомата некоторому универсальному гиперграфическому автомату. Основной результат работы дает решение этой задачи для универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных символов являются плоскостями (например, проективными или аффинными) или разбиениями на классы нетривиальных эквивалентностей. Для решения основной задачи работы показано, что алгебраическая структура эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами полностью определяется отношением $(p+1)$-ограниченности его вершин и для универсальных гиперграфических автоматов над такими гиперграфами алгебраическая структура гиперграфов состояний и выходных символов полностью определяется каноническими отношениями полугруппы входных символов таких автоматов.

Ключевые слова: автомат, гиперграф, полугруппа, абстрактная характеризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159

ВВЕДЕНИЕ

В последние 30 лет проявился заметный интерес к исследованию автоматов, у которых системы состояний и выходных символов являются объектами некоторой категории $\mathbf{K}$ (см., например, обзор в [1]). В категории таких автоматов для любых объектов $K_1, K_2 \in \mathbf{K}$ существует универсальный притягивающий объект $\mathrm{Atm}(K_1, K_2)$, который называется универсальным автоматом над объектами K_1, K_2 категории $\mathbf{K}$. Ввиду проблемы С. Улама [2] об определимости математических структур их эндоморфизмами и результатов Б. Йонсона (Jonsson) [3] об абстрактной характеризации алгебр отношений представляет интерес изучение следующей проблемы абстрактной характеризации таких универсальных автоматов над категорией $\mathbf{K}$: найти условия, при которых абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будет изоморфен универсальному автомату $\mathrm{Atm}\,(K_1, K_2)$ над некоторыми объектами K_1, K_2 категории $\mathbf{K}$. В настоящей работе приводится решение данной задачи для категории $\mathbf{Hgr}$ эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами, которая охватывает, в частности, проективные плоскости, множества с нетривиальными разбиениями и многие другие гиперграфы.

Результаты работы докладывались на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» в Саратовском университете (Саратов, 2016) [4].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть X, Y — непустые множества. Всюду определенное однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ называется отображением множества X в множество Y и обозначается символом $\varphi : X \to Y$. Через Δ_X обозначим тождественное отображение множества X в себя.

Обозначим через $T(X)$ множество всех преобразований X, через $F(X, Y)$ — множество всех отображений X в Y и $S(X, Y) = T(X) \times F(X, Y)$ — декартово произведение множеств $T(X)$, $F(X, Y)$. Элементами множества $S(X, Y)$ являются упорядоченные пары (f_1, f_2) отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$, которые могут рассматриваться как вектор-функции $f : X \to X \times Y$, определяющиеся по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ для $x \in X$. Отображения f_1, f_2 называются первой и второй компонентами вектор-функции f соответственно. Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Как известно [1], на множестве $S(X, Y)$ для вектор-функций $f, g \in S(X, Y)$ определяется ассоциативное умножение по правилу $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2)$. Множество $S(X, Y)$ с такой операцией умножения называется симметрической полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$. Подполугруппы такой симметрической полугруппы называются полугруппами вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$.

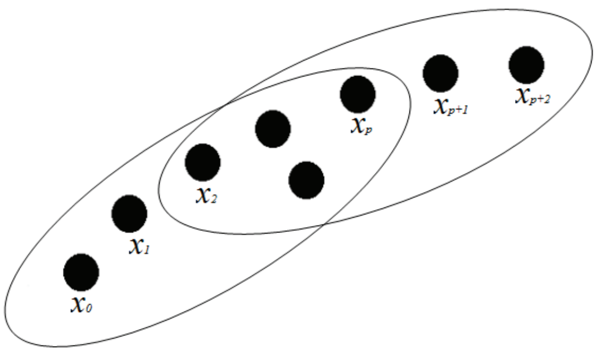
Согласно [5] гиперграфом называется алгебраическая система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре, и неограниченным, в противном случае. Вершины гиперграфа, принадлежащие некоторому его ребру, называются смежными. Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа.

Пусть p — некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более чем в одном ребре.

Например, если рассматривать плоскости [6] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами — прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами. Кроме того, эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами являются исследуемые в работе [7] слабые p-гиперграфы. Наконец, эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами являются гиперграфы, ребра которых образуют разбиения множества вершин на классы, содержащие более p вершин.

Помимо этих известных примеров, для любого натурального числа p имеется множество других нетривиальных эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами.

Пример. Для любого натурального числа p гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}$ и множеством ребер $L = \{\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_p\}, \{x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}\}\}$ является эффективным гиперграфом с p-определимыми ребрами (рисунок).



Эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами H

An effective hypergraph with p-definable edges H

Пусть $H = (X, L)$, $H_1 = (X_1, L_1)$ — произвольные гиперграфы. Гомоморфизмом гиперграфа $H = (X, L)$ в гиперграф $H_1 = (X_1, L_1)$ называется отображение φ множества X в множество X_1, которое смежные в гиперграфе H вершины переводит в смежные вершины гиперграфа H_1, т. е. выполняется свойство

$$(\forall\ l \in L)(\exists\ l' \in L_1)(\varphi(l) \subset l').$$

Заметим, что для ребра $l \in L_1$ всякое отображение $\varphi : X \to l$ является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H_1.

Множество всех гомоморфизмов гиперграфа H в гиперграф H_1 обозначим $\mathrm{Hom}\,(H, H_1)$.

Гомоморфизм гиперграфов $f : H \to H_1$ называется изоморфизмом гиперграфа H на гиперграф H_1, если f — взаимно однозначное отображение множества X на множество X_1 и обратное отображение f^{-1} является гомоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H, т. е. выполняется условие

$$(\forall\, Y \subset X)(Y \in L \Longleftrightarrow f(Y) \in L_1).$$

Если существует изоморфизм $f : H \to H_1$, то гиперграфы H и H_1 называются изоморфными и записывают $H \cong H_1$. Гомоморфизм гиперграфа $H = (X, L)$ в себя называется эндоморфизмом гиперграфа H. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}\, H$.

Для гиперграфов $H_X = (X, L_Y), H_Y = (Y, L_Y)$ через $S(H_X, H_Y)$ обозначим полугруппу $\mathrm{End}\, H_X \times \mathrm{Hom}\,(H_X, H_Y)$ с определенной выше операцией умножения вектор-функций по правилу [1]: $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар (φ, ψ), $(\varphi_1, \psi_1) \in \mathrm{End}\, H_X \times \mathrm{Hom}\,(H_X, H_Y)$.

Следуя [1], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X, полугруппы входных символов S, множества выходных символов Y, функции переходов $\delta : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda : X \times S \to Y$ таких, что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия

$$\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t), \qquad \lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t). \tag{1}$$

Для любого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X \to X$, $\lambda_s : X \to Y$ и вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s), \lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$. По определению автомата последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ в силу свойства (1) удовлетворяет следующим условиям:

$$(f_s f_t)(x) = f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \longmapsto f_s \ \ (s \in S)$ является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ называется автоматом без равнодействующих входных символов, если для произвольных $s, t \in S$, таких, что $s \neq t$, выполняется условие $f_s \neq f_t$. В этом случае соответствие $s \longmapsto f_s$ $(s \in S)$ является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X, Y)$, и действие каждого входного символа $s \in S$ полностью определяется действием пары отображений (δ_s, λ_s), т. е. входной символ s можно отождествить с вектор-функцией $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ и саму полугруппу входных символов S можно рассматривать как полугруппу вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$.

В то же время любая полугруппа S вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$ может рассматриваться как полугруппа входных символов автомата $A = (X, S, Y, \delta', \lambda')$ с множеством состояний X, множеством выходных символов Y, функцией переходов $\delta' : X \times S \to X$ и выходной функцией $\lambda' : X \times S \to Y$, значения которых для состояний $x \in X$ и вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ из S определяются по формулам:

$$\delta'(x, f) = f_1(x), \qquad \lambda'(x, f) = f_2(x). \tag{2}$$

Изоморфизмом автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на автомат $A_1 = (X_1, S_1, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ биекций $f : X \to X_1, \pi : S \to S_1$ и $g : Y \to Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. π является изоморфизмом полугруппы S на полугруппу S_1, и для любых значений $s, t \in S$, $x \in X$ выполняются условия $\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t)$, $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$ и $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будем называть гиперграфическим автоматом, если множество состояний X и множество выходных символов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \to X$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \to Y$ — гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Такие автоматы будем также обозначать $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_{X_1}, S_1, H_{Y_1}, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \to X_1, \pi : S \to S_1$ и $g : Y \to Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. f является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1}, π — гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S_1, g — гомоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} и для любых значений $x \in X, s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s))$.

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda')$, где $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$ — некоторые гиперграфы, и для любых состояний $x \in X$ и вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ из $S(H_X, H_Y)$ значения функции переходов $\delta'(x, f)$ и функции выходов $\lambda'(x, f)$ определяются по формулам (2). Легко проверить, что $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \to S(H_X, H_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y.

2. АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ

В работе исследуется проблема абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов, которая формулируется следующим образом: при каких условиях абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ будет изоморфен универсальному автомату $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ над некоторыми гиперграфами H_1, H_2?

Для решения этой задачи понадобятся следующие понятия из работы [8].

Пусть X — произвольное непустое множество, p — натуральное число и R — $(p+1)$-арное отношение на множестве X. Согласно [8] отношение R называется p-эквивалентностью на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям: (T_1) $(x, \ldots, x, x) \in R$ для любого $x \in X$;

(T_2) для любых $1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, i_{p+1} \leqslant p+1$,

$$(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in R \Longrightarrow (x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}) \in R;$$

(T_3) для любых попарно различных элементов $x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p \in X$,

$$(x, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p), (x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, y) \in R \Longrightarrow (x, x_1, \ldots, x_{p-1}, y) \in R.$$

При этом p-эквивалентность R называется квазиполной, если выполняется условие

(T_4) для любых элементов $x_1, \ldots, x_p \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, \ldots, x_p, x_p) \in R$, найдется такой, отличный от всех них, элемент $x \in X$, что $(x_1, \ldots, x_p, x) \in R$. Пусть X — произвольное непустое множество и R — некоторое n-арное отношение на этом множестве. Тогда множество $Y \subset X$ называется R-связным, если $Y^n \subset R$.

Легко видеть, что множество M_R всех R-связных множеств так упорядочено отношением теоретико-множественного включения, что выполняются следующие условия:

1) любая цепь упорядоченного множества M_R имеет максимальный элемент;

2) любое R-связное множество включается в некоторое максимальное R-связное множество.

Для произвольного гиперграфа $H = (X, L)$ определим на множестве X отношение $B_p(H)$ $(p+1)$-ограниченности вершин по следующей формуле:

$$B_p(H) = \{(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}) \in X^{p+1} : x_1, \ldots, x_p, x_{p+1} \in l \text{ для некоторого } l \in L\}.$$

По аналогии с леммами 3.3, 3.5 из работы [8] получаем следующие результаты.

Лемма 1. *Пусть $H = (X, L)$ — произвольный эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами и $B_p = B_p(H)$ — отношение $(p+1)$-ограниченности его вершин. Тогда отношение B_p является квазиполной p-эквивалентностью на множестве X.*

Предложение 1. *Пусть X — произвольное непустое множество, p — некоторое натуральное число и R — квазиполная p-эквивалентность на множестве X. Тогда для множества всех максимальных R-связных множеств M_R алгебраическая система $H = (X, M_R)$ является эффективным гиперграфом с p-определимыми ребрами, для отношения $B_p(H)$ $(p+1)$-ограниченности вершин которого выполняется равенство $B_p(H) = R$.*

Для автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на множествах X, Y определим канонические $(p+1)$-арные отношения R_X, R_Y по следующим формулам: упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in X^{p+1}$ (соответственно $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in Y^{p+1}$) в том и только том случае принадлежит отношению R_X (соответственно отношению R_Y), если для любых различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ найдется такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняется равенство $\delta(x_i, s) = a_i$ (соответственно $\lambda(x_i, s) = a_i$).

Лемма 2. *Для любого автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ канонические отношения R_X, R_Y обладают следующим свойством: $\delta_s^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_s^{p+1}(R_X) \subset R_Y$ для любого символа $s \in S$.*

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}) \in R_X$ и для некоторого символа $s \in S$ выполняются равенства $\delta_s(a_i) = b_i$ (соответственно $\lambda_s(a_i) = c_i$) при всех $i = \overline{1, p+1}$. Тогда для любых различных элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ найдется такой входной символ $t \in S$, что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняется равенство $\delta_t(x_i) = a_i$. Так как для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняются равенства $\delta_{ts}(x_i) = \delta_s(\delta_t(x_i)) = \delta_s(a_i) = b_i$ (соответственно $\lambda_{ts}(x_i) = \lambda_s(\delta_t(x_i)) = \lambda_s(a_i) = c_i$), то по определению R_X и R_Y получаем, что $(b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}) \in R_X$, $(c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}) \in R_Y$, т. е. $\delta_s^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_s^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. □

Лемма 3. *Для любых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X), H_Y = (Y, L_Y)$ канонические отношения R_X, R_Y универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ обладают следующими свойствами:*

1) $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$;

2) отображение $\psi : X \to Y$ в том и только том случае будет гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y, если выполняется $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$.

Доказательство. По определению отношения $(p+1)$-ограниченности вершин B_p для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H)$ выполняется тогда и только тогда, когда вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ смежны, т. е. принадлежат некоторому ребру $l \in L_X$. В этом случае любое отображение $\varphi : X \to l$ является эндоморфизмом гиперграфа H_X и по определению канонических отношений выполняется условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$. Значит, имеет место: $B_p(H_X) \subset R_X$. Аналогичным образом доказывается, что $B_p(H_Y) \subset R_Y$. Поскольку H_X — эффективный гиперграф с p-определимыми ребрами, то найдутся такие вершины $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1} \in X$, принадлежащие некоторому ребру $r \in L_X$, что $z_i \neq z_j$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant p+1$. Для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$ условие $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$ означает, что найдется такой входной символ $s \in S$, что для всех $i = \overline{1, p+1}$ выполняется $\delta_s(z_i) = x_i$. Так как $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1}$ — смежные вершины, то вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ также смежны и, следовательно, $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H_X)$. Таким образом, выполняется $R_x \subset B_p(H_X)$, а значит, $R_X = B_p(H_X)$.

В то же время для любых элементов $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1} \in Y$ условие $(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}) \in \in R_Y$ означает, что найдется такой входной символ $s \in S$, что для всех $i = \overline{1, p+1}$ выполняется $\lambda_s(z_i) = y_i$. Следовательно, вершины $y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}$ должны лежать в одном ребре гиперграфа H_Y, а значит, $(y_1, y_2, \ldots, y_{p+1}) \in B_p(H_Y)$. Таким образом, $R_Y \subset B_p(H_Y)$ и выполняется $R_Y = B_p(H_Y)$. Это доказывает пункт 1) леммы.

Пусть $\psi : X \to Y$ — гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y и $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$. Тогда в силу уже доказанного пункта 1) данной леммы имеет место $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H_X)$. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ принадлежат некоторому ребру $l \in L_X$. Поскольку ψ — гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y, то в гиперграфе H_Y найдется ребро

$r \in L_Y$ такое, что $\psi(l) \subset r$. Значит, $\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1}) \in r$ и, следовательно, $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in B_p(H_Y)$. В силу пункта 1) этой леммы имеет место $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in R_Y$, т. е. $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$.

Обратно, пусть отображение $\psi : X \to Y$ удовлетворяет условию $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Рассмотрим произвольное ребро $l \in L_X$ в силу p-определимости ребер гиперграфа H_X найдутся попарно различные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$, принадлежащие l. По определению отношения B_p получаем $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in B_p(H)$, а в силу пункта 1) данной леммы имеем $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$. Тогда из условия $\psi^{p+1}(R_X) \subset R_Y$ получаем, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in R_Y$. Из пункта 1) данной леммы следует, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})) \in B_p(H_Y)$. А это означает, что вершины $\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_{p+1})$ смежные, т. е. принадлежат некоторому ребру $r \in L_Y$ гиперграфа H_Y. Следовательно, $\psi(l) \subset r$. Таким образом, отображение ψ является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. □

Теорема 1. *Автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ в том и только том случае будет изоморфен универсальному гиперграфическому автомату $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ над некоторыми эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами H_1 и H_2, если выполняются следующие условия:*

1) *для различных $s, t \in S$ найдется такой элемент $x \in X$, что либо $\delta(x, s) \neq$ $\neq \delta(x, t)$, либо $\lambda(x, s) \neq \lambda(x, t)$;*
2) *канонические отношения R_X и R_Y автомата A являются квазиполными p-эквивалентностями соответственно на множествах X и Y;*
3) *если для отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$ при любых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda(x_i, t)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$, то найдется такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda(x, a)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ для некоторых эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$. Покажем, что для такого автомата выполняются условия 1)–3).

Пусть $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ — вектор-функции из полугруппы входных сигналов $S = S(H_X, H_Y)$, удовлетворяющие условию $f \neq g$. Тогда либо $f_1 \neq g_1$, либо $f_2 \neq g_2$. Значит, либо для некоторого $x \in X$ выполняется $f_1(x) \neq g_1(x)$ и в силу $\delta'(x, f) = f_1(x), \delta'(x, g) = g_1(x)$ получаем $\delta'(x, f) \neq \delta'(x, g)$, либо для некоторого $x \in X$ выполняется $f_2(x) \neq g_2(x)$ и в силу $\lambda'(x, f) = f_2(x), \lambda'(x, g) = g_2(x)$ получаем $\lambda'(x, f) \neq \lambda'(x, g)$. Следовательно, для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 1).

Согласно лемме 1 для универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ выполняются равенства: $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$. Так как отношения $B_p(H_X), B_p(H_Y)$ удовлетворяют условиям 1)–4) леммы 1, то для канонических отношений R_X, R_Y выполняются условия $(T_1) - (T_4)$. Значит, R_X, R_Y являются квазиполными p-эквивалентностями на множествах X, Y соответственно, т. е. для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 2).

Пусть для отображений $f_1 : X \to X$, $f_2 : X \to Y$ при любых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1} \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta'(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda'(x_i, t)$ для всех $i = \overline{1, p+1}$. По лемме 2 $\delta_s'^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $\lambda_t'^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Тогда $(f_1(x_1), f_1(x_2), \ldots, f_1(x_{p+1})) \in R_X$, $(f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_{p+1})) \in R_Y$. Значит, $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X, f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. В силу леммы 3 отображение f_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_X, а отображение f_2 является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Тогда из определения автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ получаем, что вектор-функция $a = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе входных сигналов S, при этом по формулам (2) выполняется $f_1(x) = \delta'(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda'(x, a)$ для всех $x \in X$. Таким образом, для автомата $A = \mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$ выполняется условие 3).

Обратно, предположим, что абстрактный автомат $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ удовлетворяет условиям 1)–3). Тогда из условия 1) следует, что A является автоматом без равнодействующих входных символов. Значит, соответствие $f : s \longmapsto f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ $(s \in S)$ является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X, Y)$ и действие каждого входного символа $s \in S$ полностью определяется действием вектор-функции $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$. Рассмотрим автомат $A' = (X, f(S), Y, \delta', \lambda')$, у которого полугруппа входных символов $f(S)$ является полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$ и действия функции переходов $\delta' : X \times f(S) \to X$ и выходной функции $\lambda' : X \times f(S) \to Y$ определяются по формулам (2). Легко убедиться, что упорядоченная тройка биекций $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ является изоморфизмом автомата A на автомат A'. В самом деле для любых $x \in X, s \in S$ по формулам (2) выполняются равенства:

$$\delta'(x, f(s)) = \delta'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \delta_s(x) = \delta(x, s),$$
$$\lambda'(x, f(s)) = \lambda'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \lambda_s(x) = \lambda(x, s),$$

т. е. $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ — изоморфизм автомата A на автомат A'. Очевидно, что автомат A' определяет на множествах X, Y такие же канонические отношения R_X, R_Y, что и автомат A.

По построению автомата $A' = (X, f(S), Y, \delta', \lambda')$ полугруппа входных символов $f(S)$ является полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$, действия функции переходов $\delta' : X \times S \to X$ и выходной функции $\lambda' : X \times S \to Y$ определяются по формулам (2) и канонические отношения R_X, R_Y этого автомата являются квазиполными p-эквивалентностями соответственно на множествах X, Y. По предложению 1 найдутся такие эффективные гиперграфы с p-определимыми ребрами $H_X = (X, L_X)$, $H_Y = (Y, L_Y)$, что $R_X = B_p(H_X)$, $R_Y = B_p(H_Y)$. Покажем, что $f(S) = S(H_X, H_Y)$. Для любой вектор-функции $f = (f_1, f_2)$ из $f(S)$ по формулам (2) выполняется $\delta_f' = f_1, \lambda_f' = f_2$ и согласно лемме 2 $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X$, $f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Тогда по лемме 3 отображение f_1 является эндоморфизмом гиперграфа H_X, а отображение f_2 является гомоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Значит, вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит множеству $S(H_X, H_Y)$ и выполняется $f(S) \subset S(H_X, H_Y)$. С другой стороны, если вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе $S(H_X, H_Y)$, то по лемме 2 выполняются условия $f_1^{p+1}(R_X) \subset R_X$,

$f_2^{p+1}(R_X) \subset R_Y$. Это означает, что для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ таких, что $(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \in R_X$ имеет место $(f_1(x_1), f_1(x_2), \ldots, f_1(x_{p+1})) \in R_X$, $(f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_{p+1})) \in R_Y$. По определению канонических отношений R_X, R_Y найдутся такие символы $s, t \in S$,что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняются равенства $f_1(x_i) = \delta(x_i, s)$ и $f_2(x_i) = \lambda(x_i, t)$. По условию теоремы 3) найдется такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta(x, a)$ и $f_2(x) = \lambda(x, a)$ для всех $x \in X$. Это означает, что $f_1 = \delta_a, f_2 = \lambda_a$ и по определению $f_a = (\delta_a, \lambda_a) = (f_1, f_2) = f$. Следовательно, вектор-функция $f \in f(S)$ и выполняется $S(H_X, H_Y) \subset f(S)$. Таким образом, $S(H_X, H_Y) = f(S)$ и упорядоченная тройка биекций $\gamma = (\Delta_X, f, \Delta_Y)$ является изоморфизмом автомата A на автомат $\mathrm{Atm}\,(H_X, H_Y)$. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью полученных результатов можно доказать, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p-определимыми ребрами задаются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов, и исследовать взаимосвязь между абстрактными свойствами таких автоматов и их полугрупп входных символов.

Библиографический список

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
2. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
3. *Jonsson B.* Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer-Verlag, 1972. 220 p.
4. *Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.* О задаче конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : ИЦ Наука, 2016. С. 284–285.
5. *Bretto A.* Hypergraph theory. An Introduction. Cham ; Heidelberg ; N. Y. ; Dordrecht ; London : Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.
6. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М. : Мир, 1970. 161 с.
7. *Молчанов А. В.* Полугруппы эндоморфизмов слабых p-гиперграфов // Изв. вузов. Матем. 2000. № 3. С. 80–83.
8. *Молчанов А. В.* Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. 1998. Вып. 2. С. 74–84.

Образец для цитирования:

Молчанов В. А., Хворостухина Е. В. О задаче абстрактной характеризации универсальных гиперграфических автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 148–159. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159.

On Problem of Abstract Characterization of Universal Hypergraphic Automata

V. A. Molchanov[1], E. V. Khvorostukhina[2]

[1]Vladimir A. Molchanov, ORCID: 0000-0001-6509-3090, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, Russia, 410012, v.molchanov@inbox.ru

[2]Ekaterina V. Khvorostukhina, ORCID: 0000-0002-2775-5732, Yuri Gagarin Saratov State Technical University, 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, katyanew2007@rambler.ru

Hypergraphic automata are automata whose state sets and sets of output symbols are endowed with algebraic structures of hypergraphs preserving by transition and exit functions. Universally attracting objects in the category of hypergraphic automata are automata $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$, where H_1 is a hypergraph of the state set, H_2 is a hypergraph of the set of output symbols and $S = \mathrm{End}\,H_1 \times \mathrm{Hom}\,(H_1, H_2)$ is a semigroup of input symbols. Such automata are called universal hypergraphic automata. The semigroup of input symbols S of such automaton $\mathrm{Atm}\,(H_1, H_2)$ is a derivative algebra of mappings for such automaton. So its properties are interconnected with properties of the algebraic structure of the automaton. Thus we can study universal hypergraphic automata by investigation of their semigroups of input symbols. In this paper we study the problem of abstract characterization of universal hypergraphic automata. The problem is to find the conditions of existence of isomorpism of arbitrary automaton to the universal hypergraphic automaton. The main result of the paper is solving of this problem for universal hypergraphic automata over effective hypergraphs with p-definable edges. It's a wide and a very important class of automata because such algebraic systems contain automata whose state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are projective or affine planes. Also they include automata whose state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are divided into equivalence classes. To solve the main problem we also proved that the algebraic structure of effective hypergraps with p-definable edges were determined by a relation of $(p+1)$-boundedness of vertices of this hypergraph and for automata under consideration, algebraic structures of state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are determined by canonical relations of the semigroup of input symbols of the automata.

Key words: automaton, hypergraph, abstract characterization.

References

1. Plotkin B. I., Geenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore, River Edge, NJ, World Scientific, 1992. 192 p. (Russ. ed. : Plotkin B. I., Geenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Elementy algebraicheskoi teorii avtomatov*. Moscow, Vysshaia shkola, 1994. 192 p.)
2. Ulam S. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience Publ., 1960. 150 p. (Russ. ed. : Ulam S. *Nereshennye matematicheskie zadachi*. Moscow, Nauka, 1964. 168 p.)
3. Jonsson B. *Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1972. 220 p.
4. Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On problem of concrete characterization of universal hypergraphic automata. *Proc. VII Intern. Sci. Conf. „Computer Science and Information Technologies“*. Saratov, 2016, pp. 284–285 (in Russian).
5. Bretto A. *Hypergraph theory. An Introduction*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2013. 133 p. DOI: 10.1007/978-3-319-00080-0.

6. Hartshorne R. *Foundations of Projective Geometry*. New York, ISHI Press, 2009. 190 p. (Russ. ed. : Hartshorne R. *Osnovy proektivnoi geometrii*. Moscow, Mir, 1970. 161 p.)
7. Molchanov A. V. Endomorphism semigroups of weak p-hypergraphs. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, no. 3, pp. 77–80.
8. Molchanov A. V. Ob opredeljaemosti gipergraficheskih avtomatov ih vyhodnymi funkcijami [On definability of hypergraphic automata by their exist functions]. *Teoreticheskie problemy informatiki* [Theoretical Problems of Informatics], 1998, iss. 2, pp. 74–84 (in Russian).

Cite this article as:

Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On Problem of Abstract Characterization of Universal Hypergraphic Automata. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 148–159 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-2-148-159.