

## МЕХАНИКА

УДК 629.78; 519.6

### РАСЧЁТ НАИСКОРЕЙШИХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ

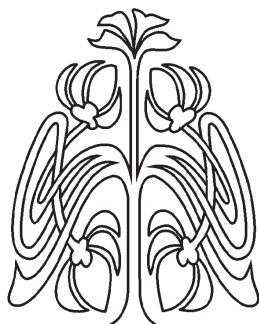
И. А. Панкратов

Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, Астраханская, 83, PankratovIA@info.sgu.ru

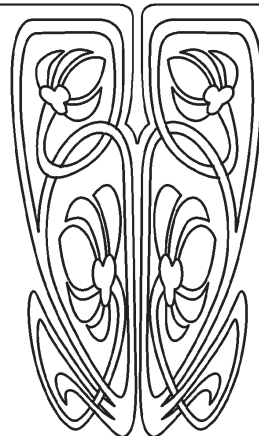
В кватернионной постановке рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Необходимо минимизировать длительность процесса переориентации орбиты КА. Для описания движения центра масс КА использованы кватернионные дифференциальные уравнения ориентации орбитальной системы координат. Рассмотрен актуальный частный случай задачи, когда орбита КА является круговой, а управление принимает свои максимальные по модулю значения на отдельных участках активного движения КА. Построен оригинальный генетический алгоритм нахождения траекторий наискорейших перелётов КА, в котором неизвестными величинами являются длительности участков активного движения КА. При применении этого способа не требуется какой-либо информации о неизвестных начальных значениях сопряжённых переменных. Высокая скорость работы предложенного генетического алгоритма достигнута за счёт использования существующего в данном случае известного аналитического решения уравнений задачи. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда отличие между начальной и конечной ориентациями орбиты КА составляет единицы градусов в угловой мере. При этом конечная ориентация орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС. Построены графики изменения компонент кватерниона ориентации орбитальной системы координат, отклонения текущего положения орбиты КА от требуемого, оптимального управления. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА.

*Ключевые слова:* космический аппарат, орбита, оптимизация, ген.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-344-352



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо перевести орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$2 \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = u \frac{r}{c} \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (1)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \text{vect} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left( \cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = \mathbf{0}, \quad (2)$$

за минимальное время с помощью кусочно-постоянного управления:

$$u(t) = \begin{cases} u_{start}, & \text{если } 0 \leq t < t_1, \\ -u_{start}, & \text{если } t_1 \leq t < t_2, \\ \dots & \\ u_{start} \cdot (-1)^{k-1}, & \text{если } t_{k-1} \leq t < t_k, \\ \dots & \\ u_{start} \cdot (-1)^{M-1}, & \text{если } t_{M-1} \leq t \leq t_M = t^*. \end{cases}$$

При этом количество участков активного движения КА  $M$  полагается заданным. Известно, что в случае быстрогодействия оптимальное управление, найденное с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина [2], имеет именно такой вид.

Здесь  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$  — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в инерциальной системе координат  $X$  (ось  $\eta_1$  этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА, а ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты),  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  — символ кватернионного умножения;  $\varphi$  — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите);  $r$  — модуль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА;  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты,  $c$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  центра масс КА);  $u$  — проекция вектора ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА);  $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$  — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА);  $u_{start} \in \{-u_{max}, u_{max}\}$  — значение управления на



первом участке активного движения КА;  $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$  — искомые величины (длительности участков активного движения КА).

Отметим, что ввиду своей сложности задача о быстродействии другими авторами решалась редко (см. например, [3–6]). В основном минимизировались затраты рабочего тела или характеристическая скорость.

Кватернион  $\Lambda$  связан с кватернионом  $\lambda$  ориентации орбитальной системы координат соотношением

$$\Lambda = \lambda \circ \left( \cos \frac{\varphi}{2} - \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Величины  $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^0$  и  $\Lambda^*$  заданы (начальное и конечное значения кватерниона  $\Lambda$  могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты  $\Omega_u, I, \omega_\pi$  по известным формулам). Подлежат определению длительности участков активного движения КА.

Запишем уравнения нашей задачи в безразмерных переменных. Фазовые переменные  $\lambda_j$  являются безразмерными. Безразмерные модуль радиус-вектора  $r^b$  время  $t^b$  и управление  $u^b$  связаны с размерными переменными  $r, t$  и  $u$  соотношениями:  $r = Rr^b, t = Tt^b, u = u_{\max}u^b$ .

Здесь  $R$  — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА);  $T = R^2/c$  — характерное время. Система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид [7]:

$$\frac{d\lambda}{dt^b} = \frac{1}{2} \lambda \circ (Nr^b u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3), \quad \frac{d\varphi}{dt^b} = \frac{1}{(r^b)^2}, \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3)$$

Здесь  $N = u_{\max}R^3/c^2 = \text{const}$  — характерный безразмерный параметр задачи.

Ограничение по управлению в безразмерном виде есть

$$-1 \leq u^b \leq 1.$$

## 2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В [7, 8] поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. При этом двухточечная краевая задача решалась численно с помощью оригинального алгоритма, являющегося комбинацией методов Рунге – Кутты, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска [9]. Отметим, что в этой задаче отсутствуют формулы для нахождения неизвестных начальных значений сопряжённых переменных. Необходимо отметить также плохую сходимость начальных приближений для значений сопряжённых переменных к тем значениям, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где итерационные методы не дают хороших результатов. В настоящей статье к решению этой задачи применён генетический алгоритм. Данный способ нахождения оптимальных траекторий перелётов КА не требует знания начальных значений сопряжённых переменных. Отметим, что подобные методы, основанные на искусственном интеллекте и машинном обучении, рассмотрены, например в [10, 11]. Опишем основные этапы генетического алгоритма, следуя [12].

Далее будем рассматривать случай, когда орбита КА является круговой, при этом  $e = 0$ , а  $r^b = 1$ . Отметим, что орбиты спутниковых группировок ГЛОНАСС и GPS близки к круговым.



Вначале необходимо случайным образом сгенерировать популяцию из  $N_{\max}$  пробных решений (особей), каждое из которых представляет собой набор из  $M$  вещественных чисел. При этом вместо вещественного числа  $\Delta_k$  в памяти хранится целое число  $u_k^{int}$  (ген),  $0 \leq u_k^{int} \leq 2^L - 1$ . Связь между искомым вещественным числом и геном даётся формулой

$$\Delta_k = \frac{\Delta T_{\max}}{2^L - 1} \cdot u_k^{int},$$

где  $\Delta T_{\max}$  — заданная максимальная длительность активного участка движения КА.

На втором шаге алгоритма для каждой особи находится по известной формуле [13]:

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}) \circ \left( \cos \frac{\omega \Delta_k}{2} + \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega \Delta_k}{2} \omega_\eta \right), \quad (4)$$

$$\omega_\eta = N u_{start} (-1)^{k-1} \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \omega = |\omega_\eta| = \sqrt{N^2 + 1} = \text{const.}$$

значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат при  $t = t^* = t_M$  с начальными условиями (1) (управление задаётся выбранной хромосомой). В качестве значения функции приспособленности (целевой функции) берётся модуль левой части соотношения (2). Как известно, принцип естественного отбора заключается в том, что в конкурентной борьбе выживает наиболее приспособленная особь. В нашем случае, чем меньше значение целевой функции, тем более приспособленной является особь, т. е. пробное решение, использовавшееся в качестве аргумента целевой функции. Если на этом шаге для некоторой особи значение целевой функции меньше наперёд заданного малого числа  $\varepsilon$ , то выполнение алгоритма заканчивается, а управление, соответствующее данной особи, выдаётся в качестве решения задачи. Если же превышено максимальное число итераций  $N_{iter}^{\max}$ , то в качестве решения задачи выдаётся управление, соответствующее особи с минимальным значением целевой функции.

На третьем шаге алгоритма отбрасывается половина особей, имеющих наибольшие (худшие) значения целевой функции (предполагается, что количество особей  $N_{\max}$  является чётным). Затем производится скрещивание особи с наименьшим значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой. В качестве оператора скрещивания был выбран метод промежуточной рекомбинации [12]. Потомки создаются по следующему правилу:

$$\text{Потомок} = \text{Родитель1} + \alpha \cdot \text{Родитель2.}$$

Здесь  $\alpha$  — случайное число на отрезке  $[-0.25; 1.25]$ . Для каждого гена создаваемого потомка выбирается отдельный множитель  $\alpha$ . Полученные гены потомка округляются до ближайших целых чисел, лежащих на отрезке  $[0; 2^L - 1]$ . В результате получается новая популяция из  $N_{\max}$  особей.

На четвёртом шаге алгоритма вычисляется среднее значение целевой функции для популяции, полученной на третьем шаге. Если оно больше, чем среднее значение целевой функции, вычисленное на втором шаге, то производится мутация особей в популяции. Для этого гены всех особей записываются в двоичном виде (на каждый ген отводится ровно  $L$  бит) и с вероятностью  $p_{mut} \in (0; 1]$  производится инвертирование случайным образом выбранного бита каждого гена. Затем осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма.

Отметим, что описанный алгоритм необходимо применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых



необходимо выбрать то, которое соответствует переориентации орбиты за меньшее время.

### 3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для численного решения поставленной задачи с помощью описанного выше алгоритма была составлена программа на языке Python. Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [14]:

$$a_{or} = 25500000 \text{ м.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35.$$

вариант 1: начальное положение КА ( $\varphi_0 = 3.940323$  рад.):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= 0.679417, & \Lambda_1^0 &= -0.245862, & \Lambda_2^0 &= -0.539909, & \Lambda_3^0 &= -0.353860; \\ \lambda_0^0 &= 0.061834, & \lambda_1^0 &= -0.451574, & \lambda_2^0 &= 0.457446, & \lambda_3^0 &= 0.763545; \end{aligned}$$

конечное положение КА:

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = -0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

вариант 2: начальное положение КА ( $\varphi_0 = 3.940323$  рад.):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= -0.235019, & \Lambda_1^0 &= -0.144020, & \Lambda_2^0 &= 0.502258, & \Lambda_3^0 &= 0.819610; \\ \lambda_0^0 &= -0.663730, & \lambda_1^0 &= 0.518734, & \lambda_2^0 &= -0.062608, & \lambda_3^0 &= -0.535217; \end{aligned}$$

конечное положение КА:

$$\Lambda_0^* = -0.255650, \quad \Lambda_1^* = -0.162241, \quad \Lambda_2^* = 0.510674, \quad \Lambda_3^* = 0.804694.$$

Отметим, что в обоих вариантах отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов. Во втором варианте кватернион конечной ориентации орбиты КА соответствует ориентации орбиты одного из спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС.

Параметры генетического алгоритма полагались равными:

$$M = 3, \quad L = 40, \quad N_{\max} = 10000, \quad p_{mut} = 0.9, \quad \Delta T_{\max} = 4.0.$$

На рис. 1 приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА для варианта 1; на рис. 2 — для варианта 2.

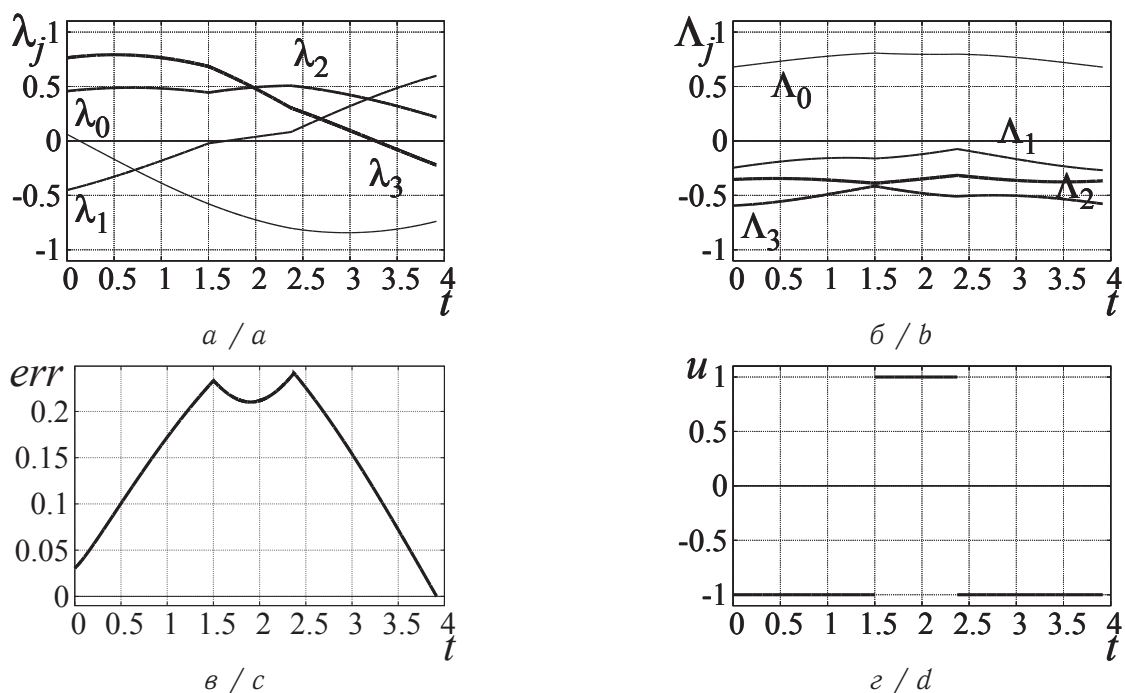


Рис. 1. Круговая орбита, вариант 1:  $a$  — компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат;  $b$  — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА;  $v$  — отклонение ориентации орбиты от требуемой;  $z$  — оптимальное управление

Fig. 1. Circular orbit, variant 1:  $a$  — components of the quaternion of orientation of the orbital coordinate system;  $b$  — components of the quaternion of the orbit orientation;  $c$  — deviation of the orientation of the orbit from the required one;  $d$  — optimal control

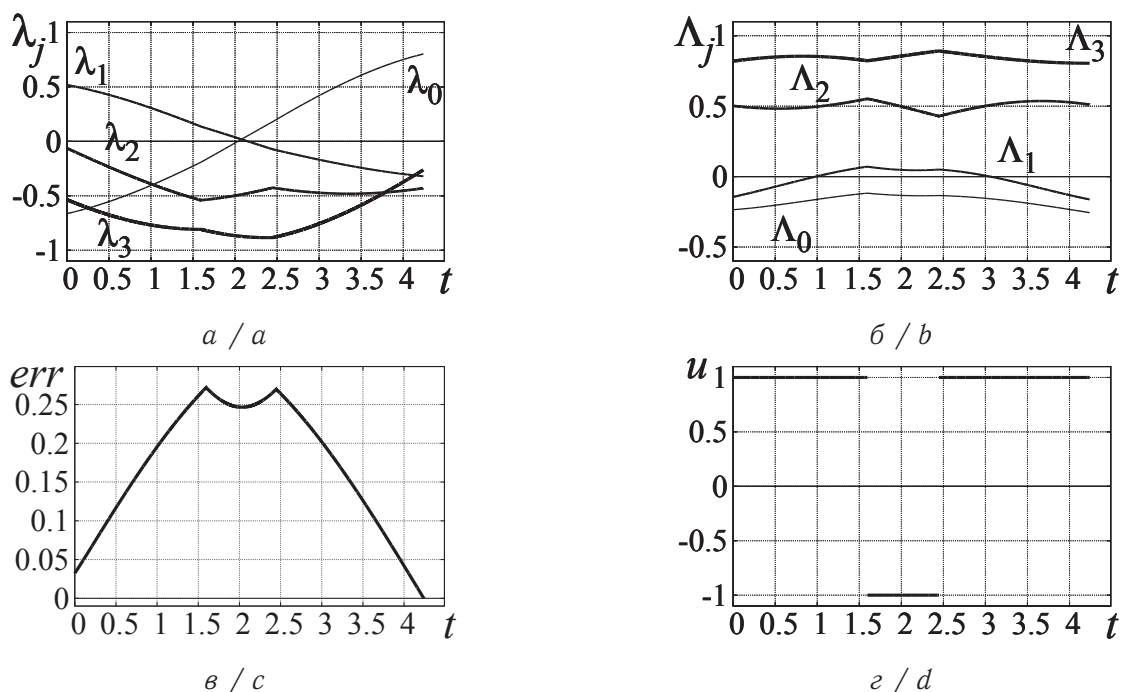


Рис. 2. Круговая орбита, вариант 2:  $a$  — компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат;  $b$  — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА;  $v$  — отклонение ориентации орбиты от требуемой;  $z$  — оптимальное управление

Fig. 2. Circular orbit, variant 2:  $a$  — components of the quaternion of orientation of the orbital coordinate system;  $b$  — components of the quaternion of the orbit orientation;  $c$  — deviation of the orientation of the orbit from the required one;  $d$  — optimal control



Здесь

$$err = err(t) = \left| \text{vect} \left[ \tilde{\lambda}(t) \circ \Lambda^* \circ \left( \cos \frac{\varphi_0 + t}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi_0 + t}{2} \right) \right] \right|.$$

В ходе численного решения задачи было установлено, что в обоих случаях при смене знака управления на первом участке активного движения КА длительность процесса переориентации орбиты КА увеличивается. Отметим, что использование аналитических формул (4) вместо численного интегрирования уравнений (3) методом Рунге – Кутты позволяет значительно ускорить работу алгоритма. При сохранении приемлемой длительности работы программы становится возможным на несколько порядков увеличить количество особей в популяции и быстрее найти решение задачи. Отметим также, что отклонения ориентации орбиты КА от требуемой в начале и конце второго участка активного движения КА близки друг к другу.

В дальнейшем предполагается модифицировать описанный в статье генетический алгоритм так, чтобы оптимальное количество участков активного движения КА определялось в ходе решения задачи.

### Библиографический список

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502–517.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
3. Кирпичников С. Н., Бобкова А. Н., Оськина Ю. В. Минимальные по времени импульсные перелеты между круговыми компланарными орбитами // Космические исследования. 1991. Т. 29, вып. 3. С. 367–374.
4. Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Петрикова Ю. Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. 2000. Т. 38, вып. 2. С. 171–192.
5. Kiforenko V. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields // Acta Astronautica. 2003. Vol. 52, № 8. P. 601–611. DOI: 10.1016/S0094-5765(02)00130-3.
6. Fazlzadeh S. A., Varzandian G. A. Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuvers using time-domain finite element method // Acta Astronautica. 2010. Vol. 66, № 3–4. P. 528–538. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.07.021.
7. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
8. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Численное исследование задачи переориентации орбиты космического аппарата с использованием орбитальной системы координат // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 132–136.
9. Муссеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
10. Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // Acta Astronautica. 2005. Vol. 57, № 2–8. P. 175–185. DOI: 10.1016/j.actaastro.2005.03.004.



11. Coverstone-Carrol V., Hartmann J. W., Mason W. J. Optimal multi-objective low-thrust spacecraft trajectories // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2000. Vol. 186, № 2–4. P. 387–402.
12. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы. Астрахань : Астраханский университет, 2007. 87 с.
13. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.
14. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // *Космические исследования*. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488–505.

---

**Образец для цитирования:**

Панкратов И. А. Расчёт наискорейших перелётов космического аппарата между круговыми орбитами // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 344–352. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-344-352.

---

## Calculating of the Fastest Spacecraft Flights between Circular Orbits

I. A. Pankratov

Ilya A. Pankratov, ORCID: 0000-0002-5325-9310, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya Str., Saratov, Russia, 410012, PankratovIA@info.sgu.ru

The problem of optimal reorientation of spacecraft orbit is considered in quaternion formulation. Control (jet thrust vector orthogonal to the plane of the orbit) is limited in magnitude. It is necessary to minimize the duration of the process of reorientation of the spacecraft orbit. To describe the motion of the spacecraft center of mass quaternion differential equations of the orientation of the orbital coordinate system was used. The actual special case of the problem, when the spacecraft's orbit is circular and control equals to its maximum (in modulus) value on adjacent parts of active spacecraft motion, was considered. Original genetic algorithm for finding the trajectories of spacecraft fastest flights is built. In this case the lengths of the active sections of the spacecraft motion are unknown. This method does not require any information about the unknown initial values of conjugate variables. The high speed of operation of the proposed genetic algorithm is achieved through the use of existing, in this case, a known analytical solution of equations of the problem. Examples of numerical solution of the problem for the case when the difference between the initial and final orientations of the spacecraft's orbit equals to a few degrees in angular measure, are given. The final orientation of the spacecraft's orbit corresponds to one of the satellites of Russian GLONASS orbital grouping. The graphs of components of the quaternion of orientation of the orbital coordinate system, the deviation of the current position of the spacecraft's orbit to the required and optimal control are drawn. Specific features and regularities of the process of optimum reorientation of the spacecraft's orbit are given.

*Key words:* spacecraft, orbit, optimization, gene.

### References

1. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: I. *Cosmic Research*, vol. 39, iss. 5, 2001, pp. 470–484. DOI: 10.1023/A:1012345213745.
2. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).





3. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N., Os'kina Yu. V. Minimal'nye po vremeni impul'snye perelety mezhdu krugovymi komplanarnymi orbitami [Minimum-time impulse transfers between coplanar circular orbits]. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], vol. 29, no 3, 1991, pp. 367–374 (in Russian).
4. Grigoriev K. G., Grigoriev I. S., Petrikova Yu. D. The fastest maneuvers of a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in a gravitational field in a vacuum. *Cosmic Research*, 2000, vol. 38, iss. 2, pp. 160–181.
5. Kiforenko B. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields. *Acta Astronautica*, 2003, vol. 52, no. 8, pp. 601–611. DOI: 10.1016/S0094-5765(02)00130-3.
6. Fazelzadeh S. A., Varzandian G. A. Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuvers using time-domain finite element method. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, no. 3–4, pp. 528–538. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.07.021.
7. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 84–92 (in Russian).
8. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Chislennoe issledovanie zadachi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata s ispol'zovaniem orbital'noi sistemy koordinat [Numerical study of the problem of reorientation of the spacecraft's orbit using the orbital coordinate system]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, iss. 14, pp. 132–136 (in Russian).
9. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971. 424 p. (in Russian).
10. Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol. *Acta Astronautica*, 2005, vol. 57, no. 2–8, pp. 175–185. DOI: 10.1016/j.actaastro.2005.03.004.
11. Coverstone-Carroll V., Hartmann J. W., Mason W. J. Optimal multi-objective low-thrust spacecraft trajectories. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000, vol. 186, no. 2–4, pp. 387–402.
12. Panchenko T. V. *Geneticheskie algoritmy* [Genetic algorithms]. Astrakhan, Publ. House „Astrakhan University“, 2007. 87 p. (in Russian).
13. Pankratov I. A., Chelnokov Yu. N. Analytical Solution of Differential Equations of Circular Spacecraft's Orbit Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 84–89 (in Russian).
14. Chelnokov Yu. N. The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravitational Field: III. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, iss. 5, pp. 460–477. DOI: 10.1023/A:1026098216710.

---

**Cite this article as:**

Pankratov I. A. Calculating of the Fastest Spacecraft Flights between Circular Orbits. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 3, pp. 344–352 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-3-344-352.

---