



УДК 517.938

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БИЛЬЯРДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

А. Н. Кириллов, Р. В. Алькин

Кириллов Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, ФИЦ Карельский научный центр РАН, Институт прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН (Петрозаводск), 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, Пушкинская, 11; Петрозаводский государственный университет, 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, пр. Ленина, 33, kirillov@krc.karelia.ru

Алькин Руслан Валерьевич, студент 5-го курса Петрозаводского государственного университета, 185910, Россия, Республика Карелия, Петрозаводск, Ленина, 33, ruslan5.ru@yandex.ru

Рассматривается проблема устойчивости периодических бильярдных траекторий в треугольниках. Под устойчивостью понимается сохранение периода и качественной структуры траектории (её комбинаторного типа) при достаточно малых изменениях треугольника. Для описания устойчивых траекторий вводятся различные виды развёрток: геометрические, алгебраические, веерные. На основе введённых развёрток предложен новый метод веерного кодирования, упрощающий исследование устойчивости периодических траекторий. Для классификации траекторий введены понятия эквивалентности кодов и комбинаторного типа траектории. Дано строгое определение устойчивой периодической траектории в треугольнике. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости веерного кода (теорема 1). С целью упрощения систематизации устойчивых периодических траекторий введено понятие «паттерн», позволяющее генерировать устойчивые коды (теорема 2). Предложен конструктивный метод построения устойчивых периодических траекторий (теорема 3). Приведены примеры применения введённых понятий к периодическим бильярдным траекториям, в частности в тупоугольном треугольнике. Предложенный аппарат применим как к остроугольным, так и тупоугольным треугольникам, что открывает возможность его использования для решения проблемы существования периодической бильярдной траектории в произвольном тупоугольном треугольнике. Введено новое понятие условной устойчивости периодической бильярдной траектории при специальном изменении треугольника.

Ключевые слова: математический бильярд, кодирование траекторий, устойчивость, паттерн, веерный код.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39

ВВЕДЕНИЕ

Нестрогое определение математического бильярда можно сформулировать следующим образом: бильярд в области $Q \subset \mathbb{R}^2$ — это динамическая система, порождённая прямолинейным движением точки в Q с постоянной по модулю скоростью (например, единичной). При попадании на кусочно-гладкую границу ∂Q точка отражается согласно закону: «угол падения равен углу отражения». Строгое, формальное, определение не просто [1], но для наших целей достаточно вышеприведённого определения.

Траектория движения — ломаная линия. Начальная точка $P_0 \in \partial Q$ и вектор начальной скорости \vec{V}_0 определяют траекторию. В настоящей работе Q — это треугольник. Полагаем, что при попадании траектории в вершину движение прекращается. Пусть \vec{V}_k — скорость частицы после k -го отражения в точке $P_k \in \partial Q$. Введём ориентацию границы ∂Q , в соответствии с которой выбирается начальное направление



траектории и угол, образованный вектором \vec{V}_0 со стороной. Отметим, что фазовым пространством бильярдной динамической системы является цилиндр $W = \partial Q \times [0, \pi]$. Здесь имеется в виду, что направление вектора скорости характеризуется углом, образуемым им со стороной треугольника и принимающим значение из отрезка $[0, \pi]$.

Определение 1. *Периодическая бильярдная траектория* — это бильярдная траектория, для которой существует $t \in \mathbb{N}$ такое, что $P_t = P_0$, $\vec{V}_t = \vec{V}_0$. Минимальное положительное t , удовлетворяющее определению, будем называть *периодом траектории с начальными данными* (P_0, \vec{V}_0) . При этом точка (P_0, \vec{V}_0) также будет называться периодической.

Для построения бильярдных траекторий в выпуклых многоугольниках используется метод отражений (или метод К. Г. Шварца [2]), состоящий в выпрямлении траектории в результате отражений многоугольника Q относительно сторон. В любом остроугольном треугольнике существуют периодические траектории, например, 3-звенная траектория, задаваемая высотным треугольником (результат Фаньяно [3]). Для тупоугольных треугольников вопрос о существовании периодических траекторий остаётся открытым. В [4] получены некоторые достаточные условия существования периодических траекторий, а в [5] показано, что в тупоугольных треугольниках с углом, меньшим 100° , существуют периодические траектории. В настоящей работе исследуется проблема устойчивости бильярдных траекторий в произвольном треугольнике.

Устойчивая периодическая бильярдная траектория — это такая траектория, которая при малом «шевелении» треугольника останется периодической с тем же периодом и порождённой ею развёрткой, полученной методом К. Г. Шварца [4]. В настоящей статье не рассматривается устойчивость по отношению к малым изменениям начальных данных, чему посвящены, например, работы [6, 7]. В работе [4] для исследования устойчивости траекторий (по отношению к изменению треугольника) вводится специальное кодирование. Оно заключается в присвоении определённых символов отражениям относительно разных сторон. Таким образом, развёртке однозначно соответствует слово из этих символов. Там же даётся критерий устойчивости траектории на языке этого кода. Кроме того, в работе [4] поставлена задача описания всех устойчивых периодических траекторий в произвольном треугольнике и представлены частные случаи решения этой задачи. Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию данной задачи. С этой целью вводится новый способ кодирования на основе понятия «веер развёртки».

1. КОДИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ

Введём ряд понятий, которые будут использоваться в дальнейшем.

Определение 2. *Геометрическая развёртка* для треугольника $\triangle ABC$ — это последовательность треугольников $\{\Delta_i\}$, полученных из $\triangle ABC$ в результате последовательных отражений относительно любых его сторон (AB, AC, BC) . При этом для любого i $\{\Delta_i \neq \Delta_{i+1}\}$.

Замечание 1. В геометрической развёртке треугольники могут накладываться друг на друга.

Обозначим отражения $\triangle ABC$ относительно его сторон AB, AC, BC через r_1, r_2, r_3 соответственно.



Определение 3. Алгебраическая развёртка, соответствующая геометрической, — это последовательность $\{r_{n_i}\}$, $n_i \in \{1, 2, 3\}$, $n_i \neq n_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Алгебраическую развёртку можно рассматривать как код траектории, которая используется в работе [4].

Определение 4. Геометрический C -веер — это такая максимальная подпоследовательность подряд идущих треугольников геометрической развёртки, что вершина C у всех треугольников общая. Назовём C центром веера.

Определение 5. Алгебраический C -веер — это максимальная подпоследовательность подряд идущих символов алгебраической развёртки вида $\{r_{n_i}\}$, где $n_i \in \{2, 3\}$, $n_i \neq n_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Алгебраический C -веер — это код геометрического C -веера.

Замечание 2. Аналогично можно ввести A - и B -вееры. Не умаляя общности, в дальнейшем считаем, что первое отражение есть r_1 . Кроме того, вееры будем нумеровать последовательными натуральными числами, начиная с 1.

Пример 1. Рассмотрим развёртку 12-звенной траектории (рис. 1, 2) $r_1 r_2 r_3 r_2 r_1 r_3 r_2 r_1 r_3 r_1 r_2 r_3$. Здесь присутствуют C -вееры: $\{r_2 r_3 r_2\}$, $\{r_3 r_2\}$, $\{r_3\}$, $\{r_2 r_3\}$.

Введём понятие знака алгебраического C -веера, $\text{sign } C$, в развёртке $\{r_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$. Припишем символу r_{n_i} какой-либо знак, «+» или «-», что для дальнейшего неважно, например, «+». Далее, знаки, приписываемые символам $r_{n_2}, r_{n_3}, \dots, r_{n_k}, \dots$ будем чередовать. Если в C -веере есть хотя бы один символ $r_{n_i} = r_2$, то $\text{sign } C = \text{sign } r_{n_i}$, если это не так, то обязательно есть единственный символ $r_{n_j} = r_3$, из которого состоит веер, и тогда $\text{sign } C = -\text{sign } r_{n_j}$. Отметим, что внутри одного веера знаки всех $r_{n_i} = r_2$ одинаковые.

Для пояснения смысла проделанной процедуры определения знака C -веера дадим геометрическую интерпретацию знака C -веера. При отражении относительно CB или CA высота CH , опущенная из вершины C на сторону AB , поворачивается, по или против часовой стрелки.

Будем считать, что при получении C -веера (при соответствующих отражениях) высота CH поворачивается в одном направлении. При этом угол поворота может оказаться больше, чем π . Знак этого направления можно ввести таким образом, что он будет совпадать со знаком C -веера, введённым выше формально. Покажем это.

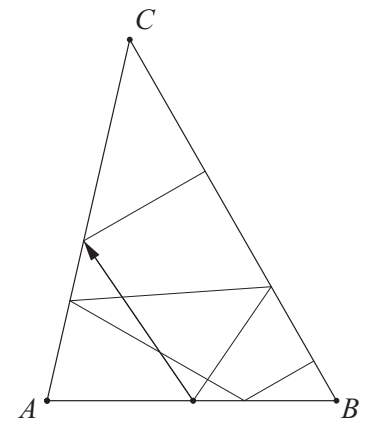


Рис. 1. 12-звенная траектория
Fig. 1. 12-linked trajectory

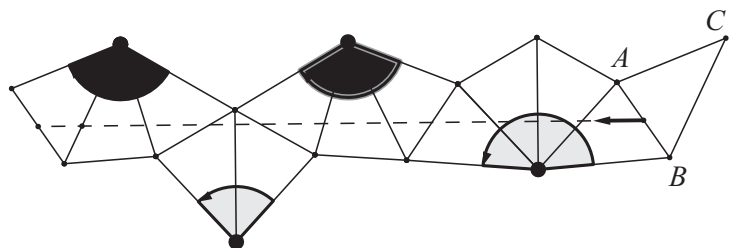


Рис. 2. Развёртка 12-звенной траектории. Разной заливкой выделены повороты в разном направлении
Fig. 2. The fan unfolding of a 12-linked trajectory. Turns in different directions are marked by different fillings



Рассмотрим некоторую геометрическую развёртку $\{\Delta_i\}$, где $\Delta_i = \Delta A_i B_i C_i$. Припишем треугольникам знаки согласно направлению поворота высоты $C_i H_i$, опущенной из C_i на $A_i B_i$ при отражении Δ_i относительно стороны $C_i A_i$. Противоположному направлению такого поворота припишем противоположный знак. Покажем, что эти знаки будут чередоваться.

Лемма 1. Пусть ΔABC имеет некоторый знак, например $+$ ($-$), тогда треугольники, полученные из ΔABC его отражением относительно AB , AC , BC , имеют противоположный знак, $+$ ($-$).

Доказательство. Рассмотрим отражение r_2 (относительно A). При таком отражении получим $\Delta AB'C$ и высоту CH' (образы ΔABC и CH). Если теперь отразить $\Delta AB'C$ относительно AC (обратное отражение), то высота CH' совершит поворот в направлении, противоположном направлению поворота высоты CH при первом отражении. Тогда, естественно, повороту CH' приписать знак « $-$ » (поворот CH имеет знак « $+$ »). Припишем в этом случае знак « $-$ » также и $\Delta AB'C$ (ΔABC имеет знак « $+$ »).

Случаи отражений r_1 , r_3 рассматриваются аналогично. \square

Пусть в алгебраической развёртке C -веер содержит символ r_2 . Тогда, как описано выше, припишем такому вееру знак этого символа. Так как знаки символов в алгебраической развёртке по определению чередуются и знаки треугольников в геометрической развёртке также чередуются, то знак перед r_{n_1} можно выбрать так, чтобы знак перед i -м символом совпадал со знаком Δ_i . Теперь знак веера, с одной стороны, есть знак поворота высоты внутри веера, а с другой, это знак поворота высоты при отражении r_2 внутри веера, что, очевидно, одно и то же.

Определение 6. C -код алгебраической развёртки — это последовательность $\{s_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Z}$, такая, что $|s_i| + 1$ — количество треугольников в i -м веере данной развёртки, а знак s_i — это знак i -го веера.

Аналогично можно ввести A - и B -коды.

Определение 7. Алгебраическая развёртка $\{r_{n_i}\}$, $n_i \in \{1, 2, 3\}$, называется *периодической*, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $r_{n_i+N} = r_{n_i}$ и $\text{sign}(r_{n_i+N}) = \text{sign}(r_{n_i})$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Наименьшее N , удовлетворяющее этому условию, называется периодом развёртки.

Замечание 3. Очевидно, если траектория периодична, то её алгебраическая развёртка также периодична. Заметим, что не любая последовательность $\{r_{n_i}\}$ является алгебраической развёрткой траектории. Это будет показано ниже с помощью понятия коридора.

Определение 8. C -код $\{s_i\}$ алгебраической развёртки называется *периодическим*, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $s_{i+k} = s_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Наименьшее k , удовлетворяющее этому условию, будем называть периодом кода.

Замечание 4. Поскольку k -периодический C -код определяется любым своим отрезком длины k , то в дальнейшем, говоря о C -коде, будем иметь в виду некоторый



такой отрезок. При этом выбор отрезка не существенен для дальнейших выводов. В связи с этим C -код — это последовательность $\{s_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Заметим, что период кода и период траектории могут отличаться.

Пример 2. На рис. 2 представлена развёртка 12-звенной периодической траектории, чей код имеет вид: $-3 + 2 - 1 + 2$. При получении кодировки развёртки надо выбрать вершину, образы которой при отражении будут являться центрами вееров. Будем кодировать так, чтобы первое отражение происходило по стороне, лежащей напротив этой вершины (этого можно добиться за счёт бесконечности и периодичности развёртки). Кроме того, эту развёртку можно закодировать и другими способами, взяв в качестве центра веера вершину A или B , тем самым получая A - или B -кодирование. Например так: $+2 - 2 - 2 + 2$.

Замечание 5. Легко заметить, что если $\{s_i\}_1^k$ есть C -код n -периодической бильярдной траектории, то $n = \sum_{i=1}^{i=k} |s_i| + k$.

Пусть $\Delta(\alpha, \beta)$ — треугольник с углами α при вершине A и β при вершине B .

Замечание 6. Если треугольник задан, то код бильярдной траектории позволяет найти конкретное направление \vec{V}_0 и множество $\{P_0\}$ периодической траектории, которая соответствует этому коду. Для характеристики того, что A -, B -, C -коды соответствуют одной периодической развёртке, введём понятие их эквивалентности. Для краткости будем A -, B -, C -коды называть кодами.

Определение 9. Коды эквивалентны, если соответствующие алгебраические развёртки могут быть получены одна из другой сдвигом на некоторое число символов r_{n_i} .

Определение 10. Комбинаторный тип траектории — это класс эквивалентности всех кодов этой траектории.

Определение 11. Периодическая бильярдная траектория Γ в треугольнике $\Delta(\alpha, \beta)$ называется устойчивой, если существуют $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что для всех α' , β' таких, что $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon_1$, $|\beta - \beta'| < \varepsilon_2$ в $\Delta(\alpha', \beta')$, существует периодическая траектория, имеющая комбинаторный тип траектории Γ .

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования n -периодической траектории данного комбинаторного типа, представленного C -кодом. Пусть $\Delta(\alpha, \beta) = \Delta ABC$ — исходный, $\Delta A'B'C'$ — полученный из ΔABC в результате n отражений. Назовём $\Delta A'B'C'$ параллельным ΔABC , если $\Delta A'B'C'$ является результатом параллельного сдвига ΔABC . Из метода развёртки Шварца легко получить необходимые и достаточные условия существования периодических бильярдных траекторий:

- 1) $\Delta A'B'C'$ параллелен ΔABC ;
- 2) существует непустой коридор, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя прямыми, параллельными прямым BB' и AA' , принадлежащая геометрической развёртке.

При изменении параметров α , β треугольника, но при сохранении комбинаторного типа траектории, условия 1 и 2 могут нарушаться.



На рис. 3 приведён пример 6-звенной 6-периодической устойчивой траектории в остроугольном треугольнике: при малом изменении углов треугольника (рис. 4) условие 1 и 2 существования периодической траектории не нарушаются. C -код этой траектории имеет вид $+2 - 2$.

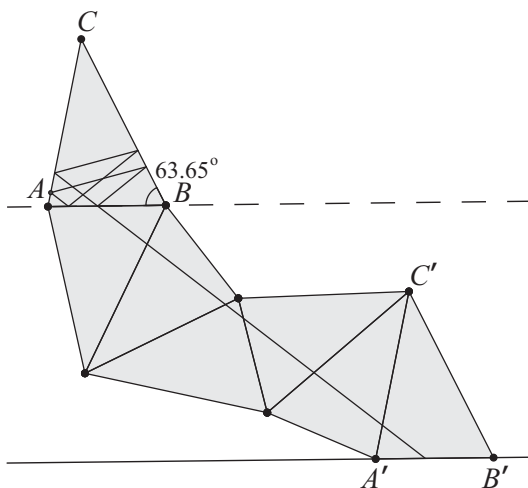


Рис. 3. Исходный треугольник, $\alpha = 78.12^\circ$, $\beta = 63.65^\circ$
 Fig. 3. Original triangle, $\alpha = 78.12^\circ$, $\beta = 63.65^\circ$

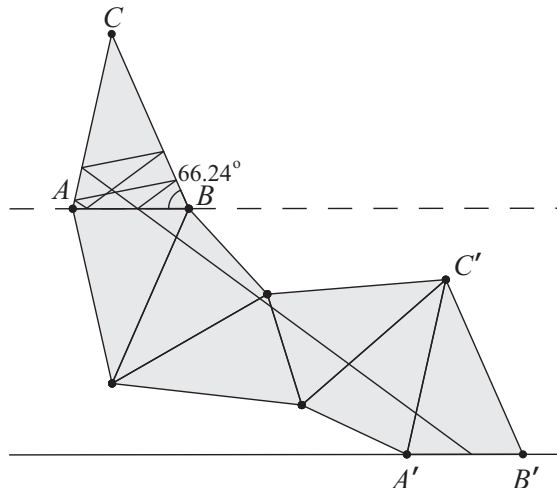


Рис. 4. Возмущённый треугольник, $\alpha = 73.19^\circ$, $\beta = 66.24^\circ$
 Fig. 4. The perturbed triangle, $\alpha = 73.19^\circ$, $\beta = 66.24^\circ$

На рис. 5 приведён пример 3-звенной (геометрически) 6-периодической неустойчивой траектории в прямоугольном треугольнике: при малом изменении углов треугольника (рис. 6) условие 1(см. выше) существования периодической траектории нарушается. C -код этой траектории имеет вид $+3 - 1$.

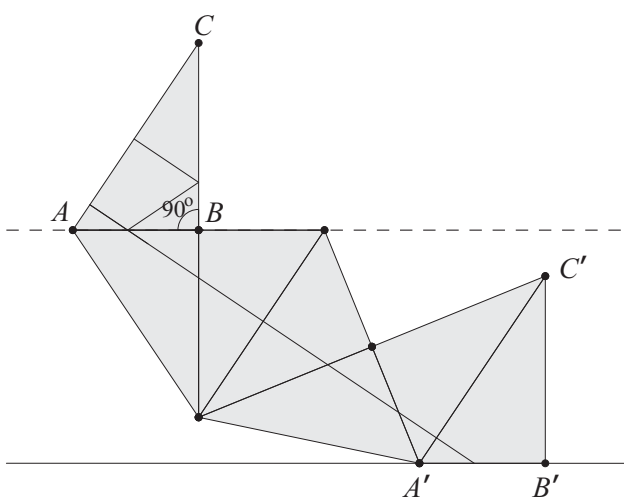


Рис. 5. Исходный прямоугольный треугольник, $\alpha = 56.08^\circ$, $\beta = 90.00^\circ$
 Fig. 5. Original rectangle triangle, $\alpha = 56.08^\circ$, $\beta = 90.00^\circ$

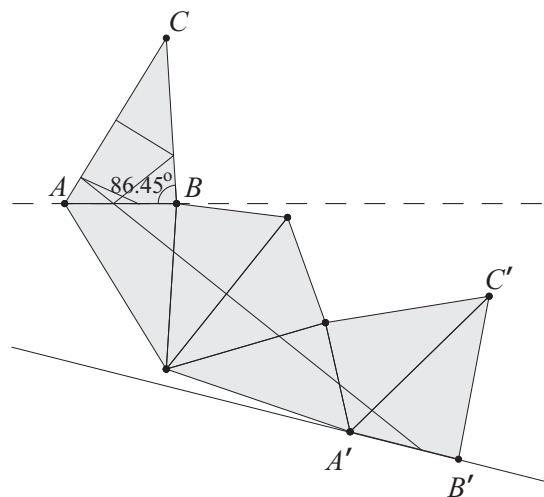


Рис. 6. Возмущённый треугольник, $\alpha = 58.45^\circ$, $\beta = 86.45^\circ$
 Fig. 6. The perturbed triangle, $\alpha = 58.45^\circ$, $\beta = 86.45^\circ$



Для изучения устойчивости траектории введём следующие определения.

Определение 12. Назовём код *устойчивым*, если произвольный треугольник переходит в параллельный себе согласно отражениям определяемым кодом.

Замечание 7. Заметим, что устойчивость кода влечёт за собой параллельность финального треугольника исходному, что в свою очередь влечёт устойчивость периодической траектории, поскольку малое шевеление треугольника сохранит непустоту коридора.

Сформулируем критерий устойчивости кода «на языке s_i ».

Пусть $s = \{s_i\}_{i=1}^k$ есть C -код n -периодической траектории с k веерами. Рассмотрим геометрическую развёртку $\{\Delta A_i B_i C_i\}_0^n$. Выше говорилось, что высота, опущенная из центра веера, в данном случае $C_i H_i$, поворачивается в веере в одном направлении. Нетрудно заметить, что углы её поворота чередуются и равны $\widehat{ca} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha)$ и $\widehat{cb} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \beta)$, т. е. это удвоенные углы, которые составляет высота H , опущенная из вершины C , со сторонами CA и CB соответственно. Не умаляя общности, будем считать, что первый поворот в первом веере происходит на угол \widehat{ca} . Для вычисления суммарного поворота вектора \vec{H} введём следующие величины. Вместо вектора \vec{H} будем рассматривать коллинеарный ему вектор $C_1 \vec{C}_0$.

1. $s' = \{s'_i\}_{i=1}^k$, $s'_i = \text{sign}(s_i) \cdot [\frac{|s_i|}{2}]$, где $[x]$ — целая часть x , т. е. s'_i — количество поворотов вектора $C_1 \vec{C}_0$ на угол $\widehat{ca} + \widehat{cb}$ в i -м веере, снабжённое знаком, указывающим направление поворота.
2. $s'' = \{s''_i\}_{i=1}^k$, $s''_i = \text{sign}(s_i) \cdot (|s_i| \bmod 2)$, т. е. $s''_i = +0(-0)$, если количество поворотов в веере i чётно (т. е. поворот вектора $C_1 \vec{C}_0$ представим в виде $t \cdot (\widehat{ca} + \widehat{cb})$, $t \in \mathbb{N}$), и $s''_i = +1(-1)$, если количество поворотов в веере i нечётно (т. е. поворот вектора $C_1 \vec{C}_0$ представим в виде $t \cdot (\widehat{ca} + \widehat{cb}) + \gamma$, $t \in \mathbb{N}$). Поворот на угол γ будем называть «дополнительным». Знак s''_i показывает направление «дополнительного» поворота.
3. «Дополнительный» угол есть угол \widehat{ca} или \widehat{cb} . Для определения угла нужно знать начальный угол поворота вектора $C_1 \vec{C}_0$ в данном веере (так как число поворотов нечётно, то можно считать, что первый поворот и есть «дополнительный»). Если в предыдущем, $(i - 1)$ -м веере, был поворот на угол \widehat{cb} , тогда в этом веере первый поворот — поворот на угол \widehat{ca} при условии, что в $(i - 1)$ -м веере число поворотов чётное. Угол также изменится, если в текущем веере поворот высоты происходит в противоположную (относительно поворотов в $(i - 1)$ -м веере) сторону. Если выполнены оба этих условия, то угол дважды изменится (т. е. в результате не изменится). Формально эти условия можно записать в виде

$$w_i = \begin{cases} w_{i-1} + (|s_{i-1} + 1| \bmod 2) + \max(-\text{sign}(s_i \cdot s_{i-1}), 0), & i > 0, \\ 1, & i = 0, \end{cases}$$

w_i — сумма двух величин: количества изменений знаков в наборе s_1, \dots, s_i и количества чётных чисел в наборе s_1, \dots, s_{i-1} .

4. $m_i = w_i \bmod 2$, т. е. $m_i = 1$, если «дополнительный» поворот в i -м веере (см. п.3) есть поворот на угол \widehat{ca} , $m_i = 1$.
5. $l_i = (w_i + 1) \bmod 2$, то есть $l_i = 1$, если «дополнительный» поворот в i веере (см. п.3) есть поворот на угол \widehat{cb} .
6. $m, l \in \mathbb{R}^k$ — векторы с компонентами m_i и l_i соответственно, $i = 1, \dots, k$.

Теорема 1. Код $s = \{s_i\}_{i=1}^k$ является устойчивым тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $\sum s'_i + m \cdot s'' = 0$ (суммарный поворот $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{ca} равен нулю);
- 2) $\sum s'_i + l \cdot s'' = 0$ (суммарный поворот $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{cb} равен нулю);
- 3) $k \bmod 2 = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть s — устойчивый код. Тогда согласно определению любой треугольник переводится в параллельный себе в соответствии с отражениями, заданными кодом. Поскольку Δ_n получен из Δ_0 параллельным сдвигом, то вектор $C_1\vec{C}_0$ переходит в сонаправленный (рис. 7). Следовательно, в силу устойчивости кода суммарный поворот вектора $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{ca} должен быть равен 0 и суммарный поворот вектора $C_1\vec{C}_0$ на угол \widehat{cb} также должен быть равен 0, что проверяется условиями 1 – 2. Если s_i чётное, то количество поворотов на угол \widehat{ca} равно количеству поворотов на угол \widehat{cb} в веере i или эти величины отличаются на 1 (см. величины m_i и l_i в 4, 5). Для обоснования 3) следует заметить, что на веерах с нечётными номерами конец вектора $C_1\vec{C}_0$ лежит вне веера.

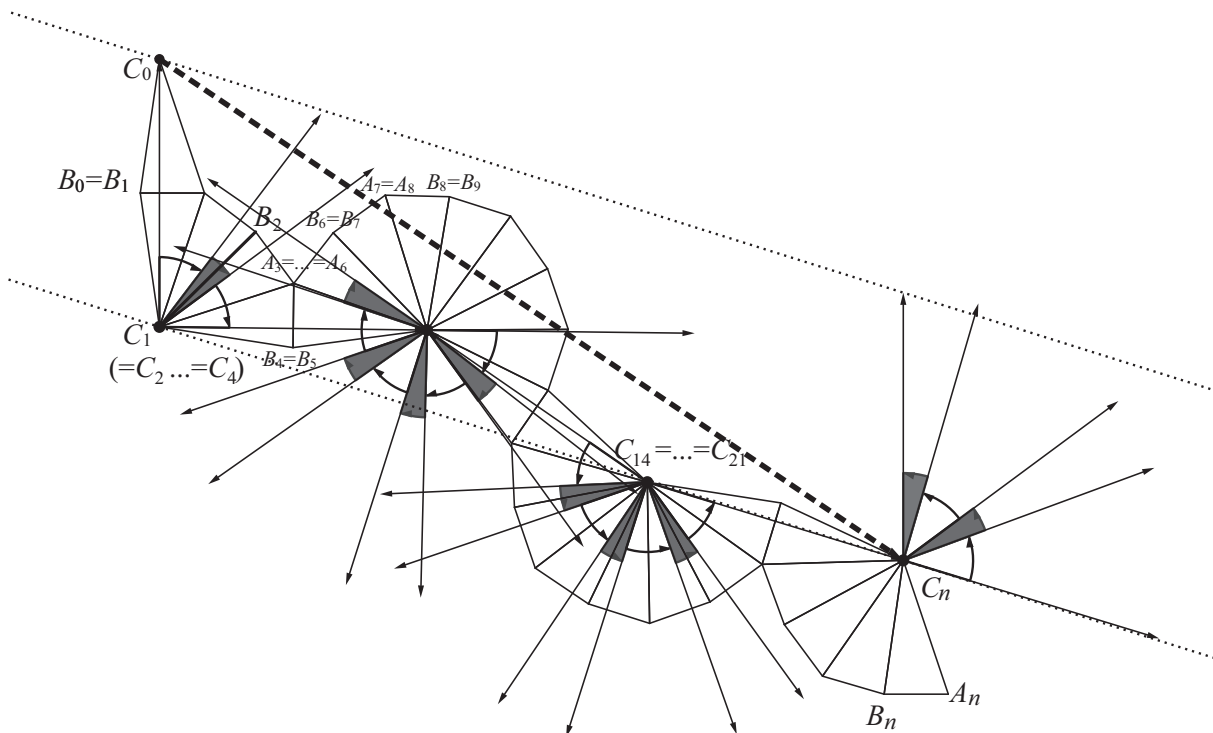


Рис. 7. Повороты вектора $C_1\vec{C}_0$ на углы \widehat{ca} (светлые углы) и на углы \widehat{cb} (тёмные углы). $C_0\vec{C}_n$ — направляющий вектор траектории(пунктир)

Fig. 7. Rotations of the vector $C_1\vec{C}_0$ to the angles \widehat{ca} (light angles) and to the angles \widehat{cb} (dark angles). $C_0\vec{C}_n$ is the direction vector of the trajectory (dotted line)



Достаточность. Пусть дан некоторый код s , обладающий свойствами 1)–3). Тогда аналогично доказанному выше Δ_n получен из Δ_0 параллельным сдвигом, а так как это верно для любых углов \widehat{ca} и \widehat{cb} , то код устойчивый. \square

2. ПАТТЕРНЫ

Введём средство классификации устойчивых кодов. Пусть $p = \{p_i\}_{i=1}^k$ есть последовательность целых чисел. Введём следующие величины, аналогичные введённым ранее (см. парагр. 1):

- 1) $p' = \{p'_i\}_{i=1}^k$, $p'_i = \text{sign}(p_i) \cdot \left\lfloor \frac{|p_i|}{2} \right\rfloor$, где $[x]$ — целая часть x ;
- 2) $p'' = \{p''_i\}_{i=1}^k$, $p''_i = \text{sign}(p_i) \cdot (|p_i| \bmod 2)$;
- 3) $w_i = \begin{cases} w_{i-1} + (|p_{i-1}| + 1 \bmod 2) + \max(-\text{sign}(p_i \cdot p_{i-1}), 0), & \text{если } i > 0, \\ 1 & i = 0; \end{cases}$
- 4) $m_i = w_i \bmod 2$;
- 5) $l_i = (w_i + 1) \bmod 2$;
- 6) $m, l \in \mathbb{R}^k$ — векторы с компонентами m_i и l_i соответственно, $i = 1, \dots, k$.

Определение 13. Паттерн устойчивой периодической бильярдной траектории — это упорядоченный набор $\{p_i\}_{i=1}^k$, где

- 1) $p_i \in \{+0, -0, +1, -1\}$;
- 2) $\sum_{i=1}^k m_i \cdot p'_i = \sum_{i=1}^k l_i \cdot p''_i$;
- 3) k — чётное натуральное число.

Введём две операции над элементом p_i паттерна:

- 1) $p_i \rightarrow p_i + 2 \cdot v$, если $p_i = +0$ или $p_i = +1$;
- 2) $p_i \rightarrow p_i - 2 \cdot v$, если $p_i = -0$ или $p_i = -1$, где $v \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Пусть $\{p_i\}_{i=1}^k$ — паттерн. Если после применения конечного числа операций 1 и 2 получится последовательность $p^* = \{p^*_i\}_{i=1}^k$ такая, что $\sum_{i=1}^k p^*_i = 0$ и для всех i $p^*_i \neq 0$, то p^* — устойчивый код, который будем называть кодом, порождённым паттерном p .

Доказательство. Полученная последовательность p^* удовлетворяет теореме 1 в силу определения паттерна. \square

Замечание 8. Очевидно, что для любого устойчивого кода, существует паттерн, его порождающий.

С помощью операций, введённых выше, можно перебрать все устойчивые коды, которые порождены фиксированным паттерном. Также отметим, что количество операций, необходимых для получения всех таких кодов, пропорционально количеству кодов.

Пример 3. Несложно показать перебором, что существует один паттерн длины 2, а именно $-0 + 0$, следовательно, для получения устойчивого кода бильярдной траектории можно взять любое чётное число d и получить код $-d, d$.

Паттерны — один из способов классификации кодов периодических траекторий. Можно ввести также другие дополнительные средства для разбиения кодов на классы, обладающие определёнными свойствами.



3. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Представим способ построения периодической n -звенной траектории в треугольнике $\triangle ABC = \triangle(\alpha, \beta)$ по её C -коду $\{s_i\}_{i=1}^k$, порождённому паттерном p . По коду можно построить ломаную, звенья которой есть отрезки, соединяющие центры вееров (рис. 8). Для этой ломаной известны углы между соседними звеньями. Для нахождения \vec{V}_0 , т. е. начального угла, образованного этим вектором со стороной AB , введём ортогональную систему координат, начало которой совпадает с основанием высоты H , ось OX сонаправлена с \vec{HB} , а ось OY с \vec{HC} . Пусть точка C имеет координаты $(0, 0.5)$. Обозначим через $\tilde{C}_i = (x_i, y_i)$ центр i -го веера, $i = 0, \dots, k$. При $i = 0$ под точкой C_0 понимаем точку C исходного треугольника (см. рис. 8 и 9).

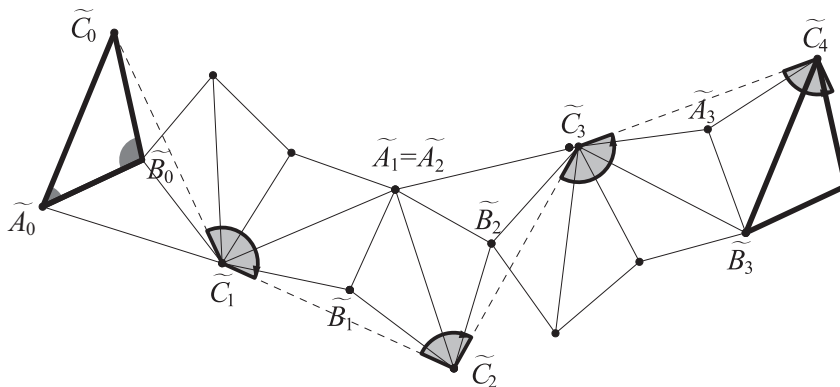


Рис. 8. Веерная развёртка для кода $\{+4, +1, -4, -1\}$ и треугольника $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$
 Fig. 8. A fan unfolding for the code $\{+4, +1, -4, -1\}$ and the triangle $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$

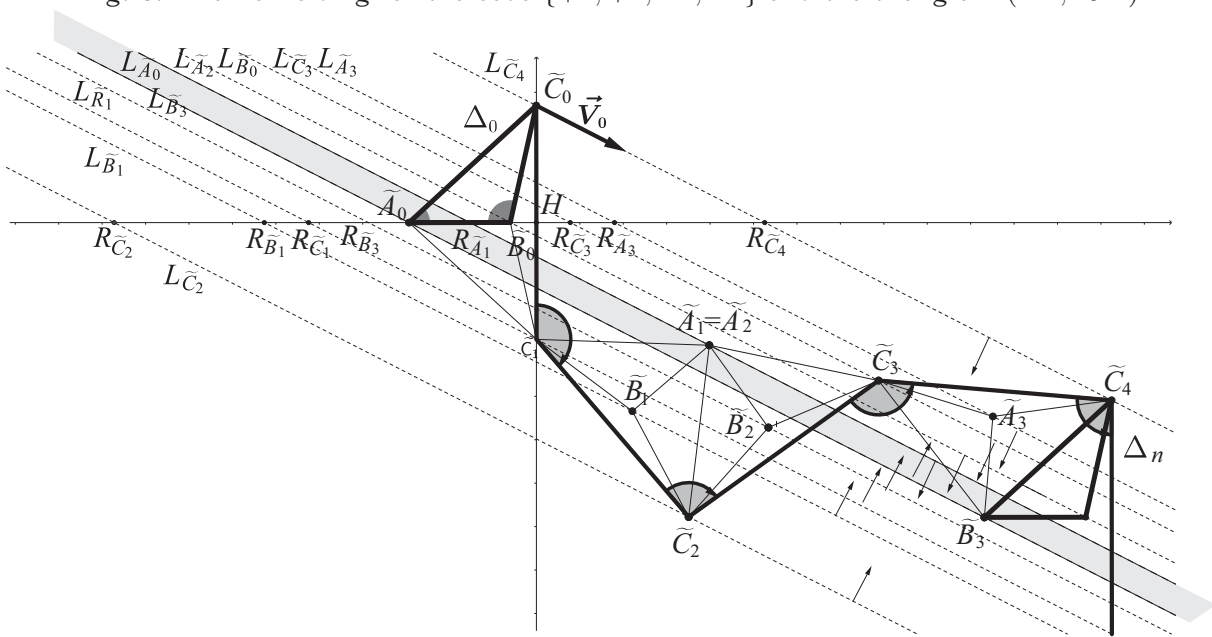


Рис. 9. Направляющий вектор \vec{V}_0 траектории и допустимый коридор для кода $\{+4, +1, -4, -1\}$ для треугольника $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$. Жирными линиями выделена ломаная, соединяющая центры вееров, а также Δ_0 и Δ_n . Стрелками указаны полуплоскости, содержащие коридор

Fig. 9. The direction vector \vec{V}_0 of the trajectory and the admissible corridor for the code $\{+4, +1, -4, -1\}$ for the triangle $\triangle(42^\circ, 102^\circ)$. Bold lines indicate a broken line connecting the centers of fans, as well as Δ_0 and Δ_n . The arrows indicate the half-planes containing the corridor



Составим уравнения, описывающие зависимость положения центра вееров от кода и треугольника:

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, 0.5), \\ (x_1, y_1) = (0, -0.5), \\ (x_i - x_{i+1}, y_i - y_{i+1}) = (x_{i-1} - x_i, y_{i-1} - y_i) \cdot W_i, \end{cases}$$

где W_i — матрица поворота:

$$W_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix},$$

$$\alpha_i = \begin{cases} s_i \cdot (\pi - \alpha - \beta), & p_i \in \{+0, -0\}, \\ (s_i - 1) \cdot (\pi - \alpha - \beta) + s'_i \cdot (m_i \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha) + l_i \cdot (\frac{\pi}{2} - \beta)), & p_i \in \{+1, -1\}. \end{cases}$$

В результате получаем однородную систему разностных уравнений второго порядка:

$$\tilde{C}_{i+1} + (W_i - E) \cdot \tilde{C}_i - W_i \cdot \tilde{C}_{i-1} = 0, \quad (1)$$

где E — единичная матрица. Направляющий вектор \vec{V}_0 сонаправлен с вектором $\tilde{C}_0 \tilde{C}_n$. Таким образом, для нахождения направления траектории достаточно найти \tilde{C}_n из (1). Теперь найдём начальную точку P_0 при фиксированном векторе \vec{V}_0 и начальный отрезок $LR \subset AB$ такой, что любая точка на этом отрезке может быть использована как P_0 для \vec{V}_0 . Отрезок LR является пересечением допустимого коридора с отрезком AB , который расположен на оси OX . Для нахождения LR будем строить коридор и пересекать его с осью OX . Из определения допустимого коридора следует, что это подмножество прямых t , направляющим вектором которых является вектор \vec{V}_0 . Определим условия, согласно которым некоторая прямая t принадлежит допустимому коридору.

Первое условие заключается в том, чтобы запретить «слишком» большие повороты в веере, для чего необходимо выполнение неравенства $\alpha_i - (\pi - \alpha - \beta) < \pi$.

Сформулируем *второе* условие. Пусть $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$ — образ стороны AB в геометрической развёртке, принадлежащий одновременно i -му и $(i + 1)$ -му веерам (см. рис. 9). Для того чтобы выразить координаты точек $\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^k$ и $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^k$ через $\{\tilde{C}_i\}_{i=0}^k$ и $\{p_i\}_{i=1}^k$ необходимо найти, по какую сторону от прямой $\tilde{C}_i \tilde{C}_{i+1}$ лежит $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$, а также найти координаты концов этого отрезка, используя серединный перпендикуляр к $\tilde{C}_i \tilde{C}_{i+1}$ и углы α, β (см. рис. 9). Проведём прямые с направляющим вектором \vec{V}_0 через точки \tilde{A}_i и \tilde{B}_i , точки пересечения этих прямых с осью OX обозначим $R_{\tilde{A}_i}$ и $R_{\tilde{B}_i}$ соответственно. Введём величину $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i}$. Пусть $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i} = 1$, если абсцисса точки $R_{\tilde{A}_i}$ меньше абсциссы точки $R_{\tilde{B}_i}$, и $I_{\tilde{A}_i, \tilde{B}_i} = 0$ в противном случае. Второе условие, которому должна удовлетворять прямая t , заключается в том, что t должна пересекать все отрезки $\tilde{A}_i \tilde{B}_i$. Ниже это условие будет формализовано.

Сформулируем *третье* условие. Проведём прямые $L_{\tilde{C}_i}$ с направляющим вектором \vec{V}_0 через точки \tilde{C}_i , точки пересечения этих прямых с осью OX обозначим $R_{\tilde{C}_i}$. Введём величину $I_{\tilde{C}_i}$, которая будет определять, по какую сторону от прямой $L_{\tilde{C}_i}$



находится коридор или прямая t , принадлежащая коридору. Заметим, что это имеет смысл только в том случае, если $\alpha_i > \pi$. Обозначим через $L'_{\tilde{C}_i}$ прямую с направляющим вектором \vec{V}_0 , проходящую через середину отрезка $(\tilde{C}_{i-1}\tilde{C}_{i+1})$. Пусть $I_{\tilde{C}_i} = 1$, если абсцисса точки пересечения прямой $L'_{\tilde{C}_i}$ с осью OX меньше абсциссы точки $R_{\tilde{C}_i}$, и $I_{\tilde{C}_i} = 0$ в противном случае. Третье условие, которому должна удовлетворять прямая t , заключается в том, что прямые t и $L'_{\tilde{C}_i}$ лежат по разные стороны от прямой $L_{\tilde{C}_i}$.

Запишем указанные выше условия для отрезка LR формально. Для краткости под точками будем понимать абсциссы этих точек. Несложно видеть, что

$$L = \max \begin{cases} \max\{R_{\tilde{A}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 1\}, \\ \max\{R_{\tilde{B}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 0\}, \\ \max\{R_{\tilde{C}_i} | I_{\tilde{C}_i} = 1, \alpha_i > \pi\}, \\ A, \end{cases} \quad R = \min \begin{cases} \min\{R_{\tilde{A}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 0\}, \\ \min\{R_{\tilde{B}_i} | I_{\tilde{A}_i}, \tilde{B}_i = 1\}, \\ \min\{R_{\tilde{C}_i} | I_{\tilde{C}_i} = 0, \alpha_i > \pi\}, \\ B. \end{cases}$$

Условие непустоты коридора запишется в виде

$$L < R. \tag{2}$$

Таким образом, совместность систем (1), (2) является необходимым и достаточным условием существования устойчивой периодической траектории в $\Delta(\alpha, \beta)$ с кодом, порождённым паттерном p . Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 3. *В треугольнике $\Delta(\alpha, \beta)$ существует периодическая устойчивая бильярдная траектория тогда и только тогда, когда найдётся паттерн p , для которого существует порождаемый им код, удовлетворяющий условию (2).*

Доказательство. Очевидно, по построению соответствующих величин. □

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Вспомним пример из предыдущего параграфа, а именно паттерн $-0 + 0$. Тогда при любом чётном d получаем код устойчивой $(2 + 2 \cdot d)$ -периодической бильярдной траектории. Вычислим начальный угол, который составляет начальный вектор со стороной AB . Проведём указанные выше операции и найдём, что для того чтобы построить n -звенную периодическую устойчивую траекторию, чей код имеет длину 2, начальный угол должен быть равен $(\pi - \alpha - \beta) \cdot (n - 2)/4$. В [8] это периодические траектории в треугольниках с малым углом. Применяя описанный выше метод, можно найти коридор. При этом интересно, что для нахождения L и R необходимо отразить вершины A и B относительно основания высоты H .

Рассмотрим код 12-звенной траектории $-2 + 2 + 2 - 2$. Можно показать, что начальный вектор перпендикулярен некоторому образу стороны B . Кроме того, для любого кода вида $(x \cdot (-2), x \cdot (+2), x \cdot (+2), x \cdot (-2))$ для всех $x \in \mathbb{Z}$ этот факт остаётся верным.

Приведём здесь пример интересного паттерна, который реализуется и в тупоугольных треугольниках: $-0 - 1 + 0 + 1$ (рис. 10).

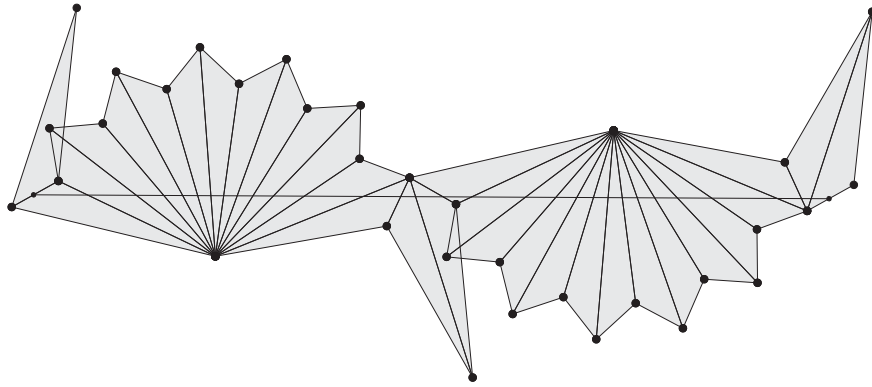


Рис. 10. Пример реализации паттерна $+0 + 1 - 0 - 1$ кодом $+12 + 1 - 12 - 1$

Fig. 10. An example of implementing the pattern $+0 + 1 - 0 - 1$ with the code $+12 + 1 - 12 - 1$

5. УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Введём понятие условной устойчивости периодических бильярдных траекторий.

Определение 14. *Условно устойчивой периодической бильярдной траекторией Γ в треугольнике с углами α и β называется периодическая бильярдная траектория такая, что существует отрезок $[D, F] \in \mathbb{R}^2$ такой, что точка $(\alpha, \beta) \in [D, F]$, и для любой точки $(\alpha', \beta') \in [D, F]$ в треугольнике с углами α', β' существует периодическая траектория, имеющая комбинаторный тип траектории Γ .*

Теорема 4. *Все периодические траектории условно устойчивы.*

Доказательство. Рассмотрим код периодической траектории $\{s\}$. Разобьём доказательство на 2 пункта (параллельность треугольника и коридор).

Пусть $\sum s'_i + m \cdot s'' = q_1$, $\sum s'_i + l \cdot s'' = q_2$. В силу периодичности траектории существует $z \in \mathbb{Z}$ такое, что $q_1 \cdot \widehat{ca} + q_2 \cdot \widehat{cb} = 2 \cdot z \cdot \pi$. Выражая \widehat{ca} и \widehat{cb} через α и β , получаем уравнение прямой в плоскости $\{(\alpha, \beta)\}$.

Так как траектория для некоторого треугольника периодична, то поскольку ширина коридора непрерывно зависит от (α, β) , найдётся отрезок $[D, F]$, принадлежащий полученной выше прямой. \square

Замечание 9. Несложно показать, что из условия $q_1 \cdot \widehat{ca} + q_2 \cdot \widehat{cb} = 2 \cdot z \cdot \pi$ следует рациональная зависимость углов \widehat{ca} , \widehat{cb} , а значит, и углов треугольника. Это наблюдение позволяет дать короткое доказательство частного случая (для треугольника) следующей теоремы из работы [4]: любая периодическая траектория в n -угольнике, углы которого рационально независимы, устойчива.

Теорема показывает, что в отличие от условной устойчивости решений дифференциальных уравнений для бильярдных траекторий нет неустойчивости без условной устойчивости.

Приведём примеры бильярдных траекторий, не являющихся устойчивыми, но являющихся условно устойчивыми. Рассмотрим C -код $+3 - 3$. Составив уравнение прямой из доказательства предыдущей теоремы, получаем, что $\alpha = \beta$. Таким образом,



только в равнобедренных треугольниках может быть такая траектория. В качестве другого примера возьмём код $+3 - 5$. Этот код возможен только для прямоугольных треугольников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введён новый математический аппарат, который позволяет существенно облегчить поиск устойчивых периодических траекторий в треугольниках и тем самым приблизиться к решению задачи нахождения всех периодических траекторий в треугольнике, поставленной в работе [4]. Предложена веерная кодировка, упрощающая исследование устойчивости траекторий (по сравнению с кодировкой в [4]), особенно для больших периодов. При этом геометрия траектории представляется более наглядно. Кодирование траекторий с помощью вееров позволяет объединять коды в классы, что обеспечивается понятием паттерна. Показано, что с помощью паттерна можно построить систему уравнений и неравенств для нахождения коридора. Сформулировано понятие условной устойчивости, позволяющее расширить класс устойчивых траекторий. При исследовании возникли следующие задачи:

- разработать алгоритм решения построенной системы неравенств и уравнений, имеющий полиномиальную сложность;
- определить количество паттернов длины k .

Библиографический список

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М. : Наука, 1980. 384 с.
2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. М. : Физматгиз, 1962. 263 с.
3. Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С. Замечания о задаче Фаньяно // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 382–387.
4. Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках : механизмы рождения // УМН. 1992. Т. 47, № 3. С. 9–74.
5. Schwartz R. E. Obtuse Triangular Billiards II : One Hundred Degrees Worth of Periodic Trajectories // Experimental Math. 2008. Vol. 18, iss. 2. P. 137–171. DOI: 10.1080/10586458.2009.10128891.
6. Козлов В. В. Задача об устойчивости двухзвенных траекторий многомерного бильярда Биркгофа // Тр. МИАН. 2011. Т. 273. С. 212–230.
7. Маркеев А. П. Об устойчивости двухзвенной траектории параболоидного бильярда Биркгофа // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 1. С. 75–90. DOI: 10.20537/nd1601005.
8. Кравцов В. М., Калакова Г. К. Геометрия бильярдных траекторий в многоугольниках. СПб. : ЕВРАЗИЯ, 2013. 304 с.

Образец для цитирования:

Кириллов А. Н., Алькин Р. В. Устойчивость периодических бильярдных траекторий в треугольнике // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 25–39. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39.



Stability of Periodic Billiard Trajectories in Triangle

A. N. Kirillov, R. V. Alkin

Aleksandr N. Kirillov, <https://orcid.org/0000-0002-3356-1846>, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research of the Russian Academy of Science, 11, Pushkinskaya Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910; Petrozavodsk State University, 33, Lenin Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910, kirillov@krc.karelia.ru

Ruslan V. Alkin, <https://orcid.org/0000-0002-8257-4520>, Petrozavodsk State University, 33, Lenina Str., Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia, 185910, ruslan5.ru@yandex.ru

The problem of stability of periodic billiard trajectories in triangles is considered. The notion of stability means the preservation of a period and qualitative structure of a trajectory (its combinatorial type) for sufficiently small variations of a triangle. The geometric, algebraic and fan unfoldings are introduced for stable trajectories description. The new method of fan coding, using these unfoldings, is proposed. This method permits to simplify the stability analysis. The notion of code equivalence and combinatorial type of a trajectory is proposed for trajectories classification. The rigorous definition of stable periodic trajectory in a triangle is formulated. The necessary and sufficient conditions of a fan code stability are obtained (Theorem 1). In order to simplify the stable periodic trajectories classification the notion of pattern, is introduced which permits us to generate the stable codes (Theorem 2). The method of stable periodic trajectories construction is proposed (Theorem 3). The introduced notions are illustrated by several examples, particularly for trajectories in obtuse triangles. The possibility of application of the developed instrument to obtuse triangles offers opportunities of its using to solve the problem of the existence of periodic billiard trajectories in obtuse triangles. A new notion of periodic billiard trajectory conditional stability, relating to some special variations, is introduced.

Key words: mathematical billiard, coding of trajectories, stability, pattern, fan code.

References

1. Cornfeld I. P., Fomin S. V., Sinai Y. G. *Ergodic Theory*. New York, Springer-Verlag, 1982. 491 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-6927-5. (Russ. ed.: Moscow, Nauka. 384 p.)
2. Rademacher H., Toeplitz O. *Von Zahlen und Figuren*. Berlin, Springer-Verlag, 1933. 173 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1962. 263 p.)
3. Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S. Zamechania o zadache Faniano *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 1, pp. 382–387 (in Russian).
4. Vorobets Ya. B., Gal'perin G. A., Stepin A. M. Periodic billiard trajectories in polygons : generating mechanisms *Russian Math. Surveys*, 1992, vol. 47, no. 3, pp. 5–80. DOI: 10.1070/RM1992v047n03ABEH000893.
5. Schwartz R. E. Obtuse Triangular Billiards II: One Hundred Degrees Worth of Periodic Trajectories *Experimental Math.*, 2009, vol. 18, iss. 2, pp. 137–171. DOI: 10.1080/10586458.2009.10128891.
6. Kozlov V. V. Problem of stability of two-link trajectories in a multidimensional Birkhoff billiard. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, pp. 196–213. DOI: 10.1134/S0081543811040092.
7. Markeev A. P. On the stability of the two-link trajectory of the parabolic Birkhoff billiards *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no 1, pp. 75–90. DOI: 10.20537/nd1601005.
8. Kravsov V. M., Kalakova G. K. *Geometrija billiardnih traektorij v mnogougolnikah* [Geometry of billiard trajectories in polygons]. Saint-Petersburg, EVRASIA, 2013. 304 p. (in Russian).

Cite this article as:

Kirillov A. N., Alkin R. V. Stability of Periodic Billiard Trajectories in Triangle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 25–39 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-25-39.