



To Chang Theorem

S. Yu. Antonov¹, A. V. Antonova²

¹Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

²Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y})$ and $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y})$, the sum of which is the Chang polynomial $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y})$ have been introduced in this paper. It has been proved by mathematical induction method that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the double Capelli polynomial of add degree $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ is also a consequence of the polynomial $S_m^-(\bar{x}, \bar{y})$. The minimal degree of the polynomial $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ in which it is a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The results obtained are the transfer of Chang's results over to the double Capelli polynomials of add degree.

Key words: T -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
2. Pierce R. *Associative Algebras*. New York, Springer-Verlag, 1982, 542 p.
3. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2012, iss. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
5. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang. *Commun. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 12, pp. 4333–4342.

УДК 517.518

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. С. Волосивец¹, Т. В. Лихачева²

¹Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

²Лихачева Татьяна Владимировна, старший специалист, филиал АО «Неофлекс Консалтинг» в г. Саратов, iofinat@mail.ru

В настоящей статье изучается приближение полиномами Виленкина в весовых пространствах L^p . Авторы доказывают результат типа Бутцера – Шерера об эквивалентности между порядком наилучшего приближения функции f и порядком возрастания обобщенных производных, а также аппроксимативными свойствами полинома наилучшего приближения $t_n(f)$. Даны некоторые приложения к приближению линейными средними рядов Фурье – Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, наилучшее приближение, обобщенная производная, средние Зигмунда – Рисса.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-251-258

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \leq p_j \leq N$ для всех $j \in \mathbb{N}$. По определению $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$, $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \quad (1)$$



Это разложение единственно, если для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, мы берем разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Каждое число $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть записано единственным образом в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}(p_j). \quad (2)$$

Если x и y представлены в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}(p_j)$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Для данного $x \in [0, 1)$ с разложением (1) and $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложением (2) полагаем $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, называемая мультипликативной, или системой Виленкина, является ортонормированной и полной в $L^1[0, 1]$ (см. [1, § 1.5]), причем при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_j^n := [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq m_n$. Множество всех I_j^n обозначим через Ω . Введем коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ формулой $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и частичные суммы Фурье равенством $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Положительная измеримая на $[0, 1)$ (т. е. весовая) функция $w(x)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p , если

$$\left(|I|^{-1} \int_I w(x) dx\right) \left(|I|^{-1} \int_I w^{-1/(p-1)}(x) dx\right)^{p-1} \leq C < \infty \quad (3)$$

для всех $I \in \Omega$ ($|I|$ означает меру Лебега множества I).

Через $L_w^p[0, 1)$, где $1 \leq p < \infty$ и $w(x)$ — весовая функция, обозначим банахово пространство измеримых на $[0, 1)$ функций с конечной нормой $\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p w(x) dx\right)^{1/p}$. Как обычно, $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$, $E_n(f)_{p,w} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,w} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. При $w(x) \equiv 1$ получаем классическое пространство $L^p[0, 1)$ с нормой $\|\cdot\|_p$. С помощью неравенства Гельдера легко показывается, что $L_w^p[0, 1) \subset L^1[0, 1)$ при $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Будем говорить, что существует \mathbf{P} -производная $f^{[r]}$ функции $f \in L_w^p[0, 1)$ порядка $r > 0$ (в $L_w^p[0, 1)$), если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j) \chi_j$ является рядом Фурье функции $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$. Это условие равносильно тому, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j) \chi_j$ сходится в $L_w^p[0, 1)$ к $f^{[r]}$ (см. [3]).

В работе [4] был установлен ряд теорем о приближениях по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_w^p[0, 1)$, являющихся аналогами результатов о приближении тригонометрическими полиномами в весовых пространствах (см. [5–7]).

Теорема А. 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и для $f \in L_w^p[0, 1)$ существует $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$. Тогда $E_n(f)_{p,w} \leq C n^{-r} \|f^{[r]}\|_{p,w}$.

2. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $t_n \in \mathcal{P}_n$. Тогда $\|t_n^{[r]}\|_{p,w} \leq C(p, w) \|t_n\|_{p,w}$.

Теорема В. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(2, p)$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $f \in L_w^p[0, 1)$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^\gamma(f)_{p,w}$, то существует $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$ и при этом

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C \left(n^r E_n(f)_{p,w} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^\gamma(f)_{p,w} \right)^{1/\gamma} \right).$$

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $W^r L_w^p[0, 1)$ состоит из функций $g \in L_w^p[0, 1)$, для которых существует $g^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$, с полунормой $\|g^{[r]}\|_{p,w}$. Рассмотрим K -функционал

$$K_r(f, t) = K_r(f, t, L_w^p[0, 1), W^r L_w^p[0, 1)) = \inf\{\|f - g\|_{p,w} + t \|g^{[r]}\|_{p,w} : g \in W^r L_w^p[0, 1)\}.$$



Обычный модуль непрерывности в $L^p[0, 1) = L^p_1[0, 1)$ вида $\omega^*(f, \delta) = \sup_{0 \leq h < \delta} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_{p,1}$ в весовом пространстве не является адекватной характеристикой функции из-за отсутствия инвариантности нормы $\|\cdot\|_{p,w}$ относительно обобщенного сдвига. Но с помощью величины $K_r(f, t, L^p_w[0, 1), W^r L^p_w[0, 1))$ можно записать аналоги классических теорем Д. Джексона и С. Н. Бернштейна (см. [8, § 5.1 и § 6.1]).

Теорема С (см. [4]). Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $\gamma = \min(p, 2)$. Тогда для всех $f \in L^p_w[0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$E_n(f)_{p,w} \leq CK_r(f, n^{-r})$$

и

$$K_r(f, n^{-r}) \leq Cn^{-r} \left(\sum_{k=1}^n [k^r E_k(f)_{p,w}]^\gamma k^{-1} \right)^{1/\gamma}.$$

Далее, пусть $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$ и $\omega(0) = 0$ (обозначение $\omega \in \Phi$). Если $f \in L^p_w[0, 1)$ и $K_r(f, n^{-r}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, то будем писать $f \in H^{\omega,r}_{p,w}$, при $r = 1$ будем писать $f \in H^{\omega}_{p,w}$.

Целью нашей работы является получение условий, эквивалентных соотношению $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, в терминах обобщенных производных, полиномов наилучшего приближения и K -функционала $K_r(f, t)$. Тригонометрический аналог этого результата см. в [9, теорема 2.2]. В невесовом случае для системы Уолша (частный случай системы $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ при $p_i \equiv 2$) см. [10, теорема 4.4]. Кроме того, даны приложения теорем А–С к приближениям линейными средними рядов Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ в пространстве $L^p_w[0, 1)$.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < r$, $f \in L^p_w[0, 1)$ и полином $t_n(f) \in \mathcal{P}_n$ таков, что $\|f - t_n(f)\|_{p,w} = E_n(f)_{p,w}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) существует $f^{[r]} \in L^p_w[0, 1)$ и $K_r(f^{[r]}, n^{-r}) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$;
- 3) для всех $s \in [0, r] \cap \mathbb{Z}$ существует $f^{[s]} \in L^p_w[0, 1)$ и справедливо соотношение

$$\|f^{[s]} - t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha}), \quad n \in \mathbb{N};$$

- 4) $\|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, где $s \in \mathbb{N}$, $s > r + \alpha$.

Если вместо $0 < \alpha < r$ потребовать $\alpha > 0$, то утверждения 1), 3) и 4) эквивалентны.

Доказательство. Установим 1) \Rightarrow 4). Пусть $m_k \leq n < m_{k+1}$ и $s > r + \alpha$. В силу части 2) теоремы А и условия 1) имеем:

$$\begin{aligned} \|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} &\leq \|t_n^{[s]}(f) - t_{m_k}^{[s]}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^k \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_1 \left(n^s \|t_n(f) - t_{m_k}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^k m_i^s \|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \right) \leq \\ &\leq 2C_1 \left(n^s E_{m_k}(f)_{p,w} + \sum_{i=1}^k m_i^s E_{m_{i-1}}(f)_{p,w} \right) \leq C_2 \left(n^s m_k^{-r-\alpha} + \sum_{i=1}^k m_i^s m_{i-1}^{-r-\alpha} \right) \leq C_3 n^{s-r-\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство вида

$$\|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leq \|t_{m_i}(f) - f\|_{p,w} + \|f - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leq 2E_{m_{i-1}}(f)_{p,w}, \quad (4)$$

ограниченность отношений n/m_k и m_i/m_{i-1} , а также хорошо известное соотношение $\sum_{i=1}^k m_i^\beta \leq C_4 m_k^\beta$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$.



Докажем, что 4) влечет 1). Пусть снова $m_k \leq n < m_{k+1}$. В силу полуаддитивности наилучшего приближения по функции находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f - t_{m_{k+1}}(f))_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w} = E_{m_{k+1}}(f)_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w}.$$

Записывая аналогичные неравенства

$$E_{m_{k+i-1}}(f)_{p,w} - E_{m_{k+i}}(f)_{p,w} \leq E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}$$

и складывая их по $i \geq 1$ с учетом того, что $\lim_{k \rightarrow \infty} E_{m_k}(f)_{p,w} = 0$, получаем:

$$E_{m_k}(f)_{p,w} \leq \sum_{i=1}^{\infty} E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}. \quad (5)$$

Согласно части 1) теоремы А и условию 4) для некоторого $s > r + \alpha$

$$E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w} \leq C_5 m_{k+i-1}^{-s} \|t_{m_{k+i}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq C_6 m_{k+i}^{-r-\alpha}.$$

Подставляя последнее неравенство в (5) и используя известное неравенство $\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{-\beta} \leq C_7 m_k^{-\beta}$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$, находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f)_{p,w} \leq C_8 m_k^{-r-\alpha} \leq C_9 n^{-r-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства импликации 3) \Rightarrow 1) сначала подставим в неравенство части 1) теоремы А функцию $f - t_n^*(f)$, где $t_n^*(f) \in \mathcal{P}_n$, $(t_n^*)^{[r]} = \varphi_n$ и $\varphi_n \in \mathcal{P}_n$ удовлетворяет равенству $\|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = E_n(f^{[r]})_{p,w}$, и получим

$$E_n(f)_{p,w} = E_n(f - t_n^*(f))_{p,w} \leq C_{10} n^{-r} \|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = C_{10} n^{-r} E_n(f^{[r]})_{p,w}. \quad (6)$$

Из условия 3) при $s = r$ следует, что $E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C_{11} n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому условие 1) вытекает из (6).

Установим, что 1) влечет 3). Пусть $s \in [1, r] \cap \mathbb{N}$. В силу неравенства (4) и части 2) теоремы А имеем при $l > k$:

$$\begin{aligned} \|t_{m_l}^{[s]}(f) - t_{m_k}^{[s]}(f)\|_{p,w} &\leq \sum_{i=k+1}^l \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_{12} \sum_{i=k+1}^l m_i^s E_{m_{i-1}}(f)_{p,w} \leq C_{13} \sum_{i=k+1}^l m_{i-1}^{s-r-\alpha} \leq C_{14} m_k^{s-r-\alpha}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает фундаментальность последовательности $\{t_{m_k}^{[s]}(f)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_w^p[0, 1)$ и сходимость этой последовательности к некоторой функции φ в $L_w^p[0, 1)$. Так как $t_{m_k}(f) \rightarrow f$ в $L_w^p[0, 1)$ и тем более в $L^1[0, 1)$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{t_{m_k}(f)}(n) = \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и аналогично $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{t_{m_k}^{[s]}(f)}(n) = \widehat{\varphi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Но $\widehat{t_{m_k}^{[s]}(f)}(n) = n^s \widehat{t_{m_k}(f)}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и поэтому $\widehat{\varphi}(n) = n^s \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. существует $f^{[s]} = \varphi \in L_w^p[0, 1)$. Далее, если $m_k \leq n < m_{k+1}$, то

$$\|t_n^{[s]}(f) - t_{m_{k+1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq C_{15} n^s E_n(f)_{p,w} \leq C_{16} n^{s-r-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n^{[s]}(f) - f^{[s]}\|_{p,w} = 0$. Теперь, используя снова (4) и часть 2) теоремы А, имеем:

$$\|t_n^{[s]}(f) - f^{[s]}\|_{p,w} \leq \|t_n^{[s]}(f) - t_{m_{k+1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq$$



$$\leq C_{17} \left(n^s n^{-r-\alpha} + \sum_{i=k+1}^{\infty} m_{i+1}^s m_i^{-r-\alpha} \right) \leq C_{18} n^{s-r-\alpha}.$$

При $s = 0$ условие 3) сразу следует из условия 1).

Докажем, что 1) \Rightarrow 2). Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} k^{-(r+\alpha)\gamma}$ сходится при $\alpha > 0$, по теореме В выводим существование $f^{[r]}$, причем

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C_{19} \left(n^{r-r-\alpha} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha\gamma-1} \right)^{1/\gamma} \right) \leq C_{20} n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь по теореме С находим, что

$$K_r(f^{[r]}, n^{-r}) \leq C_{21} n^{-r} \left(\sum_{k=1}^n (k^r k^{-\alpha})^\gamma k^{-1} \right)^{1/\gamma} \leq C_{22} n^{-r} n^{r-\alpha} = C_{22} n^{-\alpha}.$$

В последнем неравенстве необходимо, чтобы $(r - \alpha)\gamma - 1 > -1$, т. е. $r > \alpha$. Предыдущие утверждения верны и без этого ограничения. Обратное утверждение, 2) \Rightarrow 1), вытекает из (6) и первого неравенства теоремы С. Теорема доказана.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $f \in L_w^p[0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$ и $Z_n^r(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k^r/n^r) \hat{f}(k) \chi_k(x)$. Тогда $\|f - Z_n^r(f)\|_{p,w} \leq CK_r(f, n^{-r})$.

Доказательство. Известно, что при выполнении условий теоремы справедливо неравенство $\|S_n(f)\|_{p,w} \leq C_1 \|f\|_{p,w}$ (см. [3]), откуда стандартным образом выводится неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_{p,w} \leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p,w}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|f - Z_n^r(f)\|_{p,w} &\leq \|f - S_n(f)\|_{p,w} + \|S_n(f) - Z_n^r(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p,w} + n^{-r} \|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w} =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Из теоремы С вытекает оценка $I_1 \leq C_2 K_r(f, n^{-r})$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $g \in W^r L_w^p[0, 1)$ такова, что

$$K_r(f, n^{-r}) \geq \|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|g^{[r]}\|_{p,w} - \varepsilon.$$

Тогда в силу части 2) теоремы А и упомянутого выше результата из [3] выводим оценку

$$\begin{aligned} I_2 &= n^{-r} \|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w} \leq n^{-r} \|S_n^{[r]}(f - g)\|_{p,w} + n^{-r} \|S_n^{[r]}(g)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_3 n^{-r} n^r \|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|S_n(g^{[r]})\|_{p,w} \leq C_4 (\|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|g^{[r]}\|_{p,w}) \leq C_4 (K_r(f, n^{-r}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $I_2 \leq C_4 K_r(f, n^{-r})$. Объединяя оценки I_1 и I_2 , доказываем неравенство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $f \in L_w^p[0, 1)$ и $\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n S_k(f)/n$. Тогда

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{p,w} \leq CK_1(f, n^{-1}).$$

Следующие две теоремы являются весовыми аналогами результатов из [11]. Будем писать $\omega \in B_1$, если $\omega \in \Phi$ и справедливо неравенство $k\omega(k^{-1}) \leq C l\omega(l^{-1})$ при $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leq l$.

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $\omega \in B_1$ и $f \in H_{p,w}^\omega$ (т. е. $K_1(f, n^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$), $n \in \mathbb{N}$. Пусть двойная последовательность $\{a_{nk}\}_{n,k=1}^\infty$ удовлетворяет условиям

$$a_{nk} \geq 0, \quad a_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k > n, \quad \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \quad (7)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leq K a_{nn}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Тогда для линейных средних $T_n(f) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)$ верно неравенство

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В силу условия (7) имеем:

$$T_n(f) - f = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f) - \sum_{k=1}^n a_{nk} f = \sum_{k=1}^n a_{nk} (S_k(f) - f).$$

Применяя преобразование Абеля и следствие 1, находим, что

$$\begin{aligned} \|f - T_n(f)\|_{p,w} &= \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (a_{nk} - a_{n,k+1}) k (\sigma_k(f) - f) + n a_{nn} (\sigma_n(f) - f) \right\|_{p,w} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \|\sigma_k(f) - f\|_{p,w} + n a_{nn} \|\sigma_n(f) - f\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Используя условие $\omega \in B_1$ и неравенство (8), получаем $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C_2 n a_{nn} \omega(n^{-1})$. Теорема доказана.

Следствие 2. Если выполнены все условия теоремы 3, кроме (8), и последовательность $\{a_{nk}\}_{k=1}^n$ возрастает по k при фиксированном $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3. Если выполнены все условия теоремы 3 и, кроме того, последовательность $\{n a_{nn}\}_{n=1}^\infty$ ограничена, то

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3, кроме (8), которое заменено на

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq K a_{n,1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{n1} \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3 в силу неравенства (9) и условия $\omega \in B_1$ имеем:

$$\begin{aligned} \|f - T_n(f)\|_{p,w} &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right) \leq \\ &\leq C_2 (n a_{n,1} \omega(n^{-1}) + n a_{n,1} \omega(n^{-1})). \end{aligned} \quad (10)$$

Но благодаря (9) справедливо также неравенство $\sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \leq K a_{n,1}$, откуда $a_{nn} \leq (K+1) a_{n,1}$. Из последнего неравенства и (10) следует неравенство теоремы. Теорема доказана.



Следствие 4. Пусть выполнены все условия теоремы 4, кроме (9), и последовательность $\{a_{nk}\}_{k=1}^n$ убывает по k для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{n1} \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 5. Пусть выполнены все условия теоремы 4 и $n a_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 165. P. 207–226.
3. Young W. S. Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 340, № 1. P. 273–291.
4. Волосивец С. С. Приближение полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах L^p // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 82–93.
5. Ky N. X. On approximation by trigonometric polynomials in L^p_u -spaces // Studia Sci. Math. Hungar. 1993. Vol. 28. P. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights // Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1997. Vol. 40. P. 37–48.
7. Kokilashvili V., Yildirim Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2007. Vol. 143. P. 103–113.
8. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamanaky and S. B. Stečkin // Aequationes Math. 1969. Vol. 3. P. 170–185.
10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative // Analysis Math. 1975. Vol. 1, № 3. P. 171–196.
11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 3. P. 143–158.

Several Questions of Approximation by Polynomials with Respect to Multiplicative Systems in Weighted L^p Spaces

S. S. Volosivets¹, T. V. Likhacheva²

¹Volosivets Sergey Sergeevich, Saratov State University, 83, Astrahanskaya st., 410012, Saratov, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

²Likhacheva Tatiana Vladimirovna, Neoflex Consulting Company Branch in Saratov, 66, Atkarskaya st., 410078, Saratov, Russia, iofinat@mail.ru

In this paper we study approximation by Vilenkin polynomials in weighted L^p spaces. We prove the Butzer – Scherer type result on equivalence between the rate of best approximation of a function f and the growth of generalized derivatives and approximating properties of the best approximation polynomial $t_n(f)$. Some applications to the approximation by linear means of the Fourier – Vilenkin series are given.

Key words: Vilenkin system, best approximation, generalized derivative, Zygmund – Riesz means.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 165, pp. 207–226.
3. Young W. S. Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 340, no. 1, pp. 273–291.
4. Volosivets S. S. Approximation by polynomials with respect to multiplicative systems in weighted L^p spaces. *Siberian Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 82–93.
5. Ky N. X. On approximation by trigonometric



- polynomials in L_u^p -spaces. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1993, vol. 28, pp. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights. *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 1997, vol. 40, pp. 37–48.
 7. Kokilashvili V., Yildirim Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.
 8. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable*. New York, MacMillan, 1963.
 9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zemanosky and S. B. Stečkin. *Aequationes Math.*, 1969, vol. 3, pp. 170–185.
 10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, no. 3, pp. 171–196.
 11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.

УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С N -СВЯЗНОСТЬЮ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ вводится понятие N -связности ∇^N . Находятся условия, при которых N -связность совместима с почти контактной метрической структурой: $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N -связностью. С помощью N -связности находятся условия, при которых почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N -связность, связность Схоутена – ван Кампена, тензор кривизны N -связности, почти контактные кэлеровы пространства.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264

ВВЕДЕНИЕ

Начало теории метрически аффинных пространств — (псевдо) римановых многообразий, наделенных линейной связностью с ненулевым кручением — было положено Э. Картаном (E. Cartan) в 1922 г. [1]. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно (K. Yano) в работе [2]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом (S. Golab) [3]. В работе [4] определяется связность, специально приспособленная к решению задач неголономной геометрии и названная позже связностью Схоутена – ван Кампена. В. В. Вагнер [5] использует связность Схоутена – ван Кампена для построения теории кривизны неголономного многообразия коразмерности 1. Определяемая при этом связность Вагнера, как показано в настоящей работе, является связностью в векторном расслоении, естественным образом возникающем на неголономном многообразии. Мы вводим новый тип линейной связности с кручением, которая определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$. При надлежащем выборе эндоморфизма N построенная нами связность (названная в работе N -связностью) совпадает со связностью Вагнера.

Работа построена следующим образом. В параграфе 1 содержатся основные сведения о почти контактных метрических пространствах. В параграфе 2 дается определение N -связности. Находятся условия метричности N -связности. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N -связностью. В частности, показывается, что N -связность является более общей связностью, чем связность Схоутена – ван Кампена. Более подробные сведения о связности Схоутена – ван Кампена содержатся в работе [4]. В параграфе 3 находится выражение для тензора кривизны N -связности. В параграфе 4 N -связность рассматривается на многообразиях с почти контактной кэлеровой структурой и на многообразиях Кенмоцу.