



## ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия допустимой (почти) гиперкомплексной структуры и почти контактной гиперкэлеровой структуры. На многообразии  $M$  с почти контактной структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  определяется внутренняя симметричная связность  $\nabla$ . В случае контактного многообразия размерности, большей или равной пяти, доказывается, что обращение в нуль тензора кривизны связности  $\nabla$  эквивалентно существованию адаптированных систем координат, относительно которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. На распределении  $D$  почти контактной структуры как на тотальном пространстве векторного расслоения  $(D, \pi, M)$  определяется допустимая почти гиперкомплексная структура  $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ . При условии, что допустимая почти комплексная структура  $\varphi$  интегрируема, доказывается, что построенная почти гиперкомплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда распределение  $D$  является распределением нулевой кривизны. В случае сасакиевой структуры  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  находятся условия, при которых допустимая гиперкомплексная структура  $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \vec{g}, D)$  является почти контактной гиперкэлеровой структурой.

*Ключевые слова:* почти контактная метрическая структура, допустимая гиперкомплексная структура, почти контактная гиперкэлерова структура, распределение нулевой кривизны.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы Сасаки (S. Sasaki) [1], опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику  $g$ , заданную на гладком многообразии  $M$ , определяет риманову метрику  $g^S$  на его касательном расслоении  $TM$ . Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющему место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви – Чивита) касательного расслоения  $TTM$  многообразия  $TM$  в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения  $TM$ . Исследования Сасаки послужили началом целой серии работ, посвященных изучению метрики Сасаки  $g^S$  и почти комплексной структуры  $J$ , естественным образом возникающих на касательном  $TM$  и кокасательном  $T^*M$  расслоениях риманова многообразия  $(M, g)$  (см., например, [2, 3]). Свойства метрики Сасаки  $g^S$  и канонической почти комплексной структуры  $J$  зависят от особенностей исходной структуры риманова многообразия  $(M, g)$ . Так, например, каноническая почти комплексная структура  $J$  интегрируема тогда и только тогда, когда  $(M, g)$  — плоское риманово многообразие [4, 5]. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение  $D$  почти контактной метрической структуры  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ . Так же, как и расслоение  $TTM$ , касательное расслоение  $TD$  благодаря заданию связности над распределением [6, 7] (а затем и  $N$ -продолженной связности — связности в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$ ) разлагается в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [8, 9], на многообразии  $D$ , тем самым, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура.

Гиперкомплексная структура на гладком многообразии  $M$  представляет собой тройку интегрируемых почти комплексных структур  $(I, J, K)$ , удовлетворяющих соотношению  $IJ = -JI = K$ . При этом  $M$  называется гиперкомплексным многообразием. Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата (Obata) [10, 11]. В настоящее время активно изучаются гиперкомплексные структуры, определяемые на касательном расслоении  $TM$  эрмитова многообразия  $(M, g, J)$  (см., например, [12, 13]).

В настоящей работе определяется контактный аналог гиперкомплексной структуры — допустимая гиперкомплексная структура  $(M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, D)$ . Мы требуем, чтобы каждая допустимая структура  $[\varphi_i, i = 1, 2, 3]$  удовлетворяла условию  $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$  [7], замещающему условие интегрируемости почти комплексной структуры. В настоящей работе доказывается, что допустимая гиперкомплексная структура естественным образом возникает на распределении нулевой кривизны  $D$  почти контактной структуры  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ .



В последние годы на гладком многообразии  $M$  с почти контактной метрической структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  все чаще, наряду со связностью Леви – Чивита, исследуются как метрические, так и не метрические связности с кручением. В настоящей работе на почти контактном метрическом многообразии рассматривается связность  $\nabla_{\vec{x}}^N$ , называемая  $N$ -связностью, однозначно определяемая условиями

- 1)  $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$ ;
- 2)  $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ ;
- 3)  $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}, \vec{x} \in \Gamma(TM)$ ;
- 4)  $\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0, \vec{x} \in \Gamma(TM)$ ,

где  $S(\vec{x}, \vec{y})$  – кручение связности,  $N : D \rightarrow D$  – эндоморфизм распределения структуры.

$N$ -связность может быть отождествлена с парой  $(\nabla, N)$ , где  $\nabla$  – внутренняя связность [6], осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе  $N$ -связность используется для задания на распределении  $D$  допустимой гиперкэлеровой структуры.

Работа устроена следующим образом. В п. 2 на почти контактном (метрическом) многообразии  $M$  определяются внутренняя и  $N$ -продолженная связности. Устанавливается соответствие между классом  $N$ -продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с почти контактной (метрической) структурой. Доказывается, что в случае контактного многообразия размерности большей или равной пяти обращение в нуль тензора кривизны внутренней связности эквивалентно существованию адаптированных систем координат, для которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. В п. 3 на распределении  $D$  почти контактной структуры  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  как на тотальном пространстве векторного расслоения  $(D, \pi, M)$  определяется допустимая почти гиперкомплексная структура  $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ . Находятся условия, при которых полученная структура интегрируема. Отдельно рассматривается случай почти контактной метрической структуры  $(M, \xi, \eta, \varphi, g, D)$ .

## 1. ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Предположим, что на гладком многообразии  $M$  нечетной размерности  $n = 2m + 1, m \geq 1$ , задана почти контактная структура  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ , где  $\varphi$  – тензор типа  $(1, 1)$ , называемый структурным эндоморфизмом,  $\vec{\xi}$  и  $\eta$  – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой. В соответствии с определением почти контактной структуры выполняются следующие условия:

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \quad \eta(\vec{\xi}) = 1.$$

Мы требуем, чтобы  $\vec{\xi} \in \ker \omega$ , где  $\omega = d\eta$ . Почти контактная структура называется контактной, если  $r\ker \omega = 2m$ . Многообразии, наделенное (почти) контактной структурой, будем называть (почти) контактным многообразием. Почти контактное многообразие называется почти контактным метрическим многообразием, если  $M$  – (псевдо) риманово многообразие, метрический тензор  $g$  которого естественным образом [6] согласован с почти контактной структурой.

Кососимметрический тензор  $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$  называется фундаментальной формой почти контактной метрической структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство  $\Omega = d\eta$ . Пусть  $D$  – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой  $\eta, D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$  – его оснащение:  $TM = D \oplus D^\perp$ . В контактном случае вектор  $\vec{\xi}$  однозначно определяется из условий  $\eta(\vec{\xi}) = 1, \ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$ , и называется вектором Рибба. Будем называть  $D$  распределением почти контактной (метрической) структуры. В работе, в частности, рассматривается пространство (многообразие) Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ , где  $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi(\vec{x}, \varphi\vec{y})$  – тензор Нейенхайса эндоморфизма  $\varphi$ . Выполнение условия  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$  означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством. Если условие  $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$  заменено более слабым условием  $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$ , то соответствующее почти контактное (метрическое) многообразие будем называть почти нормальным, а структуру  $\varphi$  – интегрируемой или почти нормальной структурой.

Карту  $K(x^\alpha)$  ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n, a, b, c = 1, \dots, n - 1$ ) многообразия  $M$  будем называть адаптированной к распределению  $D$ , если  $\partial_n = \vec{\xi}$  [6]. Пусть  $P : TM \rightarrow D$  – проектор,



определяемый разложением  $TM = D \oplus D^\perp$ , и  $k(x^\alpha)$  — адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему  $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Неголономному полю базисов  $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$  соответствует поле кобазисов  $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$ . Непосредственно проверяется, что  $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$ . Условие  $\xi \in \ker \omega$  влечет справедливость равенства  $\partial_n \Gamma_a^n = 0$ . Пусть  $k(x^\alpha)$  и  $k'(x^{\alpha'})$  — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{\alpha'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'}).$$

Тензорное поле  $t$  типа  $(p, q)$ , заданное на почти контактном (метрическом) многообразии, назовем *допустимым* ( $\kappa$  *распределению*  $D$ ), если  $t$  обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются  $\xi$  или  $\eta$ . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_a^{a'} A_b^{b'} t_{b'}^{a'},$$

где  $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$ .

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные  $\partial_n t_b^a$  являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных  $\partial_n t_b^a$  не зависит от выбора адаптированных координат.

Под внутренней линейной связностью [6] на многообразии с почти контактной структурой понимается отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$ ;
- 2)  $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (\vec{x} f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$ ;
- 3)  $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z}$ ,

где  $\Gamma(D)$  — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения  $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$ . Из равенства  $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}_{a'}$ , где

$$A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}, \tag{1}$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^c + A_c^c \vec{e}_a A_b^{c'}. \tag{2}$$

Кручение внутренней линейной связности  $S$  по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем:

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Известно, что внутренняя линейная связность естественным образом возникает на почти контактном метрическом пространстве [6]. Если кручение внутренней связности равно нулю и  $\nabla g = 0$ , то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения  $(D, \pi, M)$ . Будем говорить, что над распределением  $D$  задана связность, если распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi : D \rightarrow M$  — естественная проекция,



раскладывается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ .

Введем на  $D$  структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте  $K(x^\alpha)$  на многообразии  $M$  сверхкарту  $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$  на многообразии  $D$ , где  $x^{n+a}$  — координаты допустимого вектора в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ . Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$  такого, что  $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$ , где  $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ . В случае, когда  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$ , связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть  $\nabla$  — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением  $HD$ , и  $N : D \rightarrow D$  — поле допустимого тензора типа  $(1, 1)$ .  $N$ -продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении  $(D, \pi, M)$ , определяемую разложением  $\widetilde{TD} = \widetilde{HD} \oplus VD$ , такую, что  $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$ , где  $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$ ,  $\vec{\varepsilon} = \partial_n$ ,  $\vec{x} \in D$ ,  $(N\vec{x})^v$  — вертикальный лифт. Относительно базиса  $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$  поле  $\vec{u}$  получает следующее координатное представление:  $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$ .

Всякому векторному полю  $\vec{x} \in \Gamma(TM)$ , заданному на многообразии  $M$ , обычным образом соответствует его горизонтальный лифт  $\vec{x}^h$ , при этом  $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$  тогда и только тогда, когда  $\vec{x}$  — допустимое векторное поле:  $\vec{x} \in \Gamma(D)$ .

Под кручением  $N$ -продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для  $N$ -продолженной связности:  $\nabla^N = (\nabla, N)$ , где  $\nabla$  — внутренняя связность.  $N$ -продолженную связность назовем метрической, если  $\nabla$  — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство

$$\nabla_{\vec{x}}^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0.$$

Пусть  $\nabla$  — внутренняя симметричная связность. Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где  $Q = I - P$ , названо Вагнером [14] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена мы иногда будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R_{abe}^c v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения  $D$ , а распределение  $D$ , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Из формул (1), (2) следует, что частные производные  $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$  являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем  $P(\vec{x}, \vec{y})$ .

Для  $K$ -контактных [6] пространств тензор кривизны внутренней связности наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных  $\partial_n g_{bc}$  в равенстве

$$\nabla_{[e} \nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea} \partial_n g_{bc} - g_{dc} R_{eab}^d - g_{bd} R_{eac}^d.$$

Векторные поля  $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$  определяют на  $D$  неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы  $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$  — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны  $N$ -продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \tag{5}$$



$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}, \quad (6)$$

где  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ .

Как следует из (5), (6), тензор кривизны  $N$ -продолженной связности полностью определяется допустимыми тензорными полями. Видимо, впервые  $N$ -продолженная связность для эндоморфизма  $N : D \rightarrow D$  специального вида получена в работе [14]. Координатное представление соответствующего эндоморфизма в контактном случае имеет следующий вид:

$$N_b^a = \frac{1}{4m} \omega^{cd} R_{cdb}^a.$$

Выбор эндоморфизма  $N : D \rightarrow D$  зависит от характера решаемой задачи.

**Теорема 1 (см. [9]).** *На многообразии с контактной метрической структурой существует  $N$ -продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

- 1)  $\vec{z}g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \nabla_{\vec{z}}\vec{y})$  (свойство метричности);
- 2)  $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}] = 0$  (отсутствие кручения);
- 3)  $N$  — симметрический оператор такой, что

$$g(N\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} L_{\vec{\xi}}g(\vec{x}, \vec{y}), \quad (7)$$

где  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$  — сечения распределения  $D$ .

Пусть  $\nabla^N$  —  $N$ -продолженная связность на многообразии с почти контактной метрической структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ . Поставим в соответствие связности  $\nabla^N$  линейную связность на многообразии  $M$ , обозначаемую тем же символом  $\nabla^N$  и удовлетворяющую следующим условиям:

- 1)  $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$ ,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$ ;
- 2)  $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$ ,  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ ;
- 3)  $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}$ ,  $\vec{x} \in \Gamma(TM)$ ;
- 4)  $\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0$ ,  $\vec{x} \in \Gamma(TM)$ ,

где  $S(\vec{x}, \vec{y})$  — тензор кручения связности  $\nabla_{\vec{x}}^N$ .

Имеет место

**Теорема 2.** *Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии  $M$ . Тогда на многообразии  $M$  существует единственная связность  $\nabla_{\vec{x}}^N$  такая, что выполняются следующие условия:*

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM); \quad (8)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D); \quad (9)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM); \quad (10)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM), \quad (11)$$

где  $N : D \rightarrow D$  — эндоморфизм распределения  $D$ .

**Доказательство** Из предположения существования связности докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  связности  $\nabla_{\vec{x}}^N$  в адаптированных координатах. Условия (8), (9) определяют коэффициенты  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$ . Из условий (10), (11) следует справедливость следующих равенств:  $\Gamma_{bn}^a = \Gamma_{an}^n = \Gamma_{nn}^a = \Gamma_{ab}^n = \Gamma_{nb}^n = \Gamma_{nn}^n = 0$ . Повторно используя условие (8), получаем, что  $\Gamma_{na}^b = N_a^b$ . Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности  $\nabla_{\vec{x}}^N$ , положив  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$ ,  $\Gamma_{na}^b = N_a^b$ . Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям (8)–(11). Теорема доказана.  $\square$

Следующее утверждение позволяет построить  $N$ -связность, используя связность Леви – Чивита.

**Теорема 3.** *Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$  — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии  $M$ . Тогда определяемая с помощью равенства*

$$\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$$

связность  $\nabla_{\vec{x}}^N$  совпадает с  $N$ -связностью с соответствующим эндоморфизмом  $N : D \rightarrow D$ .



**Доказательство** теоремы сводится к вычислению коэффициентов связности  $\nabla_{\vec{x}}^N$  в адаптированных координатах.

Используя равенства (5), (6), получаем выражение для тензора кривизны  $N$ -связности  $\nabla_{\vec{x}}^N$ :

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y}, \vec{z}) - (\nabla_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x}, \vec{z}) - (\nabla_{P\vec{x}}N)\vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM).$$

Назовем тензор кривизны  $N$ -связности, так же как и тензор кривизны соответствующей  $N$ -продолженной связности, обобщенным тензором кривизны Вагнера.

Задавая надлежащим образом эндоморфизм  $N : D \rightarrow D$ , получаем следующие специальные классы  $N$ -связностей для случая почти контактного метрического многообразия:

1. Связность Бежанку  $\nabla^B$  с нулевым эндоморфизмом  $N = 0$ . Бежанку (Bejancu) [15] определяет связность  $\nabla^B$  на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы  $\nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$ . В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами  $\Gamma_{\beta\gamma}^{B\alpha}$  связности  $\nabla^B$  являются  $\Gamma_{bc}^{Ba} = \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$ . В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как  $\nabla_n^B g_{ab} = \partial_n g_{ab}$ , то метричность связности Бежанку эквивалентна  $K$ -контактности контактной метрической структуры.  $N$ -связность  $\nabla^N$  на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом  $N : D \rightarrow D$  может быть определена с помощью равенства  $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$ .

2. Связность Танака – Вебстера  $\nabla^{TW}$  определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\nabla^{TW} \eta = 0$ ;
- 2)  $\nabla^{TW} \vec{\xi} = 0$ ;
- 3)  $\nabla^{TW} g = 0$ ;
- 4)  $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ ;
- 5)  $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x}), \vec{x} \in \Gamma(TM)$ .

Связность  $\nabla^{TW}$  является  $N$ -связностью для случая, когда  $N = C$ .

3. Связность Схоутена – ван Кампена  $\nabla^{Sk}$  определяется с помощью равенства [16]:  $\nabla_{\vec{x}}^{Sk} \vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^v)^v$ , где  $\vec{y}^h = P\vec{y}$ ,  $\vec{y}^h = P\vec{y}$ ,  $\vec{y}^v = Q\vec{y}$ . Непосредственно проверяется, что связность Схоутена – ван Кампена является  $N$ -связностью для случая, когда  $N = C - \varphi$ .

4. Совсем недавно было введено понятие  $\varphi$ -связности [17]. Для  $K$ -контактных метрических пространств  $\varphi$ -связность совпадает со связностью Схоутена – ван Кампена.

Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  – контактная структура, заданная на многообразии  $M$ . Предположим также, что на многообразии  $M$  определена внутренняя симметричная связность  $\nabla$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  – контактная структура, заданная на многообразии  $M$ ,  $\dim M \geq 5$ . Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства  $\Gamma_{bc}^a = 0$ .

**Доказательство.** Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Как показано в [14], обращение в нуль тензора Схоутена при наших предположениях влечет независимость коэффициентов связности  $\Gamma_{bc}^a$  от последней координаты:  $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a = 0$ . Покажем, что на многообразии  $M$  можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах:

$$\partial_a f^{b'} = A_a^{b'}, \quad \partial_a A_b^{c'} = \Gamma_{ab}^c A_c^{c'}. \tag{12}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S_{ab}^c A_c^{c'} = 0, \quad R_{abc}^d A_d^{d'} = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (12) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы.



**Теорема 5.** Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D)$  — контактная метрическая структура, заданная на многообразии  $M$ ,  $\dim M \geq 5$ . Обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда  $N = 0$  и существует постоянное допустимое векторное поле любого направления.

**Доказательство.** Предположим, что обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю. Из равенства (5) заключаем, что  $2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \vec{0}$ . В качестве следствия легко проверяемого тождества

$$R_{[abc]}^d = 0$$

получаем равенство  $N_a^b(m-1) = 0$ . Так как  $m > 1$ , то отсюда следует, что  $N = 0$ . Что, в свою очередь, влечет обращение в нуль тензора Схоутена. Оставшиеся рассуждения можно провести, опираясь на теорему 4.

## 2. ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим на гладком многообразии  $M$  размерности  $n = 4m + 1$  почти контактную структуру  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$ , где  $\varphi_1$  — допустимая почти комплексная структура. Предположим, что на многообразии  $M$  заданы еще две такие допустимые почти комплексные структуры  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , что  $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$ . Назовем многообразие  $M$ , наделенное структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , почти контактным, почти гиперкомплексным многообразием. Если каждая из почти комплексных структур  $\varphi_i$  интегрируема (почти нормальна), т. е. если  $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$ , то допустимую почти гиперкомплексную структуру  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$  будем называть интегрируемой или допустимой гиперкомплексной структурой, а многообразие  $M$  — почти контактным гиперкомплексным многообразием.

Рассмотрим модельный пример почти контактного гиперкомплексного многообразия. Пусть  $M = R^5$ ,  $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$ ,  $\vec{e}_2 = \partial_2$ ,  $\vec{e}_3 = \partial_3$ ,  $\vec{e}_4 = \partial_4$ ,  $\vec{\xi} = \partial_5$ ,  $\eta = dx^5 + x^2dx^1$ ,  $D = \ker \eta$ . Определим допустимые к распределению  $D$  почти комплексные структуры  $\varphi_i$  (таблица).

$\varphi_i \backslash \vec{e}_i$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$
$\varphi_1$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_2$
$\varphi_2$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_4$	$\vec{e}_3$
$\varphi_3$	$\vec{e}_4$	$-\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$

Из таблицы видно, что  $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$ . Непосредственно проверяется, что допустимые почти комплексные структуры  $\varphi_i$  являются почти нормальными.

Пусть  $D$  — распределение почти контактной структуры  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  с интегрируемым эндоморфизмом  $\varphi$ . Предположим, что над распределением  $D$  задана произвольная связность, т. е. распределение  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi : D \rightarrow M$  — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  — вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ . Таким образом, используя адаптированные координаты, получаем, что  $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$ , где  $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ . Пусть  $N : D \rightarrow D$  — эндоморфизм распределения  $D$ . Определим на распределении  $D$  допустимую почти гиперкомплексную структуру  $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ , полагая, что

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, & J(\vec{\varepsilon}_a) &= \partial_{n+a}, & J(\partial_{n+a}) &= -\vec{\varepsilon}_a, & J(\vec{u}) &= \vec{0}, \\ J_1 \vec{x}^h &= -(\varphi \vec{x})^h, & J_1 \vec{x}^v &= (\varphi \vec{x})^v, & J_1(\vec{u}) &= \vec{0}, & J_2 &= J_1 J, & \vec{x} &\in \Gamma(D). \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда связность над распределением определяется некоторой внутренней линейной связностью:  $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$  и эндоморфизм  $N : D \rightarrow D$  равен нулю.

**Теорема 6.** Пусть  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  — контактная почти нормальная структура, заданная на многообразии  $M$ ,  $\dim M \geq 5$ . Допустимая почти гиперкомплексная структура  $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$  является допустимой гиперкомплексной структурой тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена соответствующей внутренней связности равен нулю.



**Доказательство.** Найдем условия, при которых  $N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) + 2d\lambda(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) &= -R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) + 2d\lambda(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) &= 2\omega_{ba} \partial_n + R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e} - 2\omega_{ba} \partial_n = R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= 0, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) &= -x^{n+c} P_{ac}^b \partial_{n+b}. \end{aligned}$$

Таким образом, структура  $J$  интегрируема тогда и только тогда, когда  $R_{abc}^e = 0$ . Предположим, что тензор кривизны Схоутена равен нулю. Воспользовавшись теоремой 4, выберем такую систему координат, что  $\Gamma_{bc}^a = 0$ . В этом случае нетрудно заметить, что интегрируемость структур  $J_1, J_2$  эквивалентна интегрируемости структуры  $\varphi$ , что и доказывает теорему.

Пусть теперь  $M$  — почти контактное метрическое многообразие с допустимой гиперкомплексной структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$ . Пусть далее для всех  $i = 1, 2, 3$  выполняются равенства  $g(\varphi_i \vec{x}, \varphi_i \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$ ,  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$ . Назовем многообразие  $M$  почти контактным гиперкэлеровым многообразием, а структуру  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, g, D)$  — допустимой гиперкэлеровой структурой, если формы  $\Omega_i(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi_i \vec{y})$  замкнуты.

**Теорема 7.** Пусть  $M$  — многообразие Сасаки с распределением нулевой кривизны. Тогда структура  $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ , где  $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b)$ ,  $\tilde{g}(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_n, \partial_{n+b}) = 0$ , является допустимой гиперкэлеровой структурой.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение фундаментальные формы  $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y})$ ,  $\tilde{\Omega}_k(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J_k \vec{y})$ ,  $k = 1, 2$ . Покажем, что  $d\tilde{\Omega} = d\tilde{\Omega}_k = 0$ . Действительно, с одной стороны, равенство  $d\tilde{\Omega} = 0$  является следствием обращения в нуль тензора кривизны внутренней связности. С другой стороны, равенство  $d\tilde{\Omega}_k = 0$  эквивалентно равенству  $d\Omega = 0$ , где  $\Omega$  — фундаментальная форма сасакиевой структуры, что и доказывает теорему.  $\square$

### Библиографический список

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10. P. 338–354.
2. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle // J. Reine Angew. Math. 1962. Vol. 210. P. 73–88.
3. Munteanu M. I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold // Mediterr. J. Math. 2008. Vol. 5. P. 43–59.
4. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold // J. Reine Angew. Math. 1971. Vol. 250. P. 124–129.
5. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. Vol. 150, iss. 4. P. 1–19.
6. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
7. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 42–52.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Матем. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // Jap. J. Math. 1956. Vol. 26. P. 43–77.
11. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure // J. Math. Soc. Japan. 1957. Vol. 9. P. 406–416.
12. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles // Cent. Eur. J. Math. 2004. Vol. 2, iss. 5. P. 615–623.
13. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold // Balkan J. Geom. Appl. 2010. Vol. 15, iss. 1. P. 104–119.
14. Вагнер В. В. Геометрия  $(n - 1)$ -мерного негोलомного многообразия в  $n$ -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.





15. Bejancu A. Kahler contact distributions // *J. Geometry and Physics*. 2010. Vol. 60. P. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // *Math. Ann.* 1930. Vol. 103. P. 752–783.
17. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с  $\varphi$ -связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.

#### Образец для цитирования:

Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263–272. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

## Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds

S. V. Galaev

Galaev Sergei Vasil'evich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru

The notions of admissible (almost) hypercomplex structure and almost contact hyper-Kählerian structure are introduced. On a manifold  $M$  with an almost contact metric structure  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$  an interior symmetric connection  $\nabla$  is defined. In the case of a contact manifold of dimension bigger than or equal to five, it is proved that the curvature tensor of the connection  $\nabla$  is zero if and only if there exist adapted coordinate charts with respect to that the coefficients of the interior connection are zero. On the distribution  $D$  of an almost contact structure as on the total space of the vector bundle  $(D, \pi, M)$ , an admissible almost hypercomplex structure  $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$  is defined. Under the condition that the admissible almost complex structure  $\varphi$  is integrable, it is proved that the constructed almost hypercomplex structure is integrable if and only if the distribution  $D$  is a distribution of zero curvature. In the case of a Sasakian structure  $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ , the conditions that imply that the admissible hypercomplex structure  $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$  is an almost contact hyper-Kählerian structure.

*Key words:* almost contact metric structure, admissible hypercomplex structure, almost contact hyper-Kählerian structure, distribution of zero curvature.

#### References

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, 1958, vol. 10, pp. 338–354.
2. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle. *J. Reine Angew. Math.*, 1962, vol. 210, pp. 73–88.
3. Munteanu M. I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold. *Mediterr. J. Math.*, 2008, vol. 5, pp. 43–59.
4. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 1971, vol. 250, pp. 124–129.
5. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988, vol. 150, iss. 4, pp. 1–19.
6. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).
7. Galaev S. V. Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, iss. 8, pp. 42–52.
8. Galaev S. V. Almost contact metric spaces with  $N$ -connection. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by an  $N$ -prolonged connection. *Yakutian Math. J.*, 2015, iss. 1, pp. 25–34 (in Russian).
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. *Jap. J. Math.*, 1956, vol. 26, pp. 43–77.
11. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure. *J. Math. Soc. Japan*, 1957, vol. 9, pp. 406–416.
12. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles. *Cent. Eur. J. Math.*, 2004, vol. 2, iss. 5, pp. 615–623.
13. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold. *Balkan J. Geom. Appl.*, 2010, vol. 15, iss. 1, pp. 104–119.
14. Vagner V. V. The geometry of an  $(n - 1)$ -dimensional nonholonomic manifold in an  $n$ -dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
15. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geome-*



- try and Physics, 2010, vol. 60, pp. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
17. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces  $\varphi$ -connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).

**Please cite this article in press as:**

Galaev S. V. Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

УДК 517.977

## ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова<sup>1</sup>, А. Г. Кремлёв<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, giv001@mail.ru

<sup>2</sup>Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, kremlev001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. При реализации метода используются результаты исследований [1–5] также аппарат выпуклого анализа [6]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром  $\mu > 0$ ) с запаздыванием  $h > 0$  (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$