If ω is a modulus of continuity on $[0,\pi]$ such that $\delta\int_\delta^\pi t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $1<p<\infty$ and $f\in C_p$ satisfies two properties 1) $\omega_2(f,t)_{C_p}\leqslant C\omega(t)$; 2)$\int_{2\pi/(n+1)}^\pi t^{-1}\|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+2\pi/(n+1)\|_{C_p}\,dt = O(\omega(1/n))$, where $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, then $\|e_n^1(f)-f\|_{C_p}\leqslant C\omega(1/n)$, $n\in\mathbb{N}$. Some applications to the approximation in Hölder type metrics are given.

Key words: functions of bounded p-variation, p-absolutely continuous functions, Euler means, best approximation, modulus of continuity.

References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded p-variation. *I*zv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
3. Hardy G. H. *D*ivergent series. Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
4. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, New York, MacMillan, 1963.
5. Golubov B. I. On the best approximation of p-absolutely continuous functions. *Some Questions of Function Theory and Functional Analysis*, vol. 4, Tbilisi, Izd. Tbilisi Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions. *Analysis Math.*, 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
8. Tyuleneva A.A. Approximation of bounded p-variation periodic functions by generalized Abel-Poisson means and logarithmic means. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pt. 1, pp. 25–32 (in Russian).
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means. *J.* Approxim. Theory, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 24–38.
10. Rempulska l., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases *P*roc. of A. Razmadze Math. Institute, 2006, vol. 140, pp. 141–153.

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

А. А. Хромов[1], Г. В. Хромова[2]

[1]Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru
[2]Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи об определении плотности тепловых источников в стержне, в котором установилась стационарная температура, если эта температура задана приближенно. В математической постановке это задача нахождения равномерных приближений к правой части обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда заданы равномерное приближение к решению и величина погрешности. На базе так называемого разрывного оператора Стеклова сначала строятся семейства операторов, дающих устойчивые равномерные приближения к функции и ее производным 1 и 2 порядков, а затем на их основе — метод решения поставленной задачи. На некотором классе решений приводится оценка погрешностей приближенного решения.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Стеклова, регуляризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l, в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.

Обозначим: $u(x) \in C^2[0,l]$ — температура в сечении с абсциссой x, $f(x)$ — плотность тепловых источников, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $q(x)$ — коэффициент теплообмена. Считаем, что $k(x) \in C^1[0,l]$, $q(x) \in C[0,l]$ — известные функции.

Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$ в случае, когда $u(x)$ задана нам приближенно, т. е. вместо $u(x)$ известна $u_\delta(x)$ такая, что $\|u_\delta - u\|_{C[0,l]} \leqslant \delta$.

В математической постановке эта задача сводится к определению правой части уравнения

$$k(x)u''(x) + k'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x),$$

где $u(0) = u(l) = 0$, по известной $u(x)$.

Если $u(x)$ — точная температура, то $f(x)$ находится тривиально. Если же $u(x)$ задана приближенно, то в силу неустойчивости операции дифференцирования для нахождения приближений к $f(x)$ требуется привлечение методов регуляризации [1].

В [2] применялась регуляризация с помощью разностных формул численного дифференцирования. При этом приближенное решение получалось на внутренних из $[0,l]$ отрезках, границы которых должны быть увязаны с шагом разностных формул.

В данной работе этот недостаток устраняется: получены равномерные приближения к $f(x)$ на всем отрезке с помощью семейств интегральных операторов с разрывными ядрами.

1. Рассмотрим сначала семейство операторов:

$$T_\alpha u = \begin{cases} T_{\alpha 2}u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

где

$$T_{\alpha 1}u = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha} u(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)dt\right], \qquad T_{\alpha 2}u = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x}^{x+\alpha} u(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} u(t)dt\right]. \tag{1}$$

Согласно [3] $T_{\alpha 1}u \equiv DS^2_{\alpha 1}u$, $T_{\alpha 2}u = DS^2_{\alpha 2}u$, где $S_{\alpha 1}u = \dfrac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\,dt$, $S_{\alpha 2}u = \dfrac{1}{\alpha}\int\limits_{x}^{x+\alpha} u(t)\,dt$, D — оператор дифференцирования.

В [3] показано, что

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha \to 0 \tag{2}$$

для любой $u(x) \in C^1[0,l]$ (в [3] $l = 1$). Здесь

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,l/2]}, \|\cdot\|_{C[l/2,l]}\}. \tag{3}$$

Теперь на базе операторов T_α построим семейство операторов:

$$T^{(2)}_\alpha u = \begin{cases} T^{(2)}_{\alpha 2}u, & x \in [0, l/2], \\ T^{(2)}_{\alpha 1}u, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для любой $u(x) \in C^2[0,l]$ выполняется сходимость:*

$$\|T^2_\alpha u - u''\|_{L_\infty[0,1]} \to 0, \qquad \text{\textit{при}} \qquad \alpha \to 0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$T^{(2)}_\alpha = S^{(4)}_\alpha, \tag{4}$$

где

$$S^{(4)}_\alpha = \begin{cases} S^4_{\alpha 2}, & x \in [0, l/2], \\ S^4_{\alpha 1}, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Действительно, из очевидного равенства $DS_{\alpha j}u = S_{\alpha j}Du$, $j = 1, 2$, вытекает:

$$DS^2_{\alpha j}u = DS_{\alpha j}(S_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}DS_{\alpha j}u = S^2_{\alpha j}Du,$$

т. е. $T_{\alpha j}u = S^2_{\alpha j}Du$, а отсюда следует:

$$T^2_{\alpha j}u = T_{\alpha j}(T_{\alpha j}u) = S^2_{\alpha j}DT_{\alpha j}u = S^2_{\alpha j}DS^2_{\alpha j}Du = S^4_{\alpha j}D^2u,$$

т. е. $T^2_{\alpha j}u = S^4_{\alpha j}u''$.

Но $S^4_{\alpha j}\varphi \to \varphi$ при $\alpha \to 0$ для любой непрерывной $\varphi(x)$ (сходимость в равномерной метрике). Отсюда и из (3) следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Для операторов $T^2_{\alpha j}$, $j = 1, 2$, справедливы представления:*

$$T^2_{\alpha 2}u = \alpha^{-4}\left[\int\limits_x^{x+\alpha}(t-x)u(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(4\alpha - 3(t-x))u(t)\,dt + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x+2\alpha}^{x+3\alpha}(-8\alpha + 3(t-x))u(t)\,dt + \int\limits_{x+3\alpha}^{x+4\alpha}(4\alpha - (t-x))u(t)\,dt\right], \tag{5}$$

$$T^2_{\alpha 1}u = \alpha^{-4}\left[\int\limits_{x-4\alpha}^{x-3\alpha}(4\alpha - (x-t))u(t)\,dt + \int\limits_{x-3\alpha}^{x-2\alpha}(3(x-t) - 8\alpha)u(t)\,dt + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha}(4\alpha - 3(x-t))u(t)\,dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x}(x-t)u(t)\,dt\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем:

$$T^2_{\alpha 2}u = \alpha^{-4}\left\{-\int\limits_x^{x+\alpha}\left[-\int\limits_t^{t+\alpha}u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t+\alpha}^{t+2\alpha}u(\tau)d\tau\right]dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}\left[-\int\limits_t^{t+2\alpha}u(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t+\alpha}^{t+2\alpha}u(\tau)d\tau\right]dt\right\}$$

или

$$T^2_{\alpha 2}u = \alpha^{-4}[I_1 + I_2 + I_3 + I_4], \tag{7}$$

где

$$I_1 = \int\limits_x^{x+\alpha}\int\limits_t^{t+\alpha}u(\tau)\,d\tau\,dt, \qquad I_2 = -\int\limits_x^{x+\alpha}\int\limits_t^{t+2\alpha}u(\tau)\,d\tau\,dt,$$

$$I_3 = -\int\limits_x^{x+2\alpha}\int\limits_t^{t+2\alpha}u(\tau)\,d\tau\,dt, \qquad I_4 = -I_{2|x\to x_1 = x+\alpha}.$$

Далее,

$$I_1 = \int\limits_x^{x+\alpha}(t-x)u(t)\,dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}(2\alpha - (t-x))u(t)\,dt$$

(см. [3, лемма 1]).

Сделав соответствующие замены в остальных интегралах, придем к выражениям:

$$I_2 = -\int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha}((t-x)-\alpha)u(t)\,dt - \int\limits_{x+2\alpha}^{x+3\alpha}(3\alpha - (t-x))u(t)\,dt, \qquad I_3 = I_2.$$

Подставим полученные выражения в формулу (7), соберем слагаемые, содержащие интегралы с одинаковыми пределами интегрирования, получим представление (5).

Представление (6) получается из (5) при замене x на $x - 4\alpha$.

Подсчитаем нормы $\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]}$ и $\|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]}$. Справедлива

Лемма 3. *Имеют место формулы:*

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = 2\alpha^{-1}, \qquad \|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = \frac{8}{3}\alpha^{-2}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l]\to L_\infty[0,l]} = \max\{\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l]\to C[0,l/2]},\ \|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l]\to C[l/2,l]}\}.$$

Далее,

$$\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l]\to C[0,l/2]} = \max_{0\leqslant x\leqslant l/2}\int_0^l |T_\alpha 2(x,t)|\,dt,$$

где $T_{\alpha 2}(x,t)$ — ядро интегрального оператора $T_{\alpha 2}$, и аналогичная формула справедлива для $\|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l]\to C[l/2,l]}$. Так же вычисляются нормы $\|T_{\alpha 2}^2\|_{C[0,l]\to C[0,l/2]}$ и $\|T_{\alpha 1}^2\|_{C[0,l]\to C[l/2,l]}$. Учитываем, что вычисление норм для $T_{\alpha 1}$ и $T_{\alpha 1}^2$ сводится к вычислению соответствующих норм операторов с индексом 2. Тогда из (1) получаем первое утверждение леммы 3, а из леммы 2 — второе. □

Введем в рассмотрение величины:

$$\triangle(\delta, T_\alpha, u') = \sup\{\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leqslant \delta\},$$
$$\triangle(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') = \sup\{\|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leqslant \delta\}.$$

По аналогии с теоремой 3 в [3] из (2) и лемм 1, 3 следует

Теорема 1. *Для сходимости $\triangle(\delta, T_\alpha, u') \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: 1) $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и 2) $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Для сходимости $\triangle(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условию 1) и условию 3) $\delta(\alpha(\delta))^{-2} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

2. Теперь построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов T_α и $T_\alpha^{(2)}$. Рассмотрим функции $f_\delta^\alpha(x) = k(x)T_\alpha^{(2)}u_\delta(x) + k'(x)T_\alpha u_\delta(x) - q(x)u_\delta(x)$.

Теорема 2. *При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям 1) и 3), указанным в теореме 1, имеет место сходимость*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,l]} \to 0, \textit{при} \qquad \delta \to 0.$$

Доказательство. Очевидна оценка

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant K\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} + K_1\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} + Q\delta, \tag{8}$$

где $K = \|k(x)\|_{C[0,l]}$, $K_1 = \|k_1(x)\|_{C[0,l]}$, $Q = \|q(x)\|_{C[0,l]}$.

Поскольку

$$\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} \leqslant \triangle(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \qquad \text{и} \qquad \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} \leqslant \triangle(\delta, T_\alpha, u'),$$

а согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия 3) теоремы 1 обеспечивает и согласование из условия 2), то отсюда вытекает утверждение теоремы. □

Таким образом, приближенное решение поставленной задачи строится по следующей схеме:

1) вычисляются функции $v_\delta^\alpha(x) = T_\alpha u_\delta$ и $w_\delta^\alpha(x) = T_\alpha v_\delta^\alpha$;

2) выбирается согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ по теореме 2;

3) составляется функция $f_\delta \equiv f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) = k(x)w_\delta^{\alpha(\delta)}(x) + k'(x)v_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - q(x)u_\delta(x)$.

3. При наличии дополнительных условий на функцию $u(x)$ укажем конкретную формулу для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получим оценку погрешности приближенного решения.

Обозначим

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |u''(x)|$$

и будем считать, что эта константа нам известна и что, кроме того, $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$. Тогда справедлива

Лемма 4. *При каждом фиксированном α выполняются оценки:*

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} \leqslant 2M\alpha, \qquad \|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} \leqslant 4M_1\alpha.$$

Доказательство первой оценки вытекает из леммы 5 в [3], второй – из равенства (4).

Запишем оценку (8) в виде

$$\begin{aligned}\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant K[\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} + \delta \|T_\alpha^{(2)}\|_{C \to L_\infty}] + \\ + K_1[\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} + \delta \|T_\alpha\|_{C \to L_\infty}] + Q\delta. \end{aligned} \tag{9}$$

Из этой оценки и лемм 3 и 4 вытекает

Теорема 3. *Если $M = \|u''(x)\|_{C[0,l]}$ и $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$, то справедлива оценка:*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leqslant C_1 \delta^{1/3} + C_2 \delta^{2/3} + Q\delta, \tag{10}$$

где

$$\alpha(\delta) = C\delta^{1/3}, \tag{11}$$

$$C = \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3} (2KM_1 + K_1 M)^{-1/3},$$

$$C_1 = 4(2KM_1 + K_1M)^{2/3} \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3}, \qquad C_2 = K_1(6K)^{1/3}(2KM_1 + K_1M)^{1/3}.$$

Доказательство. Подставим в оценку (9) равенства для норм из леммы 3 и оценки из леммы 4. Получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leqslant 2(2KM_1 + K_1M)\alpha + \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2} + 2K_1\delta\alpha^{-1} + Q_\delta, \tag{12}$$

Теперь сделаем конкретный выбор $\alpha = \alpha(\delta)$ из разумных соображений, а именно из равенства

$$2(2KM_1 + K_1M)\alpha = \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2}.$$

Отсюда получим формулу (11).

Подставив (11) в (12), получим оценку (10). □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
2. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
3. *Хромов А. А.* Приближение функции и её производных с помощью модифицированных операторов Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.

The Solution of the Problem of Determining the Density of Heat Sources in a Rod

A. A. Khromov[1], G. V. Khromova[2]

[1]Khromov Aleksandr Avgustovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

[2]Khromova Galina Vladimirovna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

We give a solution of a problem of determining the density of heat sources in the bav, which is set to a fixed temperature, if the temperature is given approximately. Mathematically it is the problem of finding uniform approximations to the right-hand side of the ordinary differential equation when uniform approximations to the solution and values of error are known. First using the so-called discontinuous Steklov operator we construct families of operators which give stable uniform approximations to a function and its first and second derivatives, and then with their help we propose the method of solving the formulated problem. For a certain class of solutions error estimations are given.

Key words: inverse problem, Steklov operator, regularization.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Ivanov V. K., Vasimn V. V., Tanana V. P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* [The theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
2. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994, 206 p. (in Russian).
3. Khromov A. A. Approximation of Function and Its Derivative by the Modificated Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 593–597 (in Russian).