



## МЕХАНИКА

УДК 539.3

### КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ С ЖЁСТКО ЗАЩЕMLЁННЫМИ ЛИЦЕВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ТОРЦЕ

Р. В. Ардазишвили<sup>1</sup>, М. В. Вильде<sup>2</sup>, Л. Ю. Коссович<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Аспирант кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ardazishvili.roman@yandex.ru

<sup>2</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, mv\_wilde@mail.ru

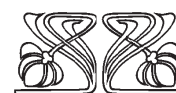
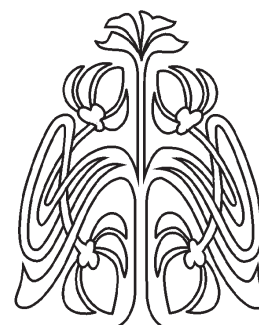
<sup>3</sup>Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, president@sgu.ru

Исследуются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластины (кромочные волны). Рассматриваются симметричные и антисимметричные колебания пластины, лицевые поверхности которой жёстко зашпелены. На торце пластины ставятся либо граничные условия свободного края, либо граничные условия, запрещающие перемещение в одном из тангенциальных направлений. Выполнен асимптотический анализ задачи, показывающий, что в пластине существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Получены асимптотики фазовых скоростей для больших значений волнового числа. Показано, что с увеличением волнового числа фазовые скорости кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны сдвига, если запрещено перемещение вдоль лицевых поверхностей, и к скорости волны Рэлея, если запрещено перемещение в поперечном направлении.

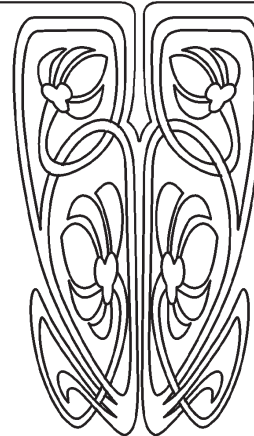
*Ключевые слова:* поверхностные волны, кромочные волны, волна Рэлея, упругая пластина, асимптотические методы.

#### ВВЕДЕНИЕ

Кромочными волнами в статье [1] названы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. На основе двумерных теорий пластин может быть описана только первая, или фундаментальная, кромочная волна в длинноволновом диапазоне. Используя трёхмерные уравнения теории упругости, можно показать, что помимо фундаментальной волны в пластине существуют другие кромочные волны, которые можно назвать кромочными волнами высшего порядка. Данные волны в пластине с перекрёстными граничными условиями на лицевых поверхностях исследованы в статье [2]. В работах [3, 4] рассмотрены симметричные кромочные волны в пластине со свободными либо жёстко зашпелёнными лицевыми поверхностями. Анализ антисимметричных кромочных волн высшего порядка в пластине со свободными лицевыми



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



сторонами выполнен в статье [5]. Рассмотренные исследования касаются пластин с торцом, свободным от напряжений. Однако в [6] показано, что вдоль поверхности, закрепленной в одном из тангенциальных направлений, может распространяться поверхностная волна. Следовательно, в пластине со смешанными граничными условиями на торце также возможны кромочные волны. В данной статье рассматриваются симметричные и антисимметричные кромочные волны в пластинах с жёстко защемлёнными лицевыми поверхностями при различных видах граничных условий на торце.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим гармонические колебания упругой пластины, занимающей в декартовых координатах  $(x, y, z)$  область  $0 \leq x < \infty, |y| \leq h, -\infty < z < \infty$  (рис. 1). Для описания колебаний пластины применим трёхмерные уравнения теории упругости. Введём безразмерные переменные и выразим компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) через упругие потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  подобно тому, как это представлено в [5].

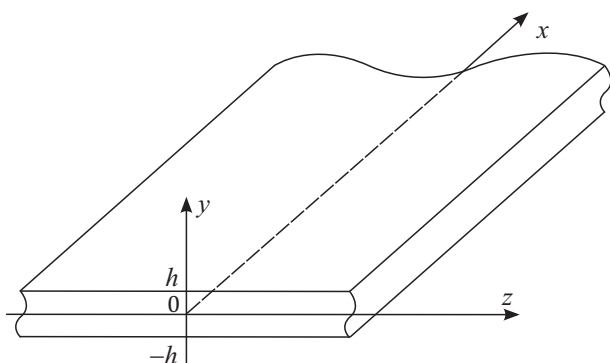


Рис. 1. Геометрия задачи

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta\varphi + \kappa^2\omega^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \omega^2\psi = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta$  — трёхмерный оператор Лапласа,  $\kappa = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

На лицевых поверхностях  $y = \pm h$  мы будем ставить граничные условия жёсткого защемления

$$u_x = u_y = u_z = 0. \quad (2)$$

Будем считать, что НДС изменяется по переменной  $z$  по гармоническому закону. При  $x = 0$  поставим одно из следующих граничных условий:

$$\sigma_x = T_g(y) \cos sz, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_x = T_g(y) \cos sz, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_x = T_g(y) \cos sz, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad u_z = 0, \quad (5)$$

где  $T_g(y)$  — заданная функция переменной  $y$ ,  $s$  — некоторое число. Резонансные частоты рассматриваемой задачи соответствуют собственным частотам однородной задачи с граничными условиями соответственно:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_x = 0, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad u_z = 0 \quad (8)$$

при  $x = 0$ , при этом следует искать те решения однородной задачи, которые соответствуют принятому закону изменения НДС по переменной  $z$  и затухают при  $x \rightarrow \infty$ . На бесконечности ставится условие отсутствия источников энергии.

### 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРОМОЧНЫХ ВОЛН ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим однородную краевую задачу (1), (2), (8). Построим приближенные собственные формы для этой задачи, используя трёхмерную поверхностную волну в случае полупространства со смешанными граничными условиями на поверхности. Форма этой волны определяется потенциалами  $\varphi$  и  $\psi$ , выражения для которых приведены в [6].

Примем, что значение параметра  $\gamma$  фиксированно, и запишем асимптотики при  $s \rightarrow \infty$  для перемещений, входящих в граничные условия (2), в антисимметричном случае:

$$u_x^R = C \frac{s}{2} \left\{ -2 \frac{\theta_1}{\theta} e^{-s\tilde{r}_1^R x} + \left( \frac{\theta}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta} \right) e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right\} \left( 1 + O \left( \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \right) \sin(\gamma y) \cos(sz),$$



$$\begin{aligned} u_y^R &= \frac{C}{\gamma} \left\{ \gamma^2 e^{-s\tilde{r}_1^R x} + \frac{s^2}{2} \left( 1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right\} \cos(\gamma y) \cos(sz), \\ u_z^R &= Cs \left\{ e^{-s\tilde{r}_1^R x} - e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right\} \sin(\gamma y) \sin(sz), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tilde{r}_1^R = \frac{\theta_1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$ ,  $\tilde{r}_2^R = \frac{\theta_2}{\theta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$ ,  $\theta_1 = \sqrt{\theta^2 - \kappa^2}$ ,  $\theta_2 = \sqrt{\theta^2 - 1}$ ,  $\theta$  — корень уравнения

$$\left( 2 - \frac{1}{\theta^2} \right) \left( 2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{\theta^2} \right) + \frac{1}{\theta^2} \sin^2 \alpha - 4 \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\theta^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\theta^2}} \cos^2 \alpha = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha$  — параметр, характеризующий направление распространения волны и связанный с параметрами  $s$  и  $\gamma$  соотношениями  $s = \gamma_1 \sin \alpha$ ,  $\gamma = \gamma_1 \cos \alpha$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{s^2 + \gamma^2}$ . В симметричном случае следует выполнить замену  $\sin \rightarrow \cos$ ,  $\cos \rightarrow \sin$ ,  $\gamma \rightarrow -\gamma$ .

Формулы (9) показывают, что при  $s \rightarrow \infty$  наибольшим из перемещений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях, является перемещение  $u_y^R$ . Чтобы удовлетворить всем граничным условиям однородной задачи с асимптотически малой погрешностью, достаточно положить

$$\gamma = \begin{cases} n & \text{в симметричном случае,} \\ n + 0.5 & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, в качестве первого приближения собственной формы колебаний рассматриваемой пластины можно принять форму трёхмерной поверхностной волны в полупространстве. Подставляя (11) в выражение  $\gamma_1 = \theta \omega$ , связывающее частоту и волновое число в поверхностной волне, получим асимптотику собственных частот при  $s \rightarrow \infty$ :

$$\omega_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \sqrt{s^2 + n^2} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\theta} \sqrt{s^2 + (n + 0.5)^2} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что в рассматриваемой пластине существует бесконечное счётное множество кромочных волн высшего порядка. Получим асимптотику фазовых скоростей кромочных волн высшего порядка при  $s \rightarrow \infty$ :

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases}$$

Из (10) следует, что если  $s \rightarrow \infty$ , то  $\theta \rightarrow 1$ , следовательно, фазовые скорости кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (8) стремятся к скорости волны сдвига. Наименьшей частотой запираания при  $s \rightarrow \infty$  в антисимметричном случае является частота запираания нижней плоской моды, которая имеет асимптотическое представление  $\Omega_1^{(\infty)} = \sqrt{s^2 + 0.25}$ . Нижней частотой запираания в симметричном случае является частота запираания нулевой антиплоской моды  $\Omega_0^{sh} = \sqrt{s^2 + 0.25}$ . Используя приведённые выражения, получаем, что  $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_1^{(\infty)}$  и  $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_0^{sh}$  при  $s > s_{cr}^{(\infty)}$ , где  $s_{cr}^{(\infty)}$  — корень выражения

$$n = \begin{cases} \sqrt{\theta^2(s^2 + 0.25) - s^2} - 0.5 & \text{в симметричном случае,} \\ \sqrt{\theta^2(s^2 + 0.25) - s^2} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $n$  — номер волны.

Рассмотрим однородную краевую задачу (1), (2), (7). Форма трёхмерной поверхностной волны в случае полупространства со смешанными граничными условиями (7) на поверхности определяется другими выражениями для потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ , также приведенными в [6].

Аналогично рассмотренному случаю с граничными условиями (8) приведём асимптотику при  $s \rightarrow \infty$  для перемещений, входящих в граничные условия (2):

$$u_x^R = C \frac{s}{2} \left\{ -2 \frac{\theta_1}{\theta} e^{-s\tilde{r}_1^R x} + \left( \frac{\theta}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta} \right) e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right\} \left( 1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \sin(\gamma y) \cos(sz),$$

$$u_y^R = C\gamma \left\{ e^{-s\bar{r}_1^R x} - e^{-s\bar{r}_2^R x} \right\} \cos(\gamma y) \cos(sz),$$

$$u_z^R = C\frac{s}{2} \left\{ -2e^{-s\bar{r}_1^R x} - \left[ \frac{\gamma^2}{s^2} - 1 - \left( \frac{\theta_2}{\theta} \right)^2 \left( 1 + O\left( \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \right) \right] e^{-s\bar{r}_2^R x} \right\} \sin(\gamma y) \sin(sz),$$

где  $\theta$  — корень уравнения (10), в котором выполнена замена  $\sin \rightarrow \cos$ ,  $\cos \rightarrow \sin$ .

Асимптотика собственных частот при  $s \rightarrow \infty$  имеет следующий вид

$$\omega_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \sqrt{s^2 + (n + 0.5)^2} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\theta} \sqrt{s^2 + n^2} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (14)$$

Асимптотика фазовых скоростей кромочных волн высшего порядка при  $s \rightarrow \infty$  имеет вид:

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{(n + 0.5)^2}{s^2}} & \text{в симметричном случае,} \\ \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{в антисимметричном случае.} \end{cases} \quad (15)$$

Если в (10) выполнить указанную замену, то получим, что  $\theta \rightarrow 1/c_R$  при  $s \rightarrow \infty$ , следовательно, фазовые скорости кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (7) стремятся к скорости волны Рэлея. В случае граничных условий (7) справедливы выражения (13) для нахождения  $s_{cr}^{(\infty)}$ , но  $\theta$  в данном случае является корнем уравнения (10), в котором выполнена замена  $\sin \rightarrow \cos$ ,  $\cos \rightarrow \sin$ . Для каждой волны с фиксированным номером  $n > 0$  найдётся такое значение волнового числа  $s_{cr}$ , после которого частота колебаний в данной волне окажется ниже первой частоты запираания и демпфирования волны распространяющимися модами не происходит.

Рассмотрим однородную краевую задачу (1), (2), (6). Потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  для этого случая приведены в [4].

Запишем асимптотики при  $s \rightarrow \infty$  для напряжений, входящих в граничные условия (2) в антисимметричном случае:

$$u_x^R = \frac{C}{\gamma} \left\{ K_R \frac{\theta_1}{\theta} s^2 \left( 1 + O\left( \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \right) e^{-s\bar{r}_1^R x} - (s^2 + \gamma^2) e^{-s\bar{r}_2^R x} \right\} \sin(\gamma y) \cos(sz),$$

$$u_y^R = sC \left\{ -K_R e^{-s\bar{r}_1^R x} + \frac{\theta_2}{\theta} e^{-s\bar{r}_2^R x} \right\} \left( 1 + O\left( \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \right) \cos(\gamma y) \cos(sz),$$

$$u_z^R = C\frac{s^2}{\gamma} \left\{ K_R e^{-s\bar{r}_1^R x} - \frac{\theta_2}{\theta} e^{-s\bar{r}_2^R x} \right\} \left( 1 + O\left( \frac{\gamma^2}{s^2} \right) \right) \sin(\gamma y) \sin(sz).$$

Здесь  $\theta = 1/c_R$ , где  $c_R$  — скорость волны Рэлея, отнесённая к скорости волны сдвига.

При данных граничных условиях асимптотика собственных частот при  $s \rightarrow \infty$  совпадает с формулой (14), а асимптотика фазовых скоростей — с формулой (15). Симметричный случай подробно рассмотрен в [4].

Низшей частотой запираания при  $s \rightarrow \infty$  в данном случае является частота запираания низшей плоской моды  $\Omega_1^{(\infty)}$ . При торце, свободном от напряжения,  $\theta$  не зависит от  $s$ . Таким образом, получаем, что  $\omega_n^{(\infty)} < \Omega_1^{(\infty)}$  при

$$s > s_{cr}^{(\infty)} = \sqrt{\frac{4n^2 - \theta^2}{4(\theta^2 - 1)}},$$

где  $n$  — номер волны.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для подтверждения теоретических выводов численно были найдены частоты кромочных волн высшего порядка, соответствующие различным значениям волнового числа  $s$ . При численном исследовании удобно рассматривать задачу о вынужденных колебаниях, в которой на торце ставятся неоднородные граничные условия (3), (4) или (5). В этом случае резонансная частота соответствует частоте колебаний в кромочной волне. Метод численного решения задачи основан на разложении по



модам и описан в работе [4]. В процессе поиска резонансных частот удобно использовать приближенные соотношения (12) и (14). Запишем их в виде общей формулы:

$$\omega_{\gamma}^{appr} = \frac{1}{\theta} \sqrt{s^2 + \gamma^2},$$

где  $\gamma = k = 1, 2, \dots$  или  $\gamma = k + 0.5 = 0.5, 1.5, \dots$

Результаты расчётов для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.25$  приведены на рис. 2–4, а. Рис. 2 иллюстрирует связь результатов экспериментов с результатами асимптотического анализа, полученными выше для граничных условий (8). На нём представлены четыре группы графиков, соответствующих каждой найденной волне. Каждая группа включает три графика, представляющих величину  $\delta_R = \omega - s$ , где жирным линиям соответствует  $\omega = \omega_k^{num}$  при  $k = \overline{1, 4}$  (численное решение), тонким линиям —  $\omega = \omega_j^{appr}$  при  $j = \overline{1, 4}$ , а толстым пунктирным —  $\omega = \omega_{j-\frac{1}{2}}$  при  $j = \overline{1, 4}$ .

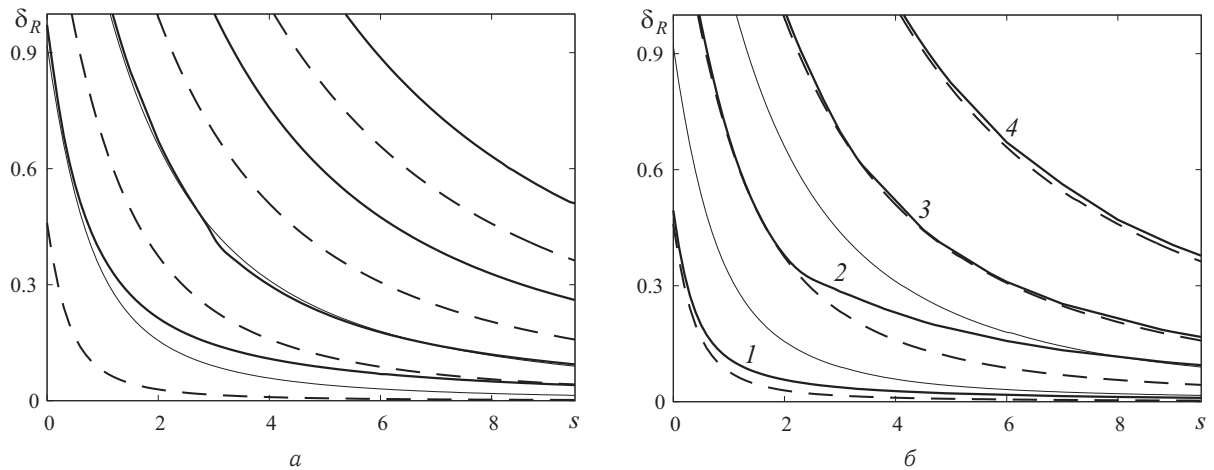


Рис. 2. Результаты расчётов для случая смешанных граничных условий (8) на торце: а — антисимметричный случай; б — симметричный случай

В случае граничных условий (6) и (7) характерно наличие двух резонансных пиков вблизи частот запираия плоских мод. На рис. 3 представлены дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка в случае граничных условий (7), что соответствует асимптотике (14). Тонкими линиями обозначены частоты запираия плоских мод, тонкой пунктирной — частоты запираия нулевой антиплоской моды, толстыми сплошными — результаты численного эксперимента, толстыми пунктирными — асимптотические кривые.

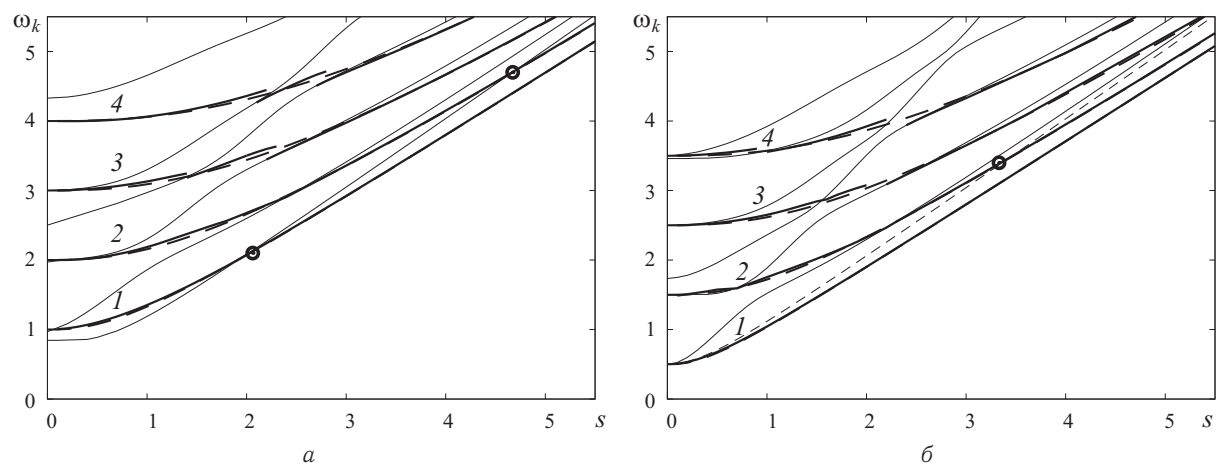


Рис. 3. Результаты расчётов для случая смешанных граничных условий (7) на торце: а — антисимметричный случай; б — симметричный случай



Аналогичный график в случае торца свободного от напряжений представлен на рис. 4, а. Кругами на рис. 3 и 4 отмечены значения  $s_{cr}^{(\infty)}$  волнового числа, выше которых отсутствует демпфирование кромочной волны высшего порядка распространяющимися модами. На рис. 4, б представлено поведение ширины резонансов при  $\nu = 0.05$ , характеризующей скорость затухания волны. В расчётах при  $s \in (0.0, 5.0)$  использовалась 41 плоская мода и 21 антиплоская  $s \in (5.0, 13.0)$  — 81 плоская мода и 41 антиплоская,  $s \in (13.0, 20.0)$  — 161 плоская мода и 81 антиплоская.

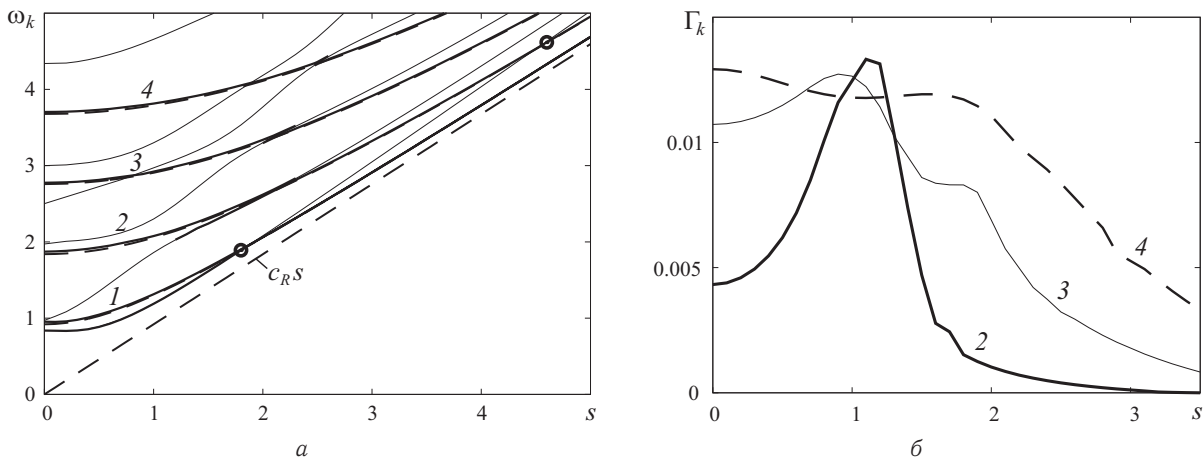


Рис. 4. Результаты расчетов для торца, свободного от напряжений: а — дисперсионные кривые; б — коэффициенты затухания

На основании данных, представленных на рис. 2–4, можно сделать следующие выводы.

1. Результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами теоретического исследования. Поведение частот при  $s \rightarrow \infty$  с малой погрешностью описывается асимптотической формулой (12) в случае граничных условий (8) и формулой (14) в случае граничных условий (6) и (7), фазовые скорости при  $s \rightarrow \infty$  стремятся либо к скорости волны сдвига в случае граничных условий (8), либо к скорости волны Рэлея в случае граничных условий (6) и (7).

2. Особую роль в случае смешанных граничных условий на торце и жёстком защемлении лицевых поверхностей играют частоты запириания плоских мод. При выполнении численных расчетов было обнаружено, что эти частоты оказывают влияние на поведение дисперсионных кривых кромочных волн, приводя к появлению нерегулярностей и разрывов. Также вблизи данных частот в случае граничных условий (6) и (7) было обнаружено два резонансных пика.

3. В пластине с жёстко защемлёнными лицевыми поверхностями фундаментальные поверхностные волны отсутствуют, однако существует бесконечное счётное множество кромочных волн высшего порядка. При каждом фиксированном конечном значении волнового числа существует конечное число незатухающих волн и бесконечное число затухающих.

#### Библиографический список

1. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Ин-т механики НАН Армении. Ереван, 1997. С. 79–96.
2. Kaplunov J. D., Prikazhnikov D. A., Rogerson G. A. On three dimensional edge waves in pre-stressed incompressible elastic solids // J. Acoust. Soc. Am. 2005. Vol. 118, № 5. P. 2975–2983. DOI: 10.1121/1.2062487.
3. Zernov V., Kaplunov J. D. Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. Lond. A. 2008. Vol. 464. P. 301–318.
4. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280 с.
5. Ардазшвили Р. В., Вильде М. В., Коссович Л. Ю. Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 50–56.
6. Ardazishvili R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface // Proceedings of Young Scientists School-Conference MECHANICS-2013. Tsakhkadzor, Armenia, 2013. P. 74–79.



## Edge Waves in Plates with Fixed Faces and Various Boundary Conditions on the Front Edge

R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ardazishvili.roman@yandex.ru, mv\_wilde@mail.ru, president@sgu.ru

This paper is concerned with the propagation of surface waves in plates subject to free or mixed boundary conditions on the front edge. Symmetric and antisymmetric waves in plates with fixed faces are considered. Asymptotic analysis is performed, which shows that there is an infinite spectrum of higher order edge waves in plates. Asymptotics of phase velocity are obtained for large values of wave number. It is demonstrated that in the short-wave limit the phase velocity of all higher order edge waves tends to the velocity of Rayleigh wave or shear wave, depending on the boundary conditions on the front edge.

*Key words:* surface waves, edge waves, Rayleigh wave, shear wave, asymptotic methods.

### References

1. Belubekian M. V. Surface waves in elastic medium. *Problems in Solid Mechanics*. Institute of mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, 1997, pp. 79–96 (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A. On three dimensional edge waves in prestressed incompressible elastic solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, vol. 118, no. 5, pp. 2975–2983. DOI: 10.1121/1.2062487.
3. Zernov V., Kaplunov J. D. Three-dimensional edge waves in plates. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 2008, vol. 464, pp. 301–318.
4. Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. *Edge and interface resonance phenomena in elastic bodies*. Moscow, FIZMATLIT, 2010. 280 p. (in Russian).
5. Ardazishvili R. V., Wilde M. V., Kossovich L. Yu. Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pp. 50–56 (in Russian).
6. Ardazishvili R. V. Three-dimensional surface wave for mixed boundary conditions on the surface. *Proceedings of Young Scientists School-Conference MECHANICS-2013*, Tsakhkadzor, Armenia, 2013, pp. 74–79.

УДК 681.03.06:531.383:532.516

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ И ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

А. Ю. Блинкова<sup>1</sup>, Ю. А. Блинков<sup>2</sup>, С. В. Иванов<sup>3</sup>, Л. И. Могилевич<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Ассистент кафедры теплогазоснабжение, вентиляция, водообеспечение и прикладная гидрогазодинамика, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., anblinkova@yandex.ru

<sup>2</sup>Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, BlinkovUA@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, evilgraywolf@gmail.com

<sup>4</sup>Доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), Саратов, Mogilevich@sgu.ru

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость внутри. Физические свойства оболочки определяются уравнениями квадратичной теории вязкоупругости, учитывающей линейную упругость объемных деформаций. Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейных тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассмотрены ранее с позиции теории солитонов. Наличие жидкости потребовало разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

*Ключевые слова:* нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, вязкоупругие цилиндрические оболочки, окружающая упругая среда.