



# МЕХАНИКА

УДК 539.3

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ В РАМКАХ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

**И. В. Богачев, А. О. Ватульян, В. В. Дударев,  
П. А. Лапина, Р. Д. Недин**

Богачев Иван Викторович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, bogachev89@yandex.ru

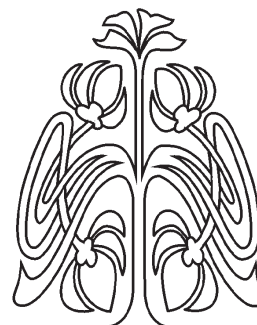
Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, vatulyan@math.rsu.ru

Дударев Владимир Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, dudarev\_vv@mail.ru

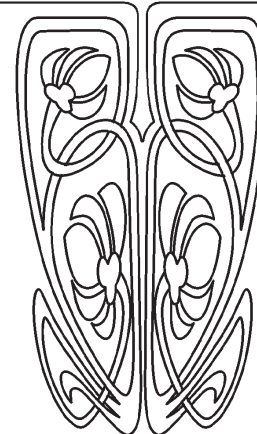
Лапина Полина Анатольевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, palapina@sfedu.ru

Недин Ростислав Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Южный федеральный университет, 344090, Россия, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8а, rdn90@bk.ru

В работе рассмотрена обратная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины в рамках модели Тимошенко. Процедура идентификации основана на анализе акустического отклика в некоторой точке пластины в заданном наборе частот. Колебания возбуждаются приложенной к верхней грани пластины равномерно распределенной нагрузкой. Пластина считается жестко защемленной по контуру. На основании общих уравнений колебаний пластины Тимошенко (для произвольных криволинейных координат) сформулированы уравнения колебаний симметричной круглой пластины и граничные условия в обезрамеренном виде. Для решения прямой задачи использовался метод Галеркина, с помощью которого проведено срав-



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





нение значений функций прогиба для моделей Тимошенко и Кирхгофа – Лява для различных наборов механических и геометрических параметров. Для решения обратной задачи идентификации неоднородной функции цилиндрической жесткости разработан специальный метод решения — метод алгебраизации, который основан на разложении искомых функций по некоторым системам линейно независимых функций. После подстановки разложений в исходные уравнения колебаний обратная задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции прогиба и угла поворота нормали и последующем решении системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложения функции цилиндрической жесткости. Разработанный метод проиллюстрирован набором вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных функций, демонстрирующих его эффективность.

*Ключевые слова:* пластина, модель Тимошенко, идентификация, метод алгебраизации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430

## ВВЕДЕНИЕ

Моделирование объектов, описываемых пластинчатыми конструкциями с неоднородными свойствами, в настоящее время является актуальной практической задачей. Подобные конструкции используются в современном строительстве (при создании перекрытий и покрытий сооружений, перегородок, заслонок, монтажных пластин и т. д.), в производстве военных и гражданских технических систем широкого назначения (режущие системы, мембранные датчики, экранирующие элементы и т. п.), а также в биомеханике при моделировании деформирования различных объектов. В связи с этим становится востребованной разработка уточненных моделей, описывающих поведение таких конструкций и методов идентификации их неоднородных свойств [1].

При моделировании многослойных конструкций из композитных, функционально-градиентных и других материалов, отличающихся повышенной податливостью на сдвиг, для корректного описания их поведения необходимо учитывать деформации поперечного сдвига. Использование при этом классической теории Кирхгофа – Лява может приводить к существенной погрешности, для описания их поведения при динамическом воздействии необходимо применять уточненные модели. Одной из таких моделей является модель Тимошенко [2].

В работах [3–5] представлен анализ различных классических и неклассических моделей пластин (Кирхгофа – Лява, Тимошенко – Рейсснера и др.). В работе [4] модель Тимошенко – Рейсснера сравнивается с классической моделью Кирхгофа – Лява и трехмерной теорией упругости. На основе сравнения выделены области применимости каждой из моделей. Показано, что теория Кирхгофа – Лява для пластин является первым асимптотическим приближением для изотропного материала, учитывающая сдвиг теория Тимошенко – Рейсснера несущественно уточняет теорию Кирхгофа – Лява, а для ортотропного материала при относительно малом модуле поперечного сдвига теория Тимошенко – Рейсснера существенно уточняет теорию Кирхгофа – Лява. Статья [5] посвящена асимптотическому выводу двумерных уравнений равновесия тонкой упругой неоднородной анизотропной пластины, анализу применимости модели и ее сравнению с моделями Кирхгофа – Лява и Тимошенко – Рейсснера. В статье [6] представлен обзор классических и неклассических моделей пластин и стержней с точки зрения применимости к описанию сдвиговых деформаций с исполь-



зованием статических и динамических экспериментов по анализу прогиба и частотных характеристик.

Также интерес представляет изучение деформирования пластин, обладающих вязкоупругими, термоупругими и термовязкоупругими свойствами. В статье В. А. Ковалева [7] рассматривается трехслойная конструкция, наиболее толстый средний слой в которой является термовязкоупругим и описывается моделью теории Рейсснера, остальные слои являются термоупругими и описываются мембранной теорией. Представлены результаты вычислительных экспериментов по определению собственных форм в случае шарнирно закрепленной пластины.

Учет неоднородности материала, из которого изготовлены современные конструктивные элементы, а также возможное наличие дефектов и включений делает невозможным определение их механических свойств на основе стандартных экспериментов и приводит к необходимости решения новых обратных задач. В связи с этим актуальность приобретают разработка и развитие новых методов идентификации, например, на основе акустического подхода. К его достоинствам можно отнести относительную простоту и экономичность практической реализации, что крайне важно при решении практических задач.

Отметим, что в случае однородных материалов обратные задачи идентификации свойств пластин, местоположения, характеристик и дефектов в них достаточно хорошо изучены. Например, в работе [8] в рамках линейной теории упругости путем минимизации функционала невязки предложен способ одновременной идентификации местоположения и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине. В статье [9] представлен специальный метод идентификации компонент жесткости однородной ортотропной пластины при анализе изгибных колебаний. Для реализации сформулировано специальное уравнение движения пластины относительно некоторых ортогональных осей, в которое явно входит угол между этими осями и осями ортотропии. Идентификация производится на основании информации об изменении этого угла в процессе колебаний. Также представлена процедура автоматической регуляризации, позволяющая эффективно преодолевать трудности, связанные с зашумлением измеряемых данных. В работе [10] разработан набор специальных экспериментов по идентификации компонент жесткости на основе данных о полях деформаций с использованием метода виртуальных полей (VFM).

В случае неоднородных материалов ситуация значительно усложняется. В статье [11] рассмотрена обратная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины в рамках модели Кирхгофа – Лява. Идентификация производилась на основе специального итерационного подхода, основанного на методе линеаризации, использующего метод Галеркина для решения прямых задач и метод регуляризации Тихонова для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода относительно поправок к восстанавливаемым функциям на каждом шаге.

В настоящем исследовании подобная задача идентификации свойств неоднородной круглой пластины при установившихся колебаниях рассмотрена в рамках модели Тимошенко. Для сформулированной постановки выведены уравнения колебаний и граничные условия в безразмерном виде. Для решения обратной задачи идентификации функции цилиндрической жесткости на основе дополнительной информации о значениях АЧХ в некоторой точке предложен специальный метод решения, основанный на разложении функций цилиндрической жесткости, прогиба и угла поворота нормали по некоторым системам линейно независимых функций и последующем ре-



шении систем линейных и нелинейных уравнений относительно коэффициентов разложений. Решение обратной задачи проиллюстрировано набором вычислительных экспериментов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем цилиндрическую систему координат  $r, \phi, z$ . Аналогично исследованию [11] будем рассматривать круглую пластину радиуса  $R$  толщины  $h$  с переменной цилиндрической жесткостью  $D(r) = \frac{E(r)h^3}{12(1-\nu^2)}$ , ( $E(r)$  — модуль Юнга,  $\nu = \text{const}$  — коэффициент Пуассона), зависящей от радиальной координаты  $r$ . В рамках модели Тимошенко [2] с учетом симметрии по угловой координате компоненты вектора смещения имеют вид

$$u_r = z\vartheta_r, \quad u_\phi = 0, \quad u_z = w, \quad (1)$$

где  $\vartheta_r$  — угол поворота нормали вдоль оси радиальной координаты,  $w$  — функция прогиба пластины.

Для вывода уравнений колебаний воспользуемся общим видом уравнений колебаний пластины в криволинейных координатах  $\alpha_1, \alpha_2$  в рамках модели Тимошенко [12]:

$$\begin{aligned} Q_1 - \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial(H_2 M_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_1 M_{12})}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) &= -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2}, \\ Q_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial(H_1 M_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(H_2 M_{12})}{\partial \alpha_1} + M_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) &= -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{H_1 H_2} \left( \frac{\partial(H_2 Q_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(H_1 Q_2)}{\partial \alpha_2} \right) &= -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $Q_i$  — перерезывающие силы,  $H_i$  — коэффициенты Ламе,  $M_{ij}$  — изгибающие моменты,  $\rho$  — плотность.

В случае цилиндрических координат коэффициенты Ламе имеют вид:  $H_1 = 1$ ,  $H_2 = r$ . В рассматриваемом случае симметричной по угловой координате пластины выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил, представленные в [12], принимают вид

$$\begin{aligned} M_1 = M_r = D \left( \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \vartheta_r \right), \quad M_2 = M_\phi = D \left( \frac{1}{r} \vartheta_r + \nu \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right), \quad M_{12} = M_{r\phi} = 0, \\ Q_1 = Q_r = \frac{k E h}{2(1+\nu)} \left( \vartheta_r - \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad Q_2 = Q_\phi = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметр  $k$  — безразмерный коэффициент распределения касательных напряжений из теории Тимошенко – Миндлина [2], определяется из уравнения:

$$16 \left( 1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k \right) (1-k) - (2-k)^4 = 0.$$

Ввиду того что в задаче рассматриваются установившиеся колебания пластины с частотой  $\omega$ , отделим временной множитель в выражениях для функций прогиба, угла поворота и нагрузки, считая:

$$q = q(r)e^{-i\omega t}, \quad w = w(r)e^{-i\omega t}, \quad \vartheta_r = \vartheta_r(r)e^{-i\omega t}. \quad (4)$$



Подставляя выражения (3) и (4) в уравнения (2) и проводя ряд преобразований, запишем их в виде

$$\frac{6k(1-\nu)}{h^2} D \left( \vartheta_r - \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rD(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \vartheta_r))}{\partial r} - D \left( \frac{1}{r} \vartheta_r + \nu \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right) \right) - \frac{h^3}{12} \rho \omega^2 \vartheta_r = 0,$$

$$\frac{6k(1-\nu)}{h^2} \frac{\partial(Dr(\vartheta_r - \frac{\partial w}{\partial r}))}{\partial r} - \rho h \omega^2 r w + q r = 0. \quad (5)$$

**Примечание.** Второе уравнение в (2) при этом выполняется тождественно.

Запишем граничные условия, соответствующие жёсткой заделке по краю пластины:

$$w(R, \omega) = 0, \quad \vartheta_r(R, \omega) = 0. \quad (6)$$

Решение должно удовлетворять условиям симметрии вида

$$\frac{\partial}{\partial r} w(0, \omega) = 0, \quad \vartheta_r(0, \omega) = 0. \quad (7)$$

Для удобства построения численного решения задачи введем безразмерные параметры и переменные  $r = R\xi$ ,  $w = R\tilde{w}$ ,  $D = D_0\tilde{D}$ ,  $D_0 = \tilde{D}(R)$ ,  $\vartheta_r = \theta$ ,  $q = q_0\tilde{q}(\xi)$ ,  $\varepsilon = h/R$  (знак тильды в дальнейшем будем опускать), тогда запишем (5)–(7) в виде

$$6k(1-\nu)D(\theta - w') - \frac{\varepsilon^2}{\xi} \left( \left( D\xi \left( \theta' + \frac{\nu}{\xi} \theta \right) \right)' - D \left( \frac{1}{\xi} \theta + \nu \theta' \right) \right) - \frac{\kappa^2}{12} \theta = 0, \quad (8)$$

$$6k(1-\nu)(D\xi(\theta - w'))' - \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} \xi w + Q\xi q = 0,$$

$$w'(0, \kappa) = 0, \quad w(1, \kappa) = 0, \quad (9)$$

$$\theta(0, \kappa) = 0, \quad \theta(1, \kappa) = 0, \quad (10)$$

где  $\kappa = \sqrt{h^5 \rho / D_0} \omega$ ,  $Q = q_0 h^2 R / D_0$ . В рассматриваемой постановке плотность пластины  $\rho$  считалась известной и постоянной.

**Обратная задача** заключается в определении набора функций  $D(\xi)$ ,  $w(\xi, \kappa)$  и  $\theta(\xi, \kappa)$ , удовлетворяющих (8)–(10) по дополнительной информации о функции смещения при некотором  $\xi = \xi_0$  в заданном частотном диапазоне:

$$w(\xi_0, \kappa) = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \quad (11)$$

Отметим, что обратная задача в такой постановке является существенно нелинейной, для ее решения требуется разработка специальных методов.

## 2. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТИМОШЕНКО И КИРХГОФА – ЛЯВА

Прямая задача по определению функции прогиба  $w(\xi, \kappa)$  и угла поворота нормали  $\theta(\xi, \kappa)$  при известной функции цилиндрической жесткости  $D(\xi)$  решалась методом пристрелки и проекционным методом Галеркина [13]. Оба метода показали одинаковые результаты для различных значений  $D(\xi)$ .

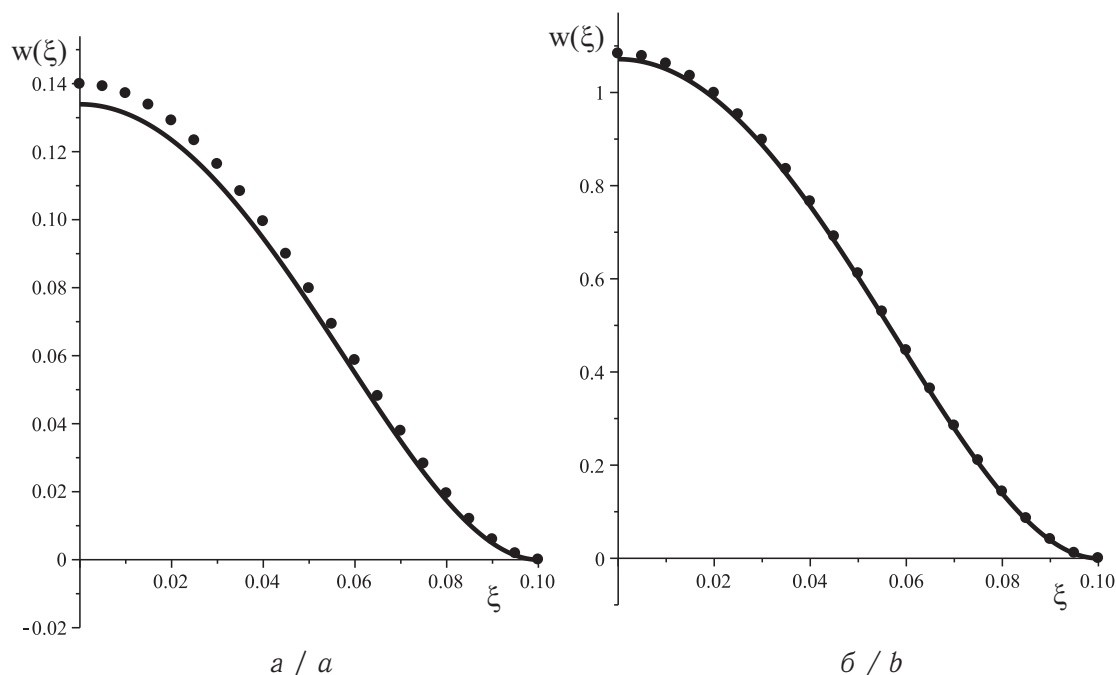


Рис. 1. Сравнение функции прогиба в моделях Тимошенко и Кирхгофа – Лява: *a* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.01$  м,  $\varepsilon = 0.01/0.1 = 0.1$ ; *б* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.005$  м,  $\varepsilon = 0.005/0.1 = 0.05$   
 Fig. 1. Comparison of the deflection function in the models of Timoshenko and Kirchhoff – Love: *a* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.01$  м,  $\varepsilon = 0.01/0.1 = 0.1$ ; *b* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.005$  м,  $\varepsilon = 0.005/0.1 = 0.05$

Для проверки корректности выведенной постановки задачи и тестирования метода решения прямой задачи функция прогиба в размерном виде (5)–(7) в частном случае сравнивались с известным каноническим прогибом пластины рамках в модели Кирхгофа – Лява [2]  $w = \frac{q}{64D}(R^2 - r^2)^2$  в задаче статики ( $\omega = 0$ ). Сравнение производилось в размерном виде при заданном наборе механических параметров, соответствующем стали:  $k = 0.86$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E = 200 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 7000$  кг/м<sup>3</sup>, для двух наборов геометрических параметров: *a* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.01$  м,  $\varepsilon = 0.01/0.1 = 0.1$ ; *б* —  $R = 0.1$  м,  $h = 0.005$  м,  $\varepsilon = 0.005/0.1 = 0.05$ . Нагрузка полагалась равной  $q = 157 \cdot 10^7$ . Результаты сравнения представлены на рис. 1, *a*, *б* соответственно. График прогиба в рамках модели Кирхгофа – Лява отмечен сплошной линией, полученное решение в рамках модели Тимошенко — точками. Максимальное расхождение в первом случае не превосходит 5% в первом случае и 1.2% во втором. Полученные результаты соответствуют известным [3] результатам о близости моделей Тимошенко и Кирхгофа – Лява для описания тонких изотропных пластин.

### 3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. МЕТОД АЛГЕБРАИЗАЦИИ

Введем возможные функции прогиба  $w_1(\xi, \kappa)$  и угла поворота нормали  $\theta_1(\xi, \kappa)$ , удовлетворяющие граничным условиям (9) и (10) соответственно. Для формулировки методики решения обратной задачи (8)–(11) скалярно умножим первое уравнение (8) на функцию  $\theta_1(\xi, \kappa)$ , а второе уравнение (8) скалярно умножим на функцию  $w_1(\xi, \kappa)$ . Пользуясь формулой интегрирования по частям, граничными условиями и проводя несложные преобразования, получим следующие соотношения:

$$\int_0^1 \left[ \left[ 6k(1 - \nu)D\theta_1 + \frac{\varepsilon^2 \nu}{\xi} D\xi\theta_1 + D\frac{1}{\xi}\theta_1 - \frac{\kappa^2}{12}\theta_1 \right] \theta_1 + \right.$$



$$+ \left[ \frac{\varepsilon^2}{\xi} D\xi\theta'_1 + D\nu\theta_1 \right] \theta' - [6k(1 - \nu)D\theta_1] w' \Big] \xi d\xi = 0, \quad (12)$$

$$\int_0^1 \left[ [6k(1 - \nu)D\xi w'_1] \theta + \left[ \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} \xi w_1 \right] w - [6k(1 - \nu)D\xi w'_1] w' \right] \xi d\xi = \int_0^1 Q\xi^2 q w_1 d\xi. \quad (13)$$

Введем  $\phi_n$ ,  $\gamma_n$  и  $\psi_m$  — системы линейно независимых функций на  $[0, 1]$ , причем функции  $\phi_n$  удовлетворяют граничным условиям (9), функции  $\gamma_n$  — условиям (10). Будем искать решение сформулированной обратной задачи (8)–(11) в виде

$$w(\xi, \kappa) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \quad \theta(\xi, \kappa) = \sum_{i=1}^N b_i \gamma_i, \quad D(\xi) = \sum_{j=1}^M C_j \psi_j. \quad (14)$$

Функции-коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  при этом зависят от параметра  $\kappa$ .

Отметим, что левые части в соотношениях (12), (13) имеют билинейную структуру. Это означает, что при фиксированных  $w_1$  и  $\theta_1$  эти соотношения линейны по  $w$ ,  $\theta$ , а при фиксированных  $w$  и  $\theta$  — линейны по  $w_1$ ,  $\theta_1$ . Подставляя разложения (14) в соотношение (12), (13), получим равенства вида

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i \sum_{j=1}^M (C_j A_1(\psi_j, \phi_i, \theta_1)) + b_i \sum_{j=1}^M (C_j B_1(\psi_j, \gamma_i, \theta_1) + R_1(\theta_1, \kappa)) \right) = 0, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i \sum_{j=1}^M (C_j A_2(\psi_j, \phi_i, w_1) + R_2(w_1, \kappa)) + b_i \sum_{j=1}^M (C_j B_2(\psi_j, \gamma_i, w_1)) \right) = F(w_1).$$

Полагая  $w_1 = \phi_n$ ,  $\theta_1 = \gamma_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , из уравнений (15) получим систему  $2N$  линейных относительно функций  $a_i(\kappa)$  и  $b_i(\kappa)$  уравнений, которую можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i \sum_{j=1}^M (C_j A_1^{ijn}) + b_i \sum_{j=1}^M (C_j B_1^{ijn} + R_1^n(\kappa)) \right) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( a_i \sum_{j=1}^M (C_j A_2^{ijn} + R_2^n(\kappa)) + b_i \sum_{j=1}^M (C_j B_2^{ijn}) \right) = F^n, \quad n = 1, \dots, N,$$

где  $A_1^{ijn} = A_1(\psi_j, \phi_i, \gamma_n)$ ,  $A_2^{ijn} = A_1(\psi_j, \phi_i, \phi_n)$ ,  $B_1^{ijn} = B_1(\psi_j, \gamma_i, \gamma_n)$ ,  $B_2^{ijn} = B_2(\psi_j, \gamma_i, \phi_n)$ ,  $R_1^n = R_1(\theta_n, \kappa)$ ,  $R_2^n = R_2(\phi_n, \kappa)$ ,  $F^n = F(\phi_n)$ .

Линейная система (16) решается относительно функций-коэффициентов  $a_i(\kappa)$ ,  $b_i(\kappa)$ . После подстановки их в разложения (14) получаются выражения для  $w(\xi, \kappa, \{C_j\})$ ,  $\theta(\xi, \kappa, \{C_j\})$ , зависящие от параметра  $\kappa$  и набора коэффициентов  $\{C_j\}_{j=1, \dots, M}$ . Выражение для функции  $w(\xi, \kappa, \{C_j\})$  подставляется в дополнительное условие (11) обратной задачи. Выбирая набор значений  $\kappa_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , формируем систему из  $M$  нелинейных уравнений  $M$ -го порядка относительно коэффициентов  $\{C_j\}_{j=1, \dots, M}$ :

$$\sum_{i=1}^N a_i(\xi_0, \kappa_m, \{C_j\}) \phi_i = f(\kappa_m), \quad j, m = 1, \dots, M. \quad (17)$$

Из решения системы (17) определяются коэффициенты  $\{C_j\}_{j=1, \dots, M}$ , затем восстанавливается функция цилиндрической жесткости  $D(\xi)$  согласно представлению (14).



#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Далее приведены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи (8)–(11) об идентификации неизвестной функции жесткости  $D(\xi)$ . Коэффициент Пуассона полагался равным  $\nu=0.3$ , соответствующий ему безразмерный коэффициент распределения касательных напряжений  $k = 0.86$ . При реализации описанного метода алгебраизации в качестве функций  $\phi_n(\xi)$  и  $\gamma_n(\xi)$  в разложении (14) выбирались функции  $\phi_n(\xi) = (1 - \xi^2)^2 \xi^{2(n-1)}$  и  $\gamma_n(\xi) = \sin(n\pi\xi)$ ,  $n = 1, \dots, N$  соответственно, в качестве  $\psi_m(\xi)$  — функции  $\psi_m(\xi) = \xi^{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Параметр  $N$ , характеризующий количество функций  $\phi_n(\xi)$  и  $\gamma_n(\xi)$  в разложениях (14) функций  $w(\xi, \kappa)$  и  $\theta(\xi, \kappa)$ , выбирался равным  $N = 5$ . Такое значение параметра  $N = 5$ , с одной стороны, позволяет достаточно точно решать прямую задачу методом Галеркина (погрешность не превосходит 2–3%), с другой стороны, системы нелинейных уравнений, возникающие при использовании метода алгебраизации, при таком значении параметра удается решать численно в сравнительно короткое время. Увеличение параметра  $N$  вносит существенные сложности в вычислительную реализацию, уменьшение влияет на точность решения прямой задачи и соответственно не позволяет произвести идентификацию должным образом.

**Пример 1.** Восстановление возрастающей квадратичной функции  $D(\xi) = 0.6 + 0.4\xi^2$ . Частотный диапазон выбирался между первой и второй резонансными частотами  $[\kappa_1, \kappa_2] = [3.4, 6.9]$ . На рис. 2 представлены графики точного решения (сплошная линия) и восстановленной функции (точки). В первом случае (рис. 2, а) восстановление производилось в классе линейных функций ( $M = 2$ ), во втором (рис. 2, б) — в классе квадратичных ( $M = 3$ ). Относительная погрешность восстановления в первом случае при этом не превосходит 6%, во втором случае функция восстановилась точно.

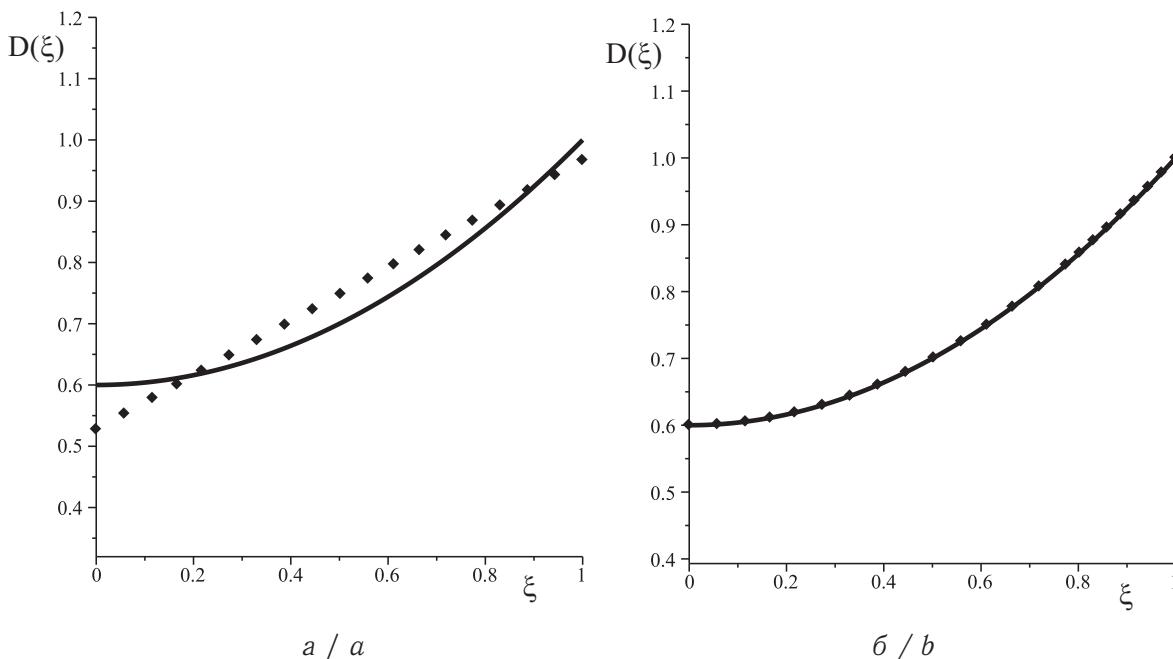


Рис. 2. Результат восстановления монотонно возрастающей функции жесткости:  
 а —  $M = 2$ ; б —  $M = 3$

Fig. 2. The result of the restoration of the monotonically increasing stiffness function:  
 а —  $M = 2$ ; б —  $M = 3$





**Пример 2.** Восстановление немонотонной функции  $D(\xi) = 1 + 0.25 \cos(\pi(\xi + 0.25))$ . Частотный диапазон выбирался до первой резонансной частоты  $[\kappa_1, \kappa_2] = [0.1, 3.1]$ . На рис. 3 представлены графики точного решения (сплошная линия) и восстановленной функции (точки). В первом случае (рис. 3, а) восстановление производилось в классе квадратичных функций ( $M = 3$ ), во втором (рис. 3, б) — в классе кубических ( $M = 4$ ). Относительная погрешность восстановления в первом случае при этом не превосходит 10%, во втором случае не превосходит 1.5%.

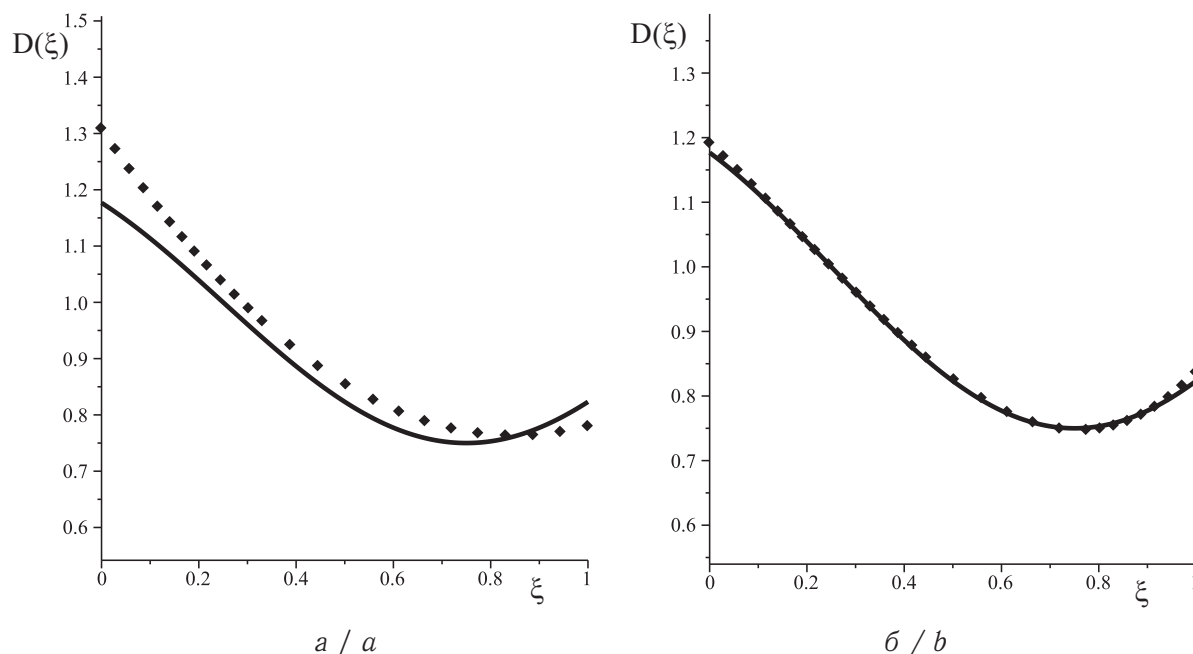


Рис. 3. Результат восстановления немонотонной функции жесткости: а —  $M = 3$ ;  
б —  $M = 4$

Fig. 3. The result of the restoration of the nonmonotonic stiffness function : а —  $M = 3$ ;  
б —  $M = 4$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Серия вычислительных экспериментов по определению переменной функции цилиндрической жесткости позволяет сделать вывод о достаточной эффективности проекционного метода решения обратной задачи. На практике полученная в результате решения обратной задачи на основе предложенного подхода информация об уровне, характере монотонности, расположении точек экстремумов искомых функций-характеристик может дать возможность использовать разработанный подход при решении многих прикладных задач.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00144 мол\_а) и Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1.

## Библиографический список

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М. : Физматлит, 2007. 223 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М. : Физматгиз, 1963. 635 с.



3. Григолюк Э. И. Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек. М. : ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Товстик П. Е. Неклассические модели балок, пластин и оболочек // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 72–85.
5. Товстик П. Е., Товстик Т. П. Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 32–45.
6. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models // Intern. J. Engineering Sci. 2015. Vol. 7. P. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.08.001.
7. Ковалев В. А. Динамика многослойных термовязкоупругих пластин // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 61–78.
8. Гук Н. А., Степанова Н. И. Идентификация геометрических параметров и упругих свойств жестких включений в тонкой пластине // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. Прикладная механика. 2016. Т. 2, № 7(80). С. 4–9. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
9. Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocail J. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions // J. Sound and Vibration. 2017. Vol. 404. P. 31–46. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.05.037.
10. Gu X., Pierron F. Towards the design of a new standard for composite stiffness identification // Composites Part A : Applied Science and Manufacturing. 2016. Vol. 91, pt. 2. P. 448–460. DOI: 10.1016/j.compositesa.2016.03.026.
11. Bogachev I. V., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate // Acoustical physics. 2016. Vol. 62, № 3. P. 377–382. DOI: 10.1134/S1063771016030052.
12. Фридман Л. И., Моргачев К. С. Построение и реализация решений задач нестационарных колебаний пластин (модель Тимошенко) // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. 2006. Т. 42, № 2. С. 92–102.
13. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М. : Мир, 1988. 352 с.

---

**Образец для цитирования:**

Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Лапина П. А., Недин Р. Д. Идентификация свойств неоднородной пластины в рамках модели Тимошенко // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 419–430. DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430.

---

## **Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model**

**I. V. Bogachev, A. O. Vatulyan, V. V. Dudarev, P. A. Lapina, R. D. Nedin**

Ivan V. Bogachev, [orcid.org/0000-0002-4725-5102](https://orcid.org/0000-0002-4725-5102), Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, [bogachev89@yandex.ru](mailto:bogachev89@yandex.ru)

Alexandr O. Vatulyan, [orcid.org/0000-0003-0444-4496](https://orcid.org/0000-0003-0444-4496), Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru)

Vladimir V. Dudarev, [orcid.org/0000-0003-2378-7574](https://orcid.org/0000-0003-2378-7574), Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, [dudarev\\_vv@mail.ru](mailto:dudarev_vv@mail.ru)



Polina A. Lapina, orcid.org/0000-0002-4589-0479, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, palapina@sfnu.ru

Rostislav D. Nedin, orcid.org/0000-0003-4366-9591, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8a, Mil'chakova Str., Rostov-on-Don, Russia, 344090, rdn90@bk.ru

We consider an inverse problem on identification of properties of an inhomogeneous circular plate for the Timoshenko model. The identification procedure is based on the analysis of acoustical response at some point of the plate in the given set of frequencies. The vibrations are caused by a uniformly distributed load applied to the upper face of the plate. We have derived the oscillation equations for a symmetric circular plate and formulated the boundary conditions in the dimensionless form. To solve the inverse problem on a reconstruction of the inhomogeneous bending stiffness function, we have developed a special solving technique called the 'algebraization method' based on a decomposition of the sought-for functions by systems of linearly independent functions. After substitution of these decompositions in the original motion equations, the inverse problem is reduced to solving a system of linear equations with respect to the expansion coefficients for the deflection function and the normal rotation angle, and subsequent solving of a system of nonlinear equations with respect to the expansion coefficients for the bending stiffness function. The method developed is illustrated by a series of computational experiments on a reconstruction of monotonic and non-monotonic functions showing its efficiency.

**Key words:** plate, Timoshenko model, identification, method of algebraization.

*Acknowledgements:* This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-00144mol\_a) and by the Program for Fundamental Research on the strategic directions of science development of the RAS Presidium no. 1.

## References

1. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p. (in Russian).
2. Timoshenko S. P., Voinovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [The plates and the shells]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 635 p. (in Russian).
3. Grigoluk E. I., Selezov I. T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhnej plastin i obolochek* [Nonclassical theories of vibrations of plates of plates and shells]. Moscow, VINITI, 1973. 272 p. (in Russian).
4. Tovstik P. E. On the non-classic models of beams, plates and shells. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 3, pp. 72–85 (in Russian).
5. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional model of an anisotropic non-uniform material plate. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solids*, 2017, no. 2, pp. 32–45 (in Russian).
6. Endo M. Study on an alternative deformation concept for the Timoshenko beam and Mindlin plate models. *Intern. J. Engineering Sci.*, 2015, vol. 7, pp. 32–48. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2017.08.001.
7. Kovalev V. A. Dynamics of multilayered thermoviscoelastic plates. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 61–78 (in Russian).
8. Guk N. A., Stepanova N. I. Identification of the geometry and elastic properties of rigid inclusions in a thin plate. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2016, vol. 2, no. 7(80), pp. 4–9 (in Russian). DOI: 10.15587/1729-4061.2016.64395.
9. Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocaill J. Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori



- knowledge of the principal directions. *J. Sound and Vibration*, 2017, vol. 404, pp. 31–46. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.05.037.
10. Pierron F., Gu X. Towards the design of a new standard for composite stiffness identification. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2016, vol. 91, pt. 2, pp. 448–460. DOI: 10.1016/j.compositesa.2016.03.026.
  11. Bogachev I. V., Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate. *Acoustical physics*, 2016, vol. 62, no. 3, pp. 377–382. DOI: 10.1134/S1063771016030052.
  12. Fridman L. I., Morgachev K. S. Construction and implementation of solutions to problems of nonstationary plate oscillations (Timoshenko model). *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 92–102 (in Russian).
  13. Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscow, Mir, 1988. 352 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Bogachev I. V., Vatulyan A. O., Dudarev V. V., Lapina P. A., Nedin R. D. Identification of Properties of Inhomogeneous Plate in the Framework of the Timoshenko Model. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 419–430 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2017-17-4-419-430.

---