



9. Liu C. P., Xu N. Magnetic response of chiral carbon nanotubes: The dependence of torus radius. *Physica B: Condensed Matter*, 2008, vol. 403, no. 17, pp. 2884–2887.
10. Wang X., Wang Z., Liu Yq., Wang C., Bai C., Zhu D. Ring formation and fracture of a carbon nanotube. *Chemical Physics Letters*, 2001, vol. 339, no. 1, pp. 36–40.
11. Glukhova O. E., Terentev O. A. Theoretical study of the dependence of Young's modulus and the torsion of thin single-wall carbon nanotubes zigzag and armchair on the geometrical parameters. *Solid State Phys.*, 2006, vol. 48, no. 7, pp. 1329–1335 (in Russian).
12. Glukhova O. E. Dimerization of miniature C₂₀ and C₂₈ fullerenes in nanoautoclave. *J. Molecular Modeling*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 573–576.
13. Wang Y., Tomanek D., Bertsh G. F. Stiffness of a solid composed of C₆₀ clusters. *Phys. Rev. B*, 1991, vol. 44, no. 12, pp. 6562–6565.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ АБРАЗИВНО-УСТАЛОСТНОМ ИЗНОСЕ

С. Н. Гребенюк¹, А. А. Бова², В. З. Юречко²

¹Кандидат технических наук, доцент кафедры математического анализа, Запорожский национальный университет, Украина, gsm1212@ukr.net

²Аспирант кафедры математического анализа, Запорожский национальный университет, Украина, bova-anna@mail.ru; iurichko@i.ua

Предложена математическая модель процесса деформации эластомерных элементов конструкций с учетом абразивно-усталостного износа на основе метода конечных элементов. Ввиду специфических свойств материала построена матрица жесткости конечного элемента на основе моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов. Для уточнения решений предусматривалось получение выражений для деформаций на базе дополнения исходного линейного аппроксимирующего полинома до полного кубического. Численная сходимость предложенной модели исследована на примере решения задачи Ляме для полого упругого цилиндра. Проведен расчет резиновой футеровки барабанно-шаровых рудоразмольных мельниц с учетом специфических свойств материала и условий деформирования.

Ключевые слова: эластомеры, резиновая футеровка, абразивно-усталостный износ, моментная схема конечного элемента.

ВВЕДЕНИЕ

Эластомеры получили широкое применение в качестве защитных футеровок в барабанно-шаровых рудоразмольных мельницах. Футеровка предназначена для предохранения внутренних поверхностей барабана мельницы от износа дробящей средой и размальываемым материалом. От морфометрических параметров футеровки зависит эффективность и производительность работы мельниц в целом.

Одним из важнейших вопросов является изучение деформирования резиновой футеровки с учетом абразивно-усталостного износа рабочих поверхностей.

Аналитические методы решения задач механики эластомеров [1–3] являются весьма громоздкими, поэтому их целесообразно применять лишь для конструкций относительно простой формы.

Применение численных методов позволяет получать решение задач для эластомерных элементов сложной геометрической формы. Универсальным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет получать полную картину напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой конструкции.

Исследованию методики применения МКЭ к расчету эластомерных конструкций посвящено большое количество работ. Так, в работах [4, 5] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера.

В работе [6] предложены вариационные формулировки, наиболее приемлемые для задач исследования слабосжимаемых эластомеров. Однако применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений, с нарушением положительной определенности матрицы уравнений.

В работах [7, 8] для учета слабой сжимаемости эластомеров предложен способ сокращенного интегрирования, состоящий в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются различными функциями.



В работе [9] рассмотрено развитие МКЭ и его модификации, изучены вопросы упругого, вязкоупругого линейного и нелинейного деформирования. В работе [10] предложен метод, разрешающие уравнения которого не содержат особенностей, связанных с малой сжимаемостью материала и малой толщиной слоя.

Вопросу изучения абразивно-усталостного износа конструкций посвящены следующие работы. В работе [11] исследуется механизм износа резиновой футеровки барабанной мельницы и проводится расчет ее оптимальной толщины. Целью работы [12] является построение обобщенной теории абразивно-усталостного износа упруго-наследственных сред с помощью двухкритериального уравнения долговечности. В работе [13] рассматривается динамическая модель волнового абразивно-усталостного износа резиновой футеровки в барабанных мельницах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для футеровки мельниц в большинстве случаев применяют резиновые полосы, привулканизированные к металлическим пластинам (рис. 1) и закрепляемые в барабане так, как показано на рис. 2.

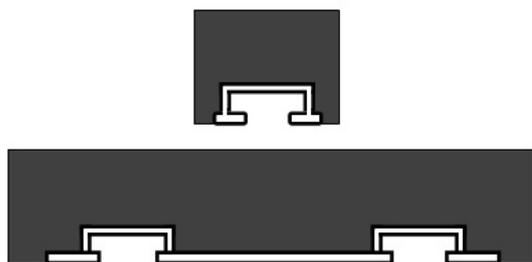


Рис. 1. Резиновые полосы

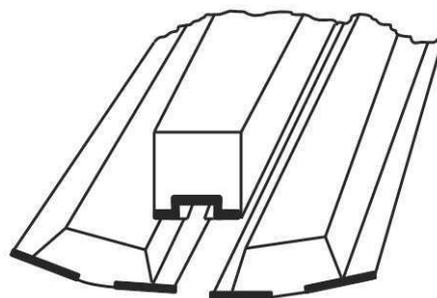


Рис. 2. Закрепление в барабане мельницы

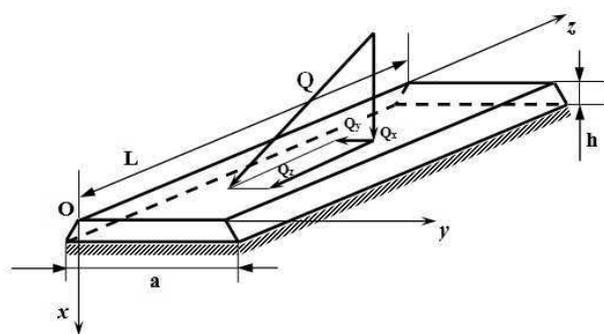


Рис. 3. Расчетная схема резиновой полосы

Решается статическая задача упругости в трехмерной постановке для резиновой полосы (РП), расчетная схема которой приведена на рис. 3: L — длина полосы, a — ширина, h — толщина. Вектор нагрузки Q необходимо представить в виде трех взаимно перпендикулярных векторов: Q_x — вектор нормальной нагрузки, Q_y и Q_z — векторы касательной нагрузки. Исходя из условий эксплуатации пропорциональные соотношения между этими величинами могут варьироваться. Снизу РП жестко закреплена, а боковые грани полосы свободны от нагрузок и защемления. Износ резиновой футеровки исследуется при эксплуатации мельницы диаметром 3.6 м.

2. ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ АБРАЗИВНО-УСТАЛОСТНОГО ИЗНОСА ЭЛАСТОМЕРОВ

Стандартный МКЭ не позволяет учитывать такого свойства эластомеров как слабая сжимаемость, когда материал имеет коэффициент Пуассона $\nu \rightarrow 0.5$. Тогда в процессе формирования матрицы жесткости (МЖ) возникает необходимость в вычислении коэффициента $E/(1-2\nu)$, где E — модуль упругости материала. При $\nu \rightarrow 0.5$ данная величина стремится к бесконечности, что приводит к потере точности получаемых результатов.

Для устранения этого недостатка можно использовать моментную схему конечного элемента (МСКЭ) [9], которая позволяет учитывать слабую сжимаемость материала, а также жесткие смещения КЭ и другое негативное свойство МЖ, связанное с появлением фиктивных сдвиговых деформаций — эффект «ложного» сдвига.

Разрушение эластомерной конструкции при абразивно-усталостном износе исследуется при помощи феноменологической модели [14]. Процесс поврежденности эластомера под действием внешних сил можно представить как образование и накопление в исходном материале некоторых областей, имеющих характер включений.



Предполагается, что материал в начальном состоянии однороден и изотропен, а материал включений обладает новыми существенно анизотропными свойствами. Модуль образующихся включений в n раз больше модуля основного материала (в работе [15] для резины на основе СКИ-3 получено $n = 1.2$), развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени.

С учетом вышеуказанных предположений можно построить макроскопическую характеристику эластомера в виде эффективного модуля упругости материала с изменяющимися от поврежденности свойствами.

Используя вариационный подход, построим МЖ конечного элемента на основе МСКЭ для слабо-сжимаемого материала при абразивно-усталостном износе.

Рассмотрим шестигранный КЭ. Введем две системы координат — базисную $Oz^1z^2z^3$ и местную криволинейную $O_1x^1x^2x^3$, связанную с КЭ (рис. 4).

Рассмотрим вариацию полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (1)$$

Здесь δW — вариация внутренней энергии упругого деформирования:

$$\delta W = \iiint_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv, \quad (2)$$

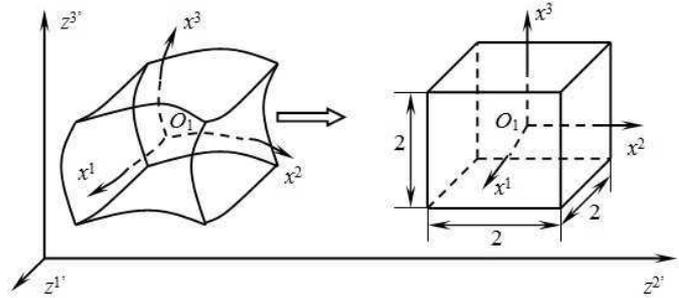


Рис. 4. Криволинейный конечный элемент

δA — вариация работы распределенных объемных P^i и поверхностных F^i сил:

$$\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds.$$

Компоненты тензора напряжений определяются на основе обобщенного закона Гука для изотропного тела с учетом абразивно-усталостного износа:

$$\sigma^{ij} = K g_{ij} \theta + 2G_3 \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right). \quad (3)$$

Здесь g^{ij} — компоненты метрического тензора ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$), K — модуль объемного сжатия, θ — функция изменения объема, G_3 — эффективный модуль упругости, который учитывает развитие микроповреждений в материале [15]:

$$G_3 = G_0 \left(n + \frac{(1-n)(1-p)(n+3/2)}{(n+3/2)+p(1-n)} \right),$$

где G_0 — модуль упругости исходного материала, $p = 1 - e^{-m}$ — функция, отображающая рост концентрации включений во времени, m — коэффициент снижения модуля упругости ($m = 1.2$ [14]).

Получаемая матрица модулей упругости с учетом вышеуказанных предположений будет иметь вид

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{56E_0(1-p)}{3(17p+28)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} \end{pmatrix}.$$



Подставим компоненты тензора напряжений (3) в вариацию энергии деформирования (2):

$$\delta W = \iiint_v \left(K g^{ij} \delta \theta + 2G_\vartheta \left(g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv. \quad (4)$$

Тогда вариация полной потенциальной энергии системы (1) примет вид

$$\delta \Pi = \iiint_v \left(K g^{ij} \delta \theta + 2G_\vartheta \left(g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv - \delta A.$$

Аппроксимацию перемещений для линейного параллелепипедного КЭ согласно МСКЭ представим в виде [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{k'}^{pqr} \psi^{pqr} = & \omega_{k'}^{000} + \omega_{k'}^{100} \psi^{100} + \omega_{k'}^{010} \psi^{010} + \omega_{k'}^{001} \psi^{001} + \\ & + \omega_{k'}^{110} \psi^{110} + \omega_{k'}^{101} \psi^{101} + \omega_{k'}^{011} \psi^{011} + \omega_{k'}^{111} \psi^{111}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_{k'}^{pqr}$ — коэффициенты разложения перемещений, ψ^{pqr} — набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{pqr} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p! q! r!}.$$

Однако в некоторых случаях применение МСКЭ для получения МЖ по заданным интерполяционным полиномам приводит к отбрасыванию значительного количества членов разложения деформаций, особенно для КЭ с высокой степенью аппроксимирующих полиномов. Данная проблема решается путем применения уточненной моментной схемы конечного элемента (УМСКЭ) [16, 17], которая предполагает получение выражений для деформаций на базе дополнения исходных аппроксимирующих полиномов КЭ до полных с последующим исключением «лишних» коэффициентов при дополнительных слагаемых.

Для уточнения решений приведем выражение для $\tilde{u}_{k'}$ (5) к полному кубическому полиному:

$$u_{k'} = \tilde{u}_{k'} + \Delta u_{k'}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_{k'} = & \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{200} \psi^{200} + \omega_{k'}^{020} \psi^{020} + \omega_{k'}^{002} \psi^{002} + \omega_{k'}^{210} \psi^{210} + \omega_{k'}^{201} \psi^{201} + \omega_{k'}^{120} \psi^{120} + \\ & + \omega_{k'}^{102} \psi^{102} + \omega_{k'}^{021} \psi^{021} + \omega_{k'}^{012} \psi^{012}) + \frac{1}{6} (\omega_{k'}^{300} \psi^{300} + \omega_{k'}^{030} \psi^{030} + \omega_{k'}^{003} \psi^{003}). \end{aligned}$$

Компоненты тензора деформаций разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{ij} e_{ij}^{stg} \psi^{stg}, \quad (7)$$

либо в матричной форме:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}, \quad (8)$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (9)$$

Вывод соотношений матрицы жесткости для слабосжимаемого материала с использованием предложенной аппроксимации в полном объеме представлен в работе [18]. Запишем дополнительные коэффициенты, входящие в разложение для $\Delta u_{k'}$:

$$\begin{aligned} \omega_{1'}^{200} = \omega_{1'}^{210} = \omega_{1'}^{201} = \omega_{1'}^{120} = \omega_{1'}^{102} = \omega_{1'}^{300} = \omega_{1'}^{030} = \omega_{1'}^{003} = \omega_{2'}^{020} = 0, \\ \omega_{2'}^{021} = \omega_{2'}^{012} = \omega_{2'}^{030} = \omega_{2'}^{210} = \omega_{2'}^{120} = \omega_{2'}^{300} = \omega_{2'}^{003} = \omega_{3'}^{003} = \omega_{3'}^{021} = 0, \\ \omega_{3'}^{002} = \omega_{3'}^{300} = \omega_{3'}^{030} = \omega_{3'}^{201} = \omega_{3'}^{102} = \omega_{3'}^{012} = 0, \quad \omega_{1'}^{021} = \omega_{3'}^{120} = -\omega_{2'}^{111} / 3, \\ \omega_{1'}^{020} = -\omega_{2'}^{110}, \quad \omega_{3'}^{200} = -\omega_{1'}^{101}, \quad \omega_{1'}^{012} = \omega_{2'}^{102} = -\omega_{3'}^{111} / 3, \quad \omega_{1'}^{002} = -\omega_{3'}^{101}, \end{aligned}$$



$$\omega_{2'}^{200} = -\omega_{1'}^{110}, \quad \omega_{2'}^{201} = \omega_{3'}^{210} = -\omega_{1'}^{111}/3, \quad \omega_{2'}^{002} = -\omega_{3'}^{011}, \quad \omega_{3'}^{020} = -\omega_{2'}^{011}. \quad (10)$$

Вспомогательный закон распределения перемещений трехмерного КЭ получаем на основе формул (6) и (10):

$$\begin{aligned} u_{1'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{1'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{2'}^{110} \psi^{020} + \omega_{3'}^{101} \psi^{002}) - \frac{1}{6} (\omega_{2'}^{111} \psi^{021} + \omega_{3'}^{111} \psi^{012}), \\ u_{2'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{2'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{110} \psi^{200} + \omega_{3'}^{011} \psi^{002}) - \frac{1}{6} (\omega_{1'}^{111} \psi^{201} + \omega_{3'}^{111} \psi^{102}), \\ u_{3'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{3'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{101} \psi^{200} + \omega_{2'}^{011} \psi^{020}) - \frac{1}{6} (\omega_{1'}^{111} \psi^{210} + \omega_{2'}^{111} \psi^{120}) \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\{u_{k'}\} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}. \quad (11)$$

Матрицы $[F_{ij}^{k'}]$ получаем на основе выражений (9) и известного теперь числа и вида коэффициентов e_{ij}^{pqr} с учетом (10).

Функция изменения объема, ответственная за слабую сжимаемость, представляется разложением

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{l-1} \xi^{\alpha\beta\gamma} \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad (12)$$

где $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ — коэффициенты разложения, определяемые соотношением

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta (\partial x^3)^\gamma} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (13)$$

либо в матричной форме:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (14)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (15)$$

Проанализируем выражения для компонент $\xi^{\alpha\beta\gamma}$, воспользовавшись формулами (10), (12) и (13); опустим те слагаемые, которые содержат наряду с коэффициентами разложения для θ коэффициенты разложения для деформаций, т.е. те, для которых не выполняется условие

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = e_{11}^{\alpha\beta\gamma} g^{11} + e_{22}^{\alpha\beta\gamma} g^{22} + e_{33}^{\alpha\beta\gamma} g^{33}.$$

Легко заметить, что необходимо учитывать только коэффициент ξ^{000} . Таким образом, получим приближенное значение функции изменения объема:

$$\theta = \xi^{000} = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33}.$$

С учетом (8) и (14) выражение (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta W &= 2G_s \iiint_v \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\} g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\}^T \{\psi_{kl}\} dv + (K - 2G_s/3) \iiint_v \{\xi\}^T \{\psi_\theta\} \delta \{\xi\} \{\psi_\theta\} dv = \\ &= \{\delta e_{ij}\}^T [H^{ijkl}] \{e_{kl}\} + \delta \{\xi\}^T [H^\theta] \{\xi\}, \\ [H^{ijkl}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2G_s g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \\ [H^\theta] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K - 2G_s/3) \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (16)$$

На основе (9) и (15) выражение (16) можем записать в следующем виде:

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] \{\omega_{t'}\} + \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_\theta^{s'}]^T [H^\theta] [F_\theta^{t'}] \{\omega_{t'}\}. \quad (17)$$



Принимая во внимание (11) и представление перемещений точек КЭ через функцию Лагранжа $\{N\}$ и узловые значения перемещений $\{u_i\}$:

$$\{u_{k'}\} = \{u_i\}^T \{N\},$$

запишем связь между степенными и аппроксимирующими функциями Лагранжа:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}\},$$

с учетом которой выражение (17) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \\ &= \delta\{u_{s'}\} [G^{s't'}] \{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}^T [G_{\theta}^{s't'}] \{u_{t'}\}, \\ [G^{s't'}] &= [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A], \quad [G_{\theta}^{s't'}] = [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \end{aligned}$$

МЖ КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$[M^{s't'}] = [G^{s't'}] + [G_{\theta}^{s't'}].$$

Таким образом, получена матрица жесткости для слабосжимаемого материала с кубической аппроксимацией перемещений на основе МСКЭ с учетом абразивно-усталостного износа.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ

Исследуем сходимость решений, полученных численно при использовании УМСКЭ, сравнивая их с аналитическим решением задачи Ляме [19]. Рассмотрим НДС полого цилиндра из эластомерного материала при абразивно-усталостном деформировании под внутренним давлением Q и жестком заземлении по внешнему контуру. Внутренний радиус равен a , внешний — b , r — полярный радиус. Аналитическая зависимость радиальных перемещений u_r при абразивно-усталостном деформировании от эффективного модуля упругости эластомера имеет следующий вид:

$$u_r = -\frac{Q}{2K + 2G_0 (1/3 + b^2/a^2)} (r - b^2/r).$$

Сравним перемещения точек внутренней поверхности цилиндра, получаемые численно с использованием традиционного МКЭ и УМСКЭ, с аналитическим решением. Исходные данные: внутренний радиус $a = 0.025$ м, внешний радиус $b = 0.1$ м, модуль объемного сжатия $K = 69.533 \times 10^6$ Па, модуль упругости матрицы эластомера $G_0 = 1.4 \times 10^6$ Па [10], коэффициент Пуассона $\nu = 0.49$, внутреннее давление $Q = 1.0 \times 10^6$ Па.

Как видно из таблицы, УМСКЭ имеет устойчивую сходимость при сгущении сетки дискретизации и дает предпочтительные результаты по сравнению со стандартным МКЭ, значительно приближая их к аналитическим.

Численная сходимость решений

Сетка дискретизации	МКЭ		МСКЭ		УМСКЭ	
	u_r , м	ε , %	u_r , м	ε , %	u_r , м	ε , %
$5 \times 5 \times 3$	0.0016135	18.1	0.0019336	1.8	0.0019992	1.5
$7 \times 7 \times 5$	0.0017804	9.6	0.0019395	1.5	0.0019890	1.0
$9 \times 9 \times 5$	0.0018583	5.6	0.0019434	1.3	0.0019859	0.9
$11 \times 11 \times 5$	0.0018994	3.5	0.0019473	1.1	0.0019846	0.8
$13 \times 13 \times 5$	0.0019233	2.3	0.0019493	1.0	0.0019839	0.8
Аналит. решение	0.001969					

Таким образом, предложенная конечно-элементная модель на основе УМСКЭ позволяет получать приемлемые результаты при расчете конструкций из эластомеров при абразивно-усталостном деформировании.



4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Изложенная методика реализована в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» [20], в рамках которого были получены основные параметры НДС РП в условиях абразивно-усталостного деформирования.

Исходные данные: длина $L = 1.5$ м, ширина $a = 0.6$ м, толщина $h = 0.1$ м, нагрузка $Q = 0.5$ МПа. В случае действия только нормальной нагрузки $Q_x = 0.5$ МПа, $Q_y = Q_z = 0$, нормальной и касательной — $Q_x = 408248$ Па, $Q_y = 204124$ Па, $Q_z = 204124$ Па. Расчеты были проведены для ряда марок резины при различных сетках дискретизации. Результаты представлены при сетке дискретизации $7 \times 11 \times 13$.

Распределение перемещений u_1 по толщине h РП при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,49$ для различных типов нагрузки представлено на рис. 5.

На рис. 6 показано распределение нормальных напряжений по толщине h РП при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$ для различных типов нагрузки.



Рис. 5. Распределение перемещений по толщине РП

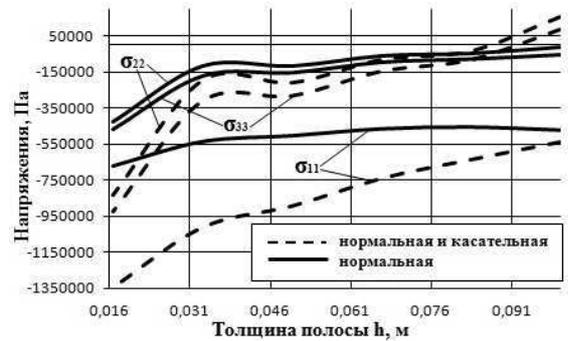


Рис. 6. Распределение напряжений по толщине РП

Распределение перемещений u_1 по толщине h РП для различных марок резины при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$ показано на рис. 7.

На рис. 8 представлено распределение перемещений u_1 по поверхностному слою РП толщиной 0.01 м при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$.

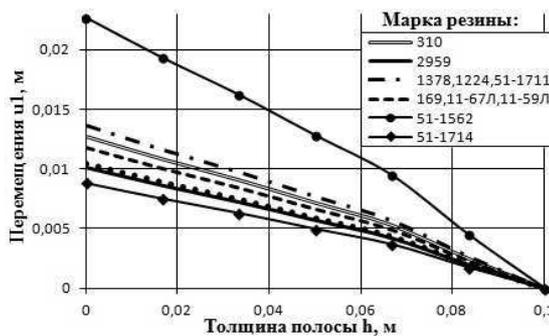


Рис. 7. Распределение перемещений по толщине РП

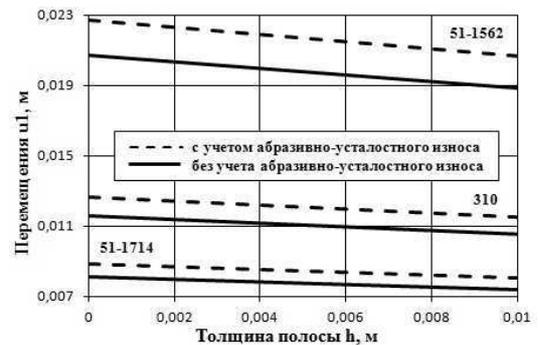


Рис. 8. Распределение перемещений по поверхностному слою РП

Анализ полученных результатов показывает, что совокупность нормальной и касательной нагрузок приводит к увеличению перемещений точек внешней поверхности футеровки на 50–53% по сравнению с нормальной нагрузкой (см. рис. 5). Учет абразивно-усталостного износа слабосжимаемого эластомера увеличивает нормальные сжимающие напряжения в месте интенсивного абразивно-усталостного износа на 33–89% (см. рис. 6), а также увеличивает перемещения точек внешней поверхности футеровки на 8–10% (см. рис. 8). Футеровка, выполненная из резины марки 51-1562, будет испытывать наибольшие деформации; использование резины марок 1378, 1224, 51-1711 позволяет снизить уровень деформации приблизительно на 40%, а резины марки 51-1714 — на 60% (см. рис. 7).



ВЫВОДЫ

Учет особенностей деформирования элементов конструкций из слабосжимаемых эластомеров с учетом абразивно-усталостного износа позволяет точнее определять полную картину напряженно-деформированного состояния в реальных условиях эксплуатации, что дает возможность повышать прочностной ресурс на стадии проектирования таких конструкций.

Библиографический список

1. Дымников С. И. Расчет резиновых элементов конструкций. Рига : Зинатне, 1991. 277 с.
2. Дырда В. И., Чижик Е. Ф., Кияшко В. И., Карачабан Н. Г. Резиновые детали в инженерной практике. Днепропетровск : Полиграфіст, 1998. 303 с.
3. Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. Киев : Наук. думка, 1990. 304 с.
4. Penn R. W. Volume Changes Accompanying Extension of Rubber // Trans. Soc. Rheol. 1970. Vol. 14, № 4. P. 507–517.
5. Дымников С. И., Мейерс И. Р., Эрдманис А. Г. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов // Вопр. динамики и прочности. 1983. Вып. 40. С. 98–108.
6. Пиан Т., Ли С. О методе конечных элементов для почти несжимаемых материалов // Ракетная техника и космонавтика. 1976. № 6. С. 147–149.
7. Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Intern. J. Numerical Methods Eng. 1971. Vol. 3, № 3. P. 275–290.
8. Oden I. T., Kikuchi N. Finite element methods for constrained problems in elasticity // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1983. Vol. 18, № 5. P. 701–725.
9. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев : Наук. думка, 2002. 655 с.
10. Кабриц С. А., Мальков В. М., Мансурова С. Е. Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 38–47.
11. Стецюк М. В., Луценко С. Н. Проблемы эксплуатации резиновой футеровки вибропитателей при добыче урановых руд // Геотехническая механика. 2013. Вып. 108. С. 229–235.
12. Кобец А. С., Дырда В. И., Калганков Е. В., Цаниди И. Н. Энергетическая оценка износа антифрикционных материалов // Геотехническая механика. 2012. Вып. 106. С. 78–90.
13. Дырда В. И., Калашиников В. А., Евенко С. Л., Маркелов А. Е., Хмель И. В., Стойко А. Динамическая модель волнового абразивно-усталостного разрушения резиновой футеровки в барабанных мельницах // Геотехническая механика. 2012. Вып. 106. С. 15–24.
14. Чижик Е. Ф., Дырда В. И. Феноменологическая модель разрушения резины при абразивно-усталостном износе // Геотехническая механика. 1999. № 11. С. 226–256.
15. Дырда В. И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. Киев. : Наук. думка, 1988. 232 с.
16. Сахаров А. С., Кислюцкий В. Н., Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев : Вища шк., 1982. 480 с.
17. Гребенюк С. М., Юречко В. З., Бова А. А. Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента // Вісн. Одеського національного університету. Математика і механіка. 2013. Т. 18, вып. 3(19). С. 49–58.
18. Гребенюк С. Н., Бова А. А. Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании. 2009. Т. 22. С. 55–64.
19. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.
20. Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». Киев : Наук. думка, 2005. 416 с.

The Stress-strain State of Elastomeric Constructions under Conditions of Abrasive Fatigue Wear

S. N. Grebenjuk, A. A. Bova, V. Z. Jurechko

Zaporozhskij National University, 66, Zhukovskogo str., Zaporozh'e, 69600, Ukraine, gsm1212@ukr.net, bova-anna@mail.ru, iuriechko@i.ua

In this paper the mathematical model of the deformation process of elastomeric elements of constructions with regard abrasive fatigue failure has been proposed. Due to the specific properties of material the stiffness matrix of finite element based on the finite element moment scheme for weakly compressible materials. To increase the accuracy of solutions has been envisaged the receipt of expressions for deformations on the base of adding the initial linear approximating polynomial to complete cubic polynomial. The numerical convergence of proposed model has been studied on the example of solution of Lyame task for hollow elastic cylinder. The rubber lining of drum-balls ore shredding mills was calculated taking in the account the specific properties of material and the deformation conditions.

Key words: the elastomers, rubber lining, abrasive fatigue wear, finite element moment scheme.



References

1. Dymnikov S. I. *Raschet rezinovyh elementov konstrukcij* [The calculation of rubber structural elements]. Riga, Zinatne, 1991, 277 p. (in Russian).
2. Dyrda V. I., Chizhik E. F., Kijashko V. I., Karachaban N. G. *Rezinovye detali v inzhenernoj praktike* [The rubber details in engineering practice]. Dnepropetrovsk, Poligrafist, 1998, 303 p. (in Russian).
3. Karnauhov V. G., Gumenjuk B. P. *Termomehanika predvaritel'no deformirovannyh vjazkouprugih tel* [Thermomechanics previously deformed viscoelastic bodies]. Kiev, Naukova dumka, 1990, 304 p. (in Russian).
4. Penn R. W. Volume Changes Accompanying Extension of Rubber. *Trans. Soc. Rheol.*, 1970, vol. 14, no. 4, pp. 507–517.
5. Dymnikov S. I., Mejers I. R., Jerdmanis A. G. Uprugie potentsialy dlja slaboszhimaemyh jelastomernyh materialov [The resilient potentials for weakly compressible elastomeric materials]. *Voprosy dinamiki i prochnosti*, 1983, no. 40, pp. 98–108. (in Russian).
6. Pian T., Li S. O metode konechnyh jelementov dlja pochty neszzhimaemyh materialov [On the finite element method for nearly incompressible materials]. *Raketsnaja tehnika i kosmonavtika*, 1976, no. 6, pp. 147–149. (in Russian).
7. Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Intern. J. Numer. Meth. Eng.*, 1971, vol. 3, no. 3, pp. 275–290.
8. Oden I. T., Kikuchi N. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Intern. J. Numer. Meth. Eng.*, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 701–725.
9. Kirichevskij V. V. *Metod konechnyh jelementov v mehanike jelastomero*v [The finite element method in the mechanics of elastomers]. Kiev, Naukova dumka, 2002, 655 p. (in Russian).
10. Kabric S. A., Mal'kov V. M., Mansurova S. E. Nelinejnye uravnenija ploskogo sloja dlja treh modelej jelastomernogo materiala [Nonlinear equations of plane layer for three models of elastomeric material]. *Izv. RAN. Mekh. Tverd. Tela*, 2001, no. 1, pp. 38–47. (in Russian).
11. Stecjuk M. V., Lucenko S. N. Problemy jekspluatatsii rezinovej futerovki vibropitatelej pri dobyche uranovyh rud [Problems of operation rubber lining of vibro feeders in the extraction of uranium ore]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2013, no. 108, pp. 229–235. (in Russian).
12. Kobec A. S., Dyrda V. I., Kalgankov E. V., Canidi I. N. Jenergeticheskaja ocenka iznosa antifrikcionnyh materialov [Energy assessment of wear of antifriction materials]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2012, no. 106, pp. 78–90. (in Russian).
13. Dyrda V. I., Kalashnikov V. A., Evenko S. L., Markelov A. E., Hmel' I. V., Stojko A. Dinamicheskaja model' volnovogo abrazivno-ustalostnogo razrushenija rezinovej futerovki v barabannyh mel'nichah [Dynamic model of wave abrasive fatigue failure of the rubber lining in rattlers]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2012, no. 106, pp. 15–24. (in Russian).
14. Chizhik E. F., Dyrda V. I. Fenomenologicheskaja model' razrushenija reziny pri abrazivno-ustalostnom iznose [The phenomenological model of destruction of rubber under conditions of abrasive fatigue wear]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 1999, no. 11, pp. 226–256. (in Russian).
15. Dyrda V. I. *Prochnost' i razrushenie jelastomernyh konstrukcij v jekstremal'nyh uslovijah* [Strength and fracture of elastomeric constructions in extreme conditions]. Kiev, Naukova dumka, 1988, 232 p. (in Russian).
16. Saharov A. S., Kislookij V. N., Kirichevskij V. V. *Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel* [The finite element method in the mechanics of solids]. Kiev, Vishcha shkola, 1982, 480 p. (in Ukrainian).
17. Grebenjuk S. M., Jurjehko V. Z., Bova A. A. Vyznachennja napruzhenno-deformovanogo stanu gumovogo bufera na osnovi momentnoi' shemy skinchenogo elementa [Determination of stress-strain state of rubber buffer on the basis of finite element moment scheme]. *Visnyk Odes'kogo nacional'nogo universytetu. Matematyka i mehanika*, 2013, vol. 18, no. 3(19), pp. 49–58 (in Ukrainian).
18. Grebenjuk S. N., Bova A. A. Povyshenie tochnosti momentnoj shemy konechnogo jelementa dlja slaboszhimaemyh materialov [The increase of the precision of the finite element moment scheme for weakly compressible materials]. *Sovremennye problemy i puti ih reshenija v nauke, transporte, proizvodstve i obrazovanii*, 2009, vol. 22, pp. 55–64 (in Russian).
19. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Basics of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaja shkola, 1982, 264 p. (in Russian).
20. Kirichevskij V. V., Dohnjak B. M., Kozub Ju. G. *Metod konechnyh jelementov v vychislitel'nom komplekse «MIRELA+»* [The finite element method in calculable complex «MIRELA +»]. Kiev, Naukova dumka, 2005, 416 p. (in Russian).