Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 187–197
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 187–197
https://mmi.sgu.ru DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197
EDN: https://elibrary.ru/FLTOEI

Научная статья
УДК 512.54

# Применение подхода групповых действий к решению линейных диофантовых уравнений

**И. С. Чистов✉, Л. М. Цыбуля**

Московский педагогический государственный университет, Россия, 119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, стр. 1

**Чистов Иван Сергеевич**, студент Института математики и информатики, i.chistow2014@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0008-0265-4346, SPIN: 1546-4903, AuthorID: 1321103

**Цыбуля Лилия Михайловна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, liliya-kinder@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7062-8782, AuthorID: 505215

**Аннотация.** В статье обоснован способ решения линейных диофантовых уравнений средствами теории групповых действий. Цель работы — ввести действия определенных групп на множестве линейных диофантовых уравнений и изучить их свойства, связанные с множеством решений данных уравнений. Методами теории групп удалось достичь цели и установить, что действия групп симметрий правильных $n$-мерных многогранников на множестве исследуемых уравнений сводятся к комбинации действий симметрической группы $S_n$ и группы автоморфизмов группы целых чисел $Aut(\mathbb{Z})$ на том же множестве. Изучена также связь между действиями группы параллельных переносов на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений: так, вектор общего решения уравнения, полученного в результате действия, можно найти как сумму вектора общего решения уравнения, которое подверглось действию, и вектора параллельного переноса. В данной статье было продолжено формирование класса линейных диофантовых уравнений. Так, стало возможным решать больше уравнений, используя решение всего одного представителя.

**Ключевые слова:** действие группы, симметрическая группа, группа диэдра, линейное представление группы, линейное диофантово уравнение

**Для цитирования:** *Чистов И. С., Цыбуля Л. М.* Применение подхода групповых действий к решению линейных диофантовых уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 187–197. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197, EDN: FLTOEI



Article

# Application of the group action approach to solving linear Diophantine equations

**I. S. Chistov✉, L. M. Tsybulya**

Moscow Pedagogical State University, 1/1 Malaya Pirogovskaya St., Moscow 119435, Russia

**Ivan S. Chistov**, i.chistow2014@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0008-0265-4346, SPIN: 1546-4903, AuthorID: 1321103

**Liliya M. Tsybulya**, liliya-kinder@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7062-8782, AuthorID: 505215

**Abstract.** The article substantiates a method for solving linear Diophantine equations using the theory of group actions. The purpose of this paper is to introduce actions of certain groups on the set of linear Diophantine equations and to study their properties related to the set of solutions of these equations. Using group-theoretic methods, we achieve the goal and establish that the actions of symmetry groups of regular $n$-dimensional polyhedra on the set of equations under study are reduced to a combination of the actions of the symmetric group $S_n$ and the automorphism group of the group of integers $Aut(\mathbb{Z})$ on the same set. The relationship between the actions of a group of parallel transfers on the set of linear Diophantine equations and on the set of their solutions is also studied: for example, the vector of the general solution of an equation obtained as a result of an action can be found as the sum of the vector of the general solution of the equation that was subjected to the action and the vector of parallel transfer. In this article, we continued the formation of a class of linear Diophantine equations. Thus, it became possible to solve more equations using the solution of just one representative.

**Keywords:** group action, symmetric group, dihedral group, linear representation of a group, linear Diophantine equation

**For citation:** Chistov I. S., Tsybulya L. M. Application of the group action approach to solving linear Diophantine equations. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 187–197 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-187-197, EDN: FLTOEI



## Введение

Закономерности, выявленные при действии группы на конкретном множестве, могут выступать средством рационального решения некоторых задач.

Цель работы — ввести действия группы диэдра $D_{2n}$ [1] и группы параллельных переносов $T_n$ на множестве линейных диофантовых уравнений, на множестве их решений $\mathbb{Z}^n$ и выявить взаимосвязи данных действий.

Требуется задать конкретные действия на исследуемых множествах, связать эти действия и заложить основы формальной теории действий над уравнениями.

В первом разделе введены и исследованы действия диэдральной группы и других групп симметрий правильных $n$-мерных многогранников на множестве линейных диофантовых уравнений и на множестве их решений; во втором показаны действия группы параллельных переносов; в последнем разделе содержатся практические рекомендации по применению описываемого подхода при решении линейных диофантовых уравнений.

Научная новизна исследования состоит в применении теории групповых действий на нестандартном объекте — множестве, состоящем из линейных диофантовых уравнений с $n$ переменными.

Научная значимость результатов исследования заключается в возможности использования и дальнейшего расширения механизма поиска решений различных диофантовых уравнений с помощью метода групповых действий, а также в формализации таких действий над уравнениями, как перестановка его коэффициентов или замена знака коэффициента.

## 1. Действия групп симметрий правильных $n$-мерных многогранников на множестве линейных диофантовых уравнений

**Определение 1** ([2]). *Линейным диофантовым уравнением (ЛДУ) с $n$ неизвестными* будем называть уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — целые числа, причем хотя бы одно $a_i \neq 0$, и при этом поставлена задача, чтобы неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимали только целые значения. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют *коэффициентами ЛДУ*.

**Определение 2.** Назовем линейное диофантово уравнение *совместным*, если оно имеет решения, и *несовместным* в противном случае.

Множество всех линейных диофантовых уравнений с $n$ неизвестными будем обозначать

$$LDE_n = \{D:\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \mid a_i,\ b \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Пусть $n = 2$. В этом случае мы будем иметь дело с группами симметрий правильных многоугольников, которые называются диэдральными группами (группами диэдра) [1].

Рассмотрим действие группы диэдра $D_8$ (с операцией $\circ$ правой композиции отображений) на множестве, содержащим все ЛДУ с двумя переменными и только их

$$LDE_2 = \{D:\ a_1x_1 + a_2x_2 = b \mid a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Устроим отображение

$$d_8 : D_8 \times LDE_2 \to LDE_2,$$

при котором каждой паре $(f, D)$ ставится в соответствие элемент

$$f \cdot D = f(D),$$

где $f(D)$ есть уравнение прямой, являющейся образом прямой, заданной уравнением $D$, при движении $f$.

По аналитическим соображениям под прямой иногда будем понимать ее уравнение и наоборот.

**Предложение 1.** *Отображение $d_8$ есть действие группы $D_8$ на $LDE_2$.*

**Доказательство.** Отображение $d_8$ задано корректно, так как для каждой пары существует и притом единствен результат в силу выбора подходящих множества $LDE_2$ и группы $D_8$.

В случае $n = 2$ ЛДУ с двумя неизвестными визуально отождествляются с прямыми, которые можно поворачивать относительно точки плоскости и отражать относительно других прямых в прямоугольной декартовой системе координат (ПДСК). При этом будет выбран стандартный базис. Все повороты будем осуществлять относительно начала ПДСК, а симметрии — относительно осей или биссектрис координатных углов ПДСК.

1. Результат отображения $d_8$ лежит в $LDE_2$, так как каждое из преобразований в $D_8$ сохранит целочисленность коэффициентов ЛДУ, а свободный член $b$ в конечном счете не изменится (далее в табл. 1 будет показано, как именно устроено данное действие).

2. Осталось проверить две аксиомы действия [3]:

1) пусть $f = id : \begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \end{cases}$ $\quad D : a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Тогда $id(D) = D$;

2) пусть $f, g \in D_8$. Тогда в силу задания действия $d_8$ справедливо требуемое

$$f(g(D)) = (f \circ g)(D). \qquad \square$$

Известно, что любое движение $f$ на плоскости в ПДСК $xOy$ задается следующими формулами

$$f : \begin{cases} x' = x\cos\varphi - \varepsilon y \sin\varphi + x_0, \\ y' = x \sin\varphi + \varepsilon y \cos\varphi + y_0, \end{cases}$$

где $\varepsilon = 1$, если движение первого рода, и $\varepsilon = -1$, если оно второго рода [4].

Положим $x = x_1$, $y = x_2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Выясним сначала результат действия группы $D_8$ элементом $R_O^{\frac{\pi}{2}}$, т. е. поворотом квадрата относительно начала координат на угол

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки. Поворот является движением первого рода, следовательно, $\varepsilon = 1$. Наконец, подставив $\varphi = \frac{\pi}{2}$, получим

$$R_O^{\frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x_1' = -x_2, \\ x_2' = x_1. \end{cases}$$

Тогда

$$R_O^{\frac{\pi}{2}} : \begin{cases} x_1 = x_2', \\ x_2 = -x_1'. \end{cases}$$

Выходит, что

$$D' = (a_1' x_1' + a_2' x_2' = b) = f \cdot D = f(D) = R_O^{\frac{\pi}{2}}(a_1 x_1 + a_2 x_2 = b) = \\ = (a_1 x_2' + a_2(-x_1') = b) = (-a_2 x_1' + a_1 x_2' = b).$$

Теперь выясним, что будет в случае действия, например, элементом $S_{y=0}$, т. е. симметрией квадрата относительно координатной оси $Ox$.

В данном случае представим ситуацию геометрически: для каждой точки только ордината меняется на противоположную, а абсцисса остается прежней. Получаем

$$S_{y=0} : \begin{cases} x_1' = x_1, \\ x_2' = -x_2, \end{cases} \quad \text{значит,} \quad S_{y=0} : \begin{cases} x_1 = x_1', \\ x_2 = -x_2', \end{cases}$$

т. е.

$$D' = (a_1' x_1' + a_2' x_2' = b) = f \cdot D = f(D) = S_{y=0}(a_1 x_1 + a_2 x_2 = b) = \\ = (a_1 x_1' + a_2(-x_2') = b) = (a_1 x_1' - a_2 x_2' = b).$$

Составим табл. 1, иллюстрирующую все результаты действия $D_8 \curvearrowright LDE_2$ и интерпретацию этого действия на язык других действий.

*Таблица 1 / Table 1*

Связь действий $a_\sigma$ и $a^{(-)}$ с действием группы $D_8$
The connection between the actions $a_\sigma$ and $a^{(-)}$ with the action of the group $D_8$

| $f$ | $f(D)$ | Интерпретация $f(D)$ |
|---|---|---|
| $R_O^0 = id$ | $D : a_1 x_1' + a_2 x_2' = b$ | $D$ |
| $R_O^{\frac{\pi}{2}}$ | $-a_2 x_1' + a_1 x_2' = b$ | $a^{(-+)}\big(a_{(12)}(D)\big)$ или $a_{(12)}\big(a^{(+-)}(D)\big)$ |
| $R_O^{\pi}$ | $-a_1 x_1' - a_2 x_2' = b$ | $a^{(--)}(D)$ |
| $R_O^{\frac{3\pi}{2}}$ | $a_2 x_1' - a_1 x_2' = b$ | $a^{(+-)}\big(a_{(12)}(D)\big)$ или $a_{(12)}\big(a^{(-+)}(D)\big)$ |
| $S_{y=0}$ | $a_1 x_1' - a_2 x_2' = b$ | $a^{(+-)}(D)$ |
| $S_{x=0}$ | $-a_1 x_1' + a_2 x_2' = b$ | $a^{(-+)}(D)$ |
| $S_{y=x}$ | $a_2 x_1' + a_1 x_2' = b$ | $a_{(12)}(D)$ |
| $S_{y=-x}$ | $-a_2 x_1' - a_1 x_2' = b$ | $a^{(--)}\big(a_{(12)}(D)\big)$ или $a_{(12)}\big(a^{(--)}(D)\big)$ |

Таким образом, любое действие диэдральной группы $D_8$ на множестве ЛДУ с двумя неизвестными есть не что иное, как последовательное применение ранее изученных действий $a_\sigma$, где $\sigma \in S_2$, и $a^{(-)}$. Данные действия описаны в работе [5] и представляют собой соответственно перестановку коэффициентов ЛДУ в порядке подстановки $\sigma$ и замену некоторых коэффициентов ЛДУ на им противоположные, причем для последнего случая в табл. 1 представлены уточняющие обозначения, а именно знак «$-$» использован для обозначения факта замены коэффициента на ему противоположный, а знак «$+$» — для обозначения того факта, что знак коэффициента остался прежним. Порядок данных знаков в обозначении отражает порядок следования коэффициентов ЛДУ.

Решим следующую задачу, пользуясь данными, представленными в табл. 1.

**Задача 1.** *Прямую, заданную уравнением $D: 2x_1 + 5x_2 = 7$, повернули на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ около начала координат. Найдите координаты всех целочисленных точек, принадлежащих образу прямой $D$.*

*Решение.* Задача сводится к решению ЛДУ $D' = R_O^{\frac{\pi}{2}}(D)$. Однако уравнение ЛДУ $D'$ можно не находить. Следует найти вектор общего решения ЛДУ $D$.

Так как $D' = a^{(-+)}\big(a_{(12)}(D)\big)$, то по [5] $z_{D'} = z^{(-+)}\big(z_{(12)}(z_D)\big)$.

Так как $z_D = (1 - 5t_2, 1 + 2t_2), t_2 \in \mathbb{Z}$, то $z_{D'} = (-1 - 2t_2, 1 - 5t_2), t_2 \in \mathbb{Z}$.

*Ответ*: $z_{D'} = (-1 - 2t_1, 1 - 5t_2)$, $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Обобщим действие $d_8$ на случай $n > 2$ или $n < 2$. В табл. 2 представлено, какая группа подходит для действия на ЛДУ с конкретным числом переменных $n$. Во всех этих случаях аналогично двумерному варианту будет прослеживаться связь с действиями $a_\sigma$ (где $\sigma \in S_n$) и $a^{(-)}$.

*Таблица 2 / Table 2*

Группы, подходящие для действия на $LDE_n$
Groups suitable for action on $LDE_n$

| $n$ | Группа, количество элементов в ней |
|---|---|
| 1 | Группа симметрий отрезка (в одномерном пространстве), 2 |
| 2 | Группа симметрий квадрата (в двумерном пространстве), 8 |
| 3 | Группа симметрий куба (в трехмерном пространстве), 48 |
| 4 | Группа симметрий тессеракта (в четырехмерном пространстве), 384 |
| 5 | Группа симметрий пентеракта (в пятимерном пространстве), 3840 |
| 6 | Группа симметрий гексеракта (в шестимерном пространстве), 46080 |
| ... | ... |
| $k$ | Группа симметрий $k$-мерного куба (в $k$-мерном пространстве), $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k = k! \cdot 2^k$ элементов |

Поясним, как было получено количество элементов в данных группах: каждое движение в $n$-мерном пространстве связано с ортогональной квадратной матрицей, которую можно, выбрав определенным образом базис, привести к блочно-диагональному виду. Определитель такой матрицы равен $\pm 1$. При этом в нашем случае (повороты на углы, кратные $\frac{\pi}{2}$, и отражения) в каждой строке и в каждом столбце матрицы может присутствовать лишь один ненулевой элемент — единица или единица со знаком минус, а остальные элементы матрицы суть нули. Можно уточнить, что ненулевые элементы располагаются на главной диагонали и/или на соседних с ней [6]. Посчитаем количество таких матриц, используя комбинаторные соображения.

1. Для $n$ строк и $n$ столбцов мы можем выбрать одну позицию для ненулевого элемента в каждой строке, что соответствует количеству перестановок из $n$ элементов. Количество перестановок из $n$ элементов равно $n!$.

2. Для каждого ненулевого элемента имеется два выбора: 1 или $-1$. Поскольку в каждой строке и в каждом столбце будет ровно один такой элемент, то их всего будет $n$ штук. Это дает нам $2^n$ способов выбрать ненулевой элемент.

Таким образом, общее количество ортогональных матриц размерности $n \times n$, составленных из элементов $0, 1, -1$ с заданными условиями, будет равно $n! \cdot 2^n$.

Рассмотрим линейное представление группы $D_8$ [7]. Для этого гомоморфно инъективно отобразим $D_8$ в группу $GL_2(\mathbb{Z})$ всех целочисленных матриц с определителем $\pm 1$ с операцией умножения матриц, т. е. имеем

$$h : D_8 \to GL_2(\mathbb{Z}).$$

Множество всех матриц, соответствующих движениям из $D_8$, обозначим через $\mathrm{Im}\,(h)$. Матричное представление элементов группы $D_8$ опишем ниже.

$$id \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_O^{\frac{\pi}{2}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_O^{\pi} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_O^{\frac{3\pi}{2}} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$S_{y=0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{x=0} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{y=x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{y=-x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При действии $d_8$ совместность уравнений является инвариантом, так как НОД коэффициентов снова делит свободный член образа.

Будем для удобства воспринимать элементы $\mathbb{Z}^2$ как векторы-строки или как векторы-столбцы в определенных ситуациях.

**Теорема 1.** *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$ – векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in \in LDE_2$ соответственно. Пусть имеется преобразование $f \in D_8$, и при этом $A_f \in \mathrm{Im}\,(h)$ есть матрица $f$. Тогда*

$$\forall\ D_1, D_2 \in LDE_2 \quad \big(D_2 = f(D_1) \implies z_2 = A_f \cdot z_1\big).$$

**Доказательство.** Используем соображения теории линейных операторов [8]. Действительно, так как $f$ переводит $D_1$ в $D_2$, то каждая точка прямой, заданной $D_2$, получается из точки прямой, заданной $D_1$, с помощью $A_f$. Решения ЛДУ $D_1$ представляют собой узлы целочисленной решетки, но тоже лежат на прямой, заданной $D_1$, поэтому именно с помощью $A_f$ можно получить все решения $D_2$. □

**Задача 2.** *Пусть ЛДУ $D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9$. Известно, что ЛДУ $D_2$ задает плоскость, полученную вращением плоскости, заданной $D_1$, на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ относительно оси $Ox$. Решите $D_2$.*

*Решение.* Имеется как минимум два способа решения: первый способ предполагает поиск явного вида ЛДУ $D_2$ и его непосредственное решение (теория групповых действий не используется), а второй не подразумевает обязательный поиск $D_2$, но подразумевает поиск матрицы преобразования (опирается на теорию групповых действий). Решим вторым способом.

Нетрудно видеть, что $z_{D_1} = (9-3t_2-5t_3, t_2, t_3)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$. Поворот в пространстве около оси абсцисс на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ обозначим через $f = R_{Ox}^{\frac{\pi}{2}}$. Матрица $f$ имеет вид [9]

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$z_{D_2} = A_f \cdot z_{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-3t_2-5t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3t_2-5t_3 \\ -t_3 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad t_2, t_3 \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ*: $z_{D_2} = (9-3t_2-5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.

**Задача 3.** *Имеется два ЛДУ:*

$$D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9, \quad D_2 : -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -9.$$

*Найдите явно решение только одного из них, а решение второго получите с помощью соображений из теории групповых действий.*

*Решение.* Для начала преобразуем ЛДУ $D_2$ в равносильное ему, домножив обе его части на $-1$. Тогда имеем

$$D_1 : x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9, \quad D_2 : x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9.$$

Решим сначала ЛДУ $D_1 : z_{D_1} = (9 - 3t_2 - 5t_3, t_2, t_3)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, так как

$$D_2 = a^{(+-+)}\big(a_{(23)}(D_1)\big),$$

то по теоремам связи действий на множестве $LDE_3$ и действий на множестве их решений $\mathbb{Z}^3$, описанных в [5], $z_{D_2} = z^{(+-+)}\big(z_{(23)}(z_{D_1})\big) = (9 - 3t_2 - 5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.

*Ответ*: $z_{D_1} = (9 - 3t_2 - 5t_3, t_2, t_3)$, $z_{D_2} = (9 - 3t_2 - 5t_3, -t_3, t_2)$, $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$.

## 2. Действия группы параллельных переносов на множестве линейных диофантовых уравнений

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $T_n$ — группу параллельных переносов $t_m$ на векторы $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ с операцией $\circ$ правой композиции отображений.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем отображение

$$\to_n : T_n \times LDE_n \to LDE_n,$$

определенное следующим образом: каждой паре $(t_m, D)$, где $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ есть вектор длины $n$ параллельного переноса $t_m$, поставим в соответствие элемент

$$t_m \cdot D = t_m(D),$$

где $t_m(D)$ есть уравнение прямой, являющейся образом прямой, заданной уравнением $D$, при движении $t_m$.

Выберем стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом заметим, что компоненты $m_i$, $i \in \mathbb{N}$, вектора $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ могут рассматриваться так же, как его координаты. Аналитически параллельный перенос задается следующими формулами [4]:

$$t_m : \begin{cases} x_1' = x_1 + m_1, \\ \ldots \\ x_n' = x_n + m_n, \end{cases}$$

значит,

$$t_m : \begin{cases} x_1 = x_1' - m_1, \\ \ldots \\ x_n = x_n' - m_n. \end{cases}$$

Пусть $D : (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b)$. Найдем образ $D$ при действии параллельным переносом $t_m$

$$\begin{aligned} D' = (a_1'x_1' + a_2'x_2' + \cdots + a_n'x_n' = b') = t_m(D) = t_m(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b) = \\ = (a_1(x_1' - m_1) + a_2(x_2' - m_2) + \cdots + a_n(x_n' - m_n) = b) = \\ = (a_1x_1' + a_2x_2' + \cdots + a_nx_n' = b + D(m)), \end{aligned}$$

где $D(m) = a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_nm_n = b' - b$ (представляет собой результат подстановки координат вектора параллельного переноса $m$ вместо переменных в левой части ЛДУ $D$).

**Предложение 2.** *Отображение $\to_n$ есть действие группы $T_n$ на $LDE_n$.*

**Доказательство.** Утверждение доказывается аналогично предложению 1 в силу схожести правил задания действий, о которых в данных предложениях идет речь. □

**Предложение 3.** *Действие $\to_n$ сохраняет совместность ЛДУ.*

**Доказательство.** Можно показать справедливость данного утверждения, используя НОД коэффициентов. □

Уточним следующей теоремой, как найти вектор общего решения образа, если известны вектор параллельного переноса и вектор общего решения прообраза.

**Теорема 2.** *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^n$ — векторы общего решения совместных ЛДУ $D_1, D_2 \in \in LDE_n$ соответственно. Пусть $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$ есть вектор параллельного переноса $t_m \in T_n$. Тогда*

$$\forall\ D_1, D_2 \in LDE_n \quad \big(D_2 = t_m(D_1) \implies z_2 = z_1 + m\big).$$

**Доказательство.** Данное утверждение справедливо в силу геометрической интерпретации параллельного переноса. Так, все точки, принадлежащие прямой (плоскости или гиперплоскости), заданной уравнением $D_1$, перенесутся на вектор $m$ в точки прямой (плоскости или гиперплоскости), заданной уравнением $D_2$. То же касается и решений $D_1$: так как все решения $D_1$ являютя узлами $\mathbb{Z}^n$, то в силу целочисленности координат вектора $m$ они также преобразуются в узлы $\mathbb{Z}^n$, но уже принадлежащие объекту, задаваемому уравнением $D_2$. Значит, данные узлы и являются решениями $D_2$. □

Для каждого действия, в частности, для всех действий, рассмотренных в данной работе, справедлива лемма 1 об обратимости действия.

**Лемма 1.** *Для произвольных $\tau \in S_2$, $f \in D_8$, $t_m \in T_2$ справедливо:*
*1) если $D_2 = a_\sigma(\tau, D_1)$, то $D_1 = a_\sigma(\tau^{-1}, D_2)$;*
*2) если $D_2 = a^{(-)}(f, D_1)$, то $D_1 = a^{(-)}(f^{-1}, D_2)$;*
*3) если $D_2 = d_8(f, D_1)$, то $D_1 = d_8(f^{-1}, D_2)$;*
*4) если $D_2 =\to_2 (t_m, D_1)$, то $D_1 =\to_2 (t_m^{-1}, D_2)$.*

**Доказательство.** Утверждение справедливо в силу определений группы и группового действия. □

## 3. Практические рекомендации к применению теории групповых действий при решении линейных диофантовых уравнений

При использовании данной теории на практике для решения конкретных ЛДУ стоит отметить, что действие группы чаще выступает не целью, а средством.

Рассмотрим следующую задачу.

Дано несколько ЛДУ $D_1, D_2, \ldots, D_s$, $s \in \mathbb{N}$, с одинаковым количеством неизвестных $n$. Требуется решить все данные ЛДУ.

Процесс решения с применением теории групповых действий может происходить по следующему предписанию.

1. Привести все ЛДУ к «удобному» виду (1): $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, упростить все ЛДУ, например, разделив обе части на отличный от единицы НОД всех коэффициентов или домножив обе части каких-либо уравнений на $-1$.

2. Вычленить минимум два похожих ЛДУ (например, определенная схожесть в коэффициентах).

3. Определить, может ли какое-либо из этих двух ЛДУ быть получено из другого с помощью группового действия, используя признак действия (ниже).

4. Спрогнозировать, будет ли рациональным использовать групповые действия при решении данной задачи.

5. В случае положительного ответа на вопрос 3 следует решить одно ЛДУ из двух выбранных (то, которое решается проще/быстрее) и применить теорему о связи решений для двух данных ЛДУ, при этом выбрав теорему рационально, если теорем несколько. Для рационального выбора теоремы использовать условие задачи.

Ниже сформулированы признаки действия групп на множестве линейных диофантовых уравнений с учетом применения к ним шага 1 выше [10]. Далее, говоря «ЛДУ-образ» или «ЛДУ-прообраз», будем иметь в виду соответственно ЛДУ, получившееся в результате некоторого действия, и ЛДУ, подвергшееся этому действию.

**Признак 1 ($S_n \curvearrowright LDE_n$).** Если множества коэффициентов ЛДУ $D_1$ и $D_2$ совпадают, однако, быть может, порядок их следования отличается, а свободные члены одинаковы, то ЛДУ $D_1$ и $D_2$ могут быть получены друг из друга описанными в [5] действиями $S_n$.

**Признак 2 ($Aut(\mathbb{Z}) \curvearrowright LDE_n$).** Если множества абсолютных значений коэффициентов ЛДУ $D_1$ и $D_2$ совпадают, порядок следования абсолютных значений коэффициентов неизменен, абсолютные значения свободных членов ЛДУ совпадают, то ЛДУ $D_1$ и $D_2$ могут быть получены друг из друга описанными в [5] действиями $Aut(\mathbb{Z})$.

**Признак 3 ($D_8 \curvearrowright LDE_2$).** Если множества абсолютных значений коэффициентов ЛДУ $D_1$ и $D_2$ совпадают, однако, быть может, порядок их следования отличается, но абсолютные значения свободных членов также совпадают, то ЛДУ $D_1$ и $D_2$ могут быть получены друг из друга описанным выше действием $D_8$.

Данный признак обобщается на действия групп, приведенных в табл. 2.

**Признак 4 ($T_n \curvearrowright LDE_n$).** Если ЛДУ $D_1$ и $D_2$ оба совместны и отличаются только свободным членом, то ЛДУ $D_1$ и $D_2$ могут быть получены друг из друга описанным выше действием $T_n$.

Процесс нахождения координат вектора параллельного переноса состоит опять же в нахождении решения ЛДУ, но уже другого: $a_1m_1 + ... + a_nm_n = b_2 - b_1$, относительно переменных $m_i$, при этом достаточно найти (возможно, подбором) хотя бы одно его частное решение, которое и будет являться искомым вектором $m$.

К слову, любые два ЛДУ от двух переменных (на плоскости), отличающиеся только свободным членом, задают две параллельные прямые, значит, всегда существует вектор параллельного переноса $m$ такой, что $D_2 = t_m(D_1)$. Однако если какое-либо из данных уравнений не совместно, то ясно, что $m \notin \mathbb{Z}^2$.

Рассмотрим произвольное совместное ЛДУ $D : (a_1x_1 + a_2x_2 = b) \in LDE_2$. Пусть $d = \text{НОД}(a_1, a_2)$. Тогда уравнение

$$D' : \left(\frac{a_1}{d}x_1 + \frac{a_2}{d}x_2 = \frac{b}{d}\right)$$

равносильно $D$.

Пусть $(x_{10}, x_{20})$ есть частное решение уравнения $D'$. Тогда его общее решение выглядит так:

$$z_t = \left(x_{10} + \frac{a_2}{d}t, x_{20} - \frac{a_1}{d}t\right), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем произвольный параметр $t$, породив какое-либо одно решение ЛДУ $D$ ($D'$).

**Определение 3.** Назовем два решения ЛДУ $a_1x_1 + a_2x_2 = b \in LDE_2$ *соседними*, если целые параметры, порождающие их, отличаются на единицу.

В нашем случае соседнее решение породится, например, параметром $t + 1$:

$$z_{t+1} = \left(x_{10} + \frac{a_2}{d}(t+1), x_{20} - \frac{a_1}{d}(t+1)\right), t \in \mathbb{Z}.$$

**Определение 4.** *Расстоянием между соседними решениями* $z_t, z_{t+1} \in \mathbb{Z}^2$ ЛДУ $a_1x_1 + a_2x_2 = b \in LDE_2$ будем называть длину отрезка, концами которого являются точки $z_t$ и $z_{t+1}$.

**Лемма 2.** *Пусть* $D : (a_1x_1 + a_2x_2 = b) \in LDE_2$ *совместно. Тогда расстояние между любыми двумя соседними решениями ЛДУ* $D$ *на плоскости постоянно и вычисляется по формуле*

$$s = \frac{1}{d}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \text{где } d = \text{НОД}(a_1, a_2).$$

**Доказательство.** Найдем соответственно расстояния между абсциссами двух соседних решений ЛДУ и их ординатами: $s_x$ и $s_y$.

$$s_x = \left|x_{10} + \frac{a_2}{d}(t+1) - (x_{10} + \frac{a_2}{d}t)\right| = \left|\frac{a_2}{d}\right|, \ s_y = \left|x_{20} - \frac{a_1}{d}(t+1) - (x_{20} - \frac{a_1}{d}t)\right| = \left|\frac{a_1}{d}\right|.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами $\left|\frac{a_2}{d}\right|$ и $\left|\frac{a_1}{d}\right|$ гипотенуза, а значит, и искомое расстояние вычисляется следующим образом:

$$s = \sqrt{\left(\frac{a_1}{d}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{d}\right)^2} = \frac{1}{d}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \qquad \square$$

Геометрически, так как на плоскости расстояние между любыми двумя решениями ЛДУ в пределах одной прямой постоянно и определяется посредством коэффициентов и их НОД, о чем говорит лемма 2, в силу параллельности прямых, на которых располагаются решения, можно выбрать вектор параллельного переноса не единственным образом. Алгебраически данный факт подкрепляется тем, что у совместного ЛДУ $a_1m_1 + ... + a_nm_n = b_2 - b_1$ бесконечно много частных решений.

**Задача 4.** *Даны два ЛДУ* $D_1 :\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1$, $D_2 :\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 16$. *Вектор* $z_1 = (1 - t_2 - 2t_3, 1 + 2t_2 - 3t_3, -1 - t_2 + 3t_3)$ *(где* $t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$*) есть общее решение* $D_1$. *Можно ли решить* $D_2$, *зная решение* $D_1$? *Если да, то как?*

*Решение.* Согласно признаку 4 действия $\rightarrow_3$, существует (причем не является единственным) вектор $m = (m_1, m_2, m_3)$ такой, что $D_2 = \rightarrow_n (m, D_1) = t_m(D_1)$. Найдем $m$. Так как $b_2 = b_1 + D_1(m)$, то $D_1(m) = b_2 - b_1$, т. е. $3m_1 + 5m_2 + 7m_3 = 15$. Подбором находим, что $m = (1, 1, 1)$.

Значит, по теореме 2 $z_2 = z_1 + m = (1 - t_2 - 2t_3, 1 + 2t_2 - 3t_3, -1 - t_2 + 3t_3) + (1, 1, 1) = (2 - t_2 - 2t_3, 2 + 2t_2 - 3t_3, -t_2 + 3t_3)$.

*Ответ*: да, $D_2$ можно решить не напрямую, а зная лишь решение $D_1$, пользуясь при этом действием $\rightarrow_3$ .

## Заключение

По ходу работы были получены следующие важные результаты и выводы [10]:

1) действия группы диэдра на множестве линейных диофантовых уравнений сводятся к комбинации действий, описанных в [5]: к перестановке коэффициентов и замене некоторых коэффициентов на противоположные им;

2) действие, порожденное параллельным переносом, индуцирует перемещение всех решений исходного уравнения на вектор параллельного переноса;

3) были даны рекомендации к применению подхода групповых действий, а также выявлены признаки описываемых действий;

4) такие действия над уравнениями, как перестановка коэффициентов или замена их знаков, были формализованы средствами теории групп в [5] и продолжили свое формальное описание в данной работе.

Таким образом, все задачи работы решены, и цель достигнута.

Исследование возможно расширить, например, в следующих направлениях:

– разработать подход групповых действий для решения нелинейных диофантовых уравнений;

– выявить структуру множества действий конкретной группы на множестве ЛДУ.

## Список литературы


1. *Dummit D. S., Foote R. M.* Abstract algebra. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2004. 932 p.
2. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. Москва : Просвещение, 1966. 384 с.
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру : в 3 ч. Ч. 3. Основные структуры. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2004. 272 с. EDN: UGLDTF
4. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия : в 2 ч. Ч. 1. Москва : Просвещение, 1986. 336 с.
5. *Чистов И. С., Цыбуля Л. М.* Связь между решениями линейных диофантовых уравнений при действиях группы подстановок и группы автоморфизмов целых чисел // Чебышевский сборник. 2025. Т. 26, вып. 5. С. 259–279. DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279, EDN: JYVEIN
6. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. Москва : Наука, 1971. 271 с.
7. *Винберг Э. Б.* Линейные представления групп. Москва : Наука, 1985. 144 с.
8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру : в 3 ч. Ч. 2. Линейная алгебра. Москва : Физматлит, 2000. 368 с.
9. *Шафаревич И. Р., Ремизов А. О.* Линейная алгебра и геометрия. Москва : Физматлит, 2009. 512 с.
10. *Чистов И. С., Цыбуля Л. М.* О решении линейных диофантовых уравнений в рамках подхода групповых действий // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии : тр. XXV Междунар. конф. (Нижний Новгород, 17–19 ноября 2025 г.). Нижний Новгород : Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2025. С. 189–194. EDN: CQMNWF


## References


1. Dummit D. S., Foote R. M. *Abstract Algebra*. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2004. 932 p.
2. Bukhshtab A. A. *Teoriya chisel* [Number theory]. Moscow, Prosveshchenie, 1966. 384 p. (in Russian).
3. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru. Ch. 3. Osnovnye struktury* [Introduction to algebra. Pt. 3. Basic structures]. 3rd. ed. Moscow, Fizmatlit, 2004. 272 p. (in Russian). EDN: UGLDTF
4. Atanasyan L. S., Bazylev V. T. *Geometriya. Ch. I* [Geometry. Pt. I]. Moscow, Prosveshchenie, 1986. 336 p. (in Russian).
5. Chistov I. S., Tsybulya L. M. The connection between the linear Diophantine equations solutions under the actions of the symmetric group and the automorphism group of the integers. *Chebyshevskiy sbornik*, 2025, vol. 26, iss. 5, pp. 259–279 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-5-259-279, EDN: JYVEIN
6. Gelfand I. M. *Lektsii po lineynoy algebre* [Lectures on linear algebra]. Moscow, Nauka, 1971. 271 p. (in Russian).
7. Vinberg E. B. *Lineynye predstavleniya grupp* [Linear representations of groups]. Moscow, Nauka, 1985. 144 p. (in Russian).
8. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru. Ch. 2. Lineynaya algebra* [Introduction to algebra. Pt. 2. Linear algebra]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 368 p. (in Russian).
9. Shafarevich I. R., Remizov A. O. *Lineynaya algebra i geometriya* [Linear algebra and geometry]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 512 p. (in Russian).
10. Chistov I. S., Tsybulya L. M. On the Solution of linear Diophantine equations within the framework of the group actions approach. *Matematicheskoe modelirovanie i superkomp'yuternye tekhnologii* [Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies]. Proceedings of the XXV International Conference (Nizhny Novgorod, November 17–19, 2025). Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2025, pp. 189–194 (in Russian). EDN: CQMNWF


Поступила в редакцию / Received 17.02.2026
Принята к публикации / Accepted 02.03.2026
Опубликована / Published 01.06.2026