



Научная статья

УДК 531/534+577.354

Сравнение гиперупругих и формально определенных деформационных моделей сухожилия стременной мышцы среднего уха

С. А. Муслов¹, П. Ю. Сухочев²✉

¹Российский университет медицины, Россия, 127006, г. Москва, ул. Долгоруковская, д. 4

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1

Муслов Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доктор биологических наук, профессор кафедры нормальной физиологии и медицинской физики, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Сухочев Павел Юрьевич, научный сотрудник лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем, ps@moids.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются некоторые нерешенные вопросы механических свойств органов среднего уха — его сухожилий, в частности сухожилия стременной мышцы (стременного сухожилия). Механические свойства биологических тканей являются центральной темой биомеханики и биоинженерии. Механические характеристики выступают важными параметрами при компьютерном моделировании органов и тканей в процессе их функционирования или при внешнем воздействии. Механические свойства стременного сухожилия среднего уха человека рассмотрены в рамках наиболее часто встречающихся в литературе гиперупругих, а также формально определенных деформационных моделей, позволяющих описать экспериментальную кривую с наименьшей погрешностью. Расчеты выполнены в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 с помощью специально разработанного функционала. Соответствие данных механических испытаний и модельных данных оценивали с помощью показателей описательной статистики. Результаты показали, что модели полиномиальная и Веронда–Вестманн, а также экспоненциальная являются наиболее точными в плане подгонки экспериментальных данных. Критерию Хилла–Друкера $E > 0$ и условию $\partial E / \partial \lambda > 0$ удовлетворяют модели Огдена, Йео, Веронда–Вестманн, Фанга и Гента, а также одна из формально определенных (экспоненциальная модель). Не рекомендовано применение 2-параметрической модели Муни–Ривлина в недеформированном состоянии и при небольших деформациях из-за потери моделью механической устойчивости в этом диапазоне λ . Полученные в работе результаты могут быть использованы в практических целях при создании физической модели и конечно-элементном моделировании среднего уха, а также в реконструктивно-восстановительной хирургии при подборе искусственных замещающих материалов для протезирования и пластики (стапедопластики).

Ключевые слова: гиперупругие модели, среднее ухо, сухожилие стременной мышцы

Благодарности: Авторы выражают признательность врачу оториноларингологу Шуебу Насру Гариновичу за консультации по вопросам анатомии органов среднего уха.

Для цитирования: *Муслов С. А., Сухочев П. Ю.* Сравнение гиперупругих и формально определенных деформационных моделей сухожилия стременной мышцы среднего уха // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2026. Т. 26, вып. 2. С. 251–264. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-251-264>, EDN: PRWOZZ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Comparison of hyperelastic and formally defined deformation models of the stapedius tendon of the middle ear

S. A. Muslov¹, P. Yu. Sukhochev²✉

¹Russian University of Medicine, 4 Dolgorukovskaya St., Moscow 127006, Russia

²Lomonosov Moscow State University, GSP-1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

Sergey A. Muslov, muslov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9752-6804>, SPIN: 7213-2852, AuthorID: 185513

Pavel Yu. Sukhochev, ps@moids.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8004-6011>, SPIN: 7780-8694, AuthorID: 1004519

Abstract. This article examines some unresolved issues concerning the mechanical properties of the middle ear organs — its tendons, in particular the stapedius tendon. The mechanical properties of biological tissues are a central topic in biomechanics and bioengineering. Mechanical characteristics are important parameters in computer modeling of organs and tissues during their functioning or under external influences. Mechanical properties of the stapedius tendon of the human middle ear are examined within the framework of the most commonly used hyperelastic models in the literature, as well as formally defined deformation models that allow for the description of the experimental curve with minimal error. The calculations were performed in the Mathcad 15.0 computer algebra system using specially developed functionality. The agreement between mechanical test data and model data was assessed using descriptive statistics. The results showed that the polynomial, Veronda–Westmann, and exponential models were the most accurate in terms of fitting the experimental data. The Hill–Drucker criterion $E > 0$ and the condition $\partial E/\partial \lambda > 0$ are satisfied by the Ogden, Yeoh, Veronda–Westmann, Fung, and Gent models, as well as one formally defined model (the exponential model). It is not recommended to use the 2-parameter Mooney–Rivlin model in the undeformed state and under small deformations due to the loss of mechanical stability of the model in this range λ . The results obtained in the work can be used for practical purposes in the creation of a physical model and finite element modeling of the middle ear, as well as in reconstructive surgery in the selection of artificial replacement materials for prosthetics and plastic surgery (stapedoplasty).

Keywords: hyperelastic models, middle ear, stapedius tendon

Acknowledgements: The authors are grateful to Nasr Gairovich Shueb, an otorhinolaryngologist, for his advice on the anatomy of the middle ear organs.

For citation: Muslov S. A., Sukhochev P. Yu. Comparison of hyperelastic and formally defined deformation models of the stapedius tendon of the middle ear. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2026, vol. 26, iss. 2, pp. 251–264 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2026-26-2-251-264>, EDN: PRWOZZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Ухо состоит из двух систем: слуховой системы, которая отвечает за слух, и вестибулярной системы, связанной с равновесием тела, ориентацией и балансом. Анатомически его можно разделить на три части: наружное, среднее и внутреннее ухо [1]. Внутреннее ухо отвечает за восприятие звуков и контроль равновесия. Полукружные каналы и волосковые клетки вестибулярной системы позволяют контролировать равновесие и координацию движений.

Среднее ухо содержит три небольшие косточки — слуховые косточки (молоточек, наковальня и стремя), которые передают звуковые колебания от барабанной перепонки к внутреннему уху. Эти слуховые косточки соединены с наружным ухом небольшими связками и



прикреплены к барабанной перепонке рукояткой молоточка, а основание стремени соединяется с внутренним ухом через овальное окно. Однако слуховые косточки могут подвергаться различным повреждениям, например отосклерозу, что требует применения механического протеза путем хирургического вмешательства. Для изучения возможности применения протеза очень важно достичь точного моделирования механического поведения среднего уха и знания его механических свойств [2].

Сухожилие стремени мышцы (*tendo musculi stapedis*) выполняет следующие функции: удерживает слуховые косточки в состоянии напряжения, наиболее благоприятного для проведения звука; ограничивает колебания стремени, уменьшая амплитуду колебаний слуховых косточек при высоких значениях звукового давления; предохраняет внутреннее ухо от чрезмерных колебаний; играет роль демпфера, гася избыточные колебания системы «наковальня — протез стремени» [3].

Среднее ухо, конечно, представляет собой нечто большее, чем просто механическая система: оно имеет физиологические аспекты, которые напрямую влияют на его механическое поведение. Однако даже при изучении только с механической точки зрения оно представляет значительные трудности. Во-первых, ухо имеет сложную и неправильную геометрию, включающую ряд различных структур, охватывающих широкий диапазон размеров. Его общие размеры находятся в диапазоне десятков миллиметров, но есть и размеры, измеряемые в микрометрах (например, толщина барабанной перепонки). Можно пойти еще дальше и рассмотреть размеры коллагеновых волокон, которые имеют важное значение для механики барабанной перепонки. Смещения, которые необходимо измерить для характеристики механики среднего уха, могут быть очень малыми, достигая нанометров в ответ на звуковое давление, но очень большими, достигая миллиметров в ответ на статическое давление. Временные масштабы механических реакций среднего уха варьируются от десятков микросекунд для высокочастотных звуков до десятков секунд для изменений статического давления. Кроме того, с точки зрения клеточной биологии структуры уха преобразуют механический стимул в электрохимическую активность за счет механотрансдукции. Эта форма сенсорной трансдукции отвечает за ряд чувств и физиологических процессов в организме, включая равновесие и слух. Основной механизм механотрансдукции заключается в преобразовании механических сигналов в электрические или химические сигналы [4].

Сложность задачи для наружного и среднего уха усугубляется наличием множества различных типов тканей, обладающих очень разными механическими свойствами: кость; фиброзная соединительная ткань с коллагеном, эластином и основным веществом; мышцы, как поперечнополосатые, так и гладкие; хрящ, как кальцифицированный, так и некальцифицированный, и синовиальная жидкость [5]. В некоторых случаях сухожилие стремени мышцы восстанавливают с помощью тендопластики. Однако открытым остается вопрос о свойствах замещающего материала трансплантата.

Авторы [6] указывают на большую неопределенность в свойствах жесткости барабанной перепонки, связок и сухожилий среднего уха. В [7] отмечают, что механические свойства тканей уха позволяют получить ценные сведения о различных патологиях уха и подчеркивают его потенциал для возможного клинического применения и в диагностических целях.

Конечно-элементное моделирование среднего уха было выполнено в работе [8]. Для этих целей представлено динамическое исследование с использованием программы ABAQUS. Соединение между слуховыми косточками было выполнено с использованием формулировки, учитывающей контактное взаимодействие тел.

Модель E.A.L.S. Martins et al. включала различные связки опорной структуры и учитывала гиперупругое поведение компонентов [9]. Авторы констатировали, что количественное понимание механического поведения наружного и среднего уха важно не только для улучшения диагностики и лечения кондуктивной тугоухости, но и в связи с другими аспектами слуха, зависящими от проводящих путей, а математическое моделирование полезно для достижения этого понимания.



В [10] была разработана конечно-элементная модель человеческого уха, учитывающая вязкоупругость и гиперупругость мягких тканей среднего уха. Учитывая, что в большинстве опубликованных моделей рассматривается только один тип свойств материала (гиперупругость или вязкоупругость), учет как вязкоупругости, так и гиперупругости помог создать точную модель человеческого уха.

Cheng Tao et al. утверждали, что в литературе отсутствуют данные об измерении механических свойств стремного сухожилия среднего уха человека [11]. В своей работе они использовали систему испытаний материалов для проведения одноосных испытаний на растяжение, релаксацию напряжений и разрушение образцов сухожилия. Авторы декларируют, что представленные в работе данные вносят вклад в механику уха человека, особенно в теоретический анализ функций уха. Зависимость напряжения от деформации, полученная в ходе экспериментов, была проанализирована с использованием гиперупругой модели Огдена. Материальные константы модели, вычисленные в MATLAB v.7.0, составили $\mu_1 = 0.05$ МПа, $\alpha_1 = 17.40$, коэффициент корреляции 0.98 (SD = 0.03). В качестве расчетного уравнения использовали соотношение

$$\sigma = \frac{2\mu_1}{\alpha_1} [\lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-(0.5\alpha_1+1)}],$$

где μ_1 и α_1 — материальные постоянные, $\mu_1\alpha_1 = \mu$ — модуль сдвига в исходном недеформированном состоянии, λ — коэффициент деформации [12].

В данной работе механические свойства стремного сухожилия рассмотрены в том числе в рамках других, наиболее часто встречающихся гиперупругих, а также формально определенных деформационных моделей (табл. 1).

Таблица 1 / Table 1

Рассмотренные деформационные модели
The deformation models considered

| № | Модель | Математическая формулировка | Ссылка | |
|----|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 | Гиперупругие модели | Неогуковская | $\sigma = 2\mu(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda})$ | [13] |
| 2 | | Муни – Ривлина | $\sigma = 2C_{10}(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}) + 2C_{01}(\lambda - \frac{1}{\lambda^3})$ | [14] |
| 3 | | Огдена | $\sigma = \sum_{p=1}^n \mu_p(\lambda^{\alpha_p} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_p})$ | [15] |
| 4 | | Полиномиальная | $\sigma = 2(\lambda - \lambda^{-2})[C_{10} + C_{01}\lambda^{-1} + 2C_{20}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + 2\lambda^{-1}C_{02}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3) + 3C_{11}(\lambda - 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-2})]$ | [16] |
| 5 | | Йео | $\sigma = 2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}) \sum_{i=1}^n iC_i(I_1 - 3)^{i-1}$ | [17] |
| 6 | | Веронда – Вестманн | $\sigma = 2C_1C_2e^{C_2(\lambda^2+2\lambda^{-1}-3)}(\lambda - \lambda^{-2}) + 2C_3(1 - \lambda^{-3})$ | [18] |
| 7 | | Фанга | $\sigma(\lambda) = C(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})e^{\beta(I_1-3)}$ | [19] |
| 8 | | Арруда – Бойс | $\sigma = 2C_1(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})[\sum_{i=1}^5 i\alpha_i\beta^{i-1}I_1^{i-1}]$ | [20] |
| 9 | | Гента | $\sigma = (\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(\frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3})$ | [21] |
| 10 | Формально определенные модели | Экспоненциальная | $\sigma(\varepsilon) = a \cdot (\exp(b \cdot \varepsilon) - 1)$ | [22, 23] |
| 11 | | Линейная | $\sigma(\varepsilon) = E \cdot \varepsilon$ | |
| 12 | | Билинейная | $\sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon + E_2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr})$ | |
| 13 | | Трилинейная | $\sigma(\varepsilon) = E_1 \cdot \varepsilon + E_2 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr1}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr1}) + E_3 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{cr2}) \cdot \theta(\varepsilon - \varepsilon_{cr2})$ | |



Здесь $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$ — первый инвариант тензора деформаций, свертка правого тензора деформации Коши–Грина \mathbf{C} , для одноосного растяжения и несжимаемых материалов равная $\lambda^2 + 2\lambda^{-1}$, θ — единичная функция Хэвисайда. Используются обозначения параметров, общепринятые в литературе.

Материалы и методы

Об исследовании биомеханических свойств образцов стременичного сухожилия из свежзамороженных височных костей человека впервые было сообщено в работах Cheng Tao et al. [11] и Wang X et al. [24]. Средний возраст доноров (шесть мужчин и шесть женщин) составлял 71 год и варьировался от 51 до 92 лет. Эксперименты по одноосному растяжению образцов проводились с помощью прецизионной системы (MTS Systems Eden Prairie, MN). Средняя длина образцов составляла 0.99 ± 0.09 ($M \pm SD$) мм и измерялась цифровой камерой. В результате были получены кривые напряжение-деформация $\sigma - \lambda$.

Кривые были оцифрованы нами с помощью свободно распространяемого приложения WebPlotDigitizer (Automeris LLC). Дальнейшие расчеты производились в системе компьютерной алгебры Mathcad 15.0 (PTS Inc.) с помощью специально разработанного функционала [25]. Для расчета параметров моделей использовали функцию подгонки `genfit`, для оценки соответствия модельных данных экспериментальным применяли функцию корреляции `corr`. В качестве моделей рассматривали феноменологические: неогуковскую, 2-параметрическую Муни–Ривлина, Отдена, полиномиальную 2-го порядка, Йео, Веронда–Вестманн, Фанга, а также микромеханические Арруда–Бойс и Гента, зарекомендовавшие себя как одни из самых популярных гиперупругих моделей в литературе [26, 27].

Для сравнения рассматривали также формально определенные алгебраические модели — экспоненциальную, линейную, а также кусочно-линейные (билинейную и трилинейную) модели. Как принято, под формально определенными понимали модели, основанные на внешнем сходстве экспериментальной кривой с графическим изображением той или иной алгебраической функции [28].

Соответствие модельных данных и данных механических испытаний оценивали с помощью показателей описательной статистики, которые ранжировали с помощью функции РАНГ Microsoft Excel. Рейтинг моделей затем определяли по среднему значению всех показателей.

Результаты и их обсуждение

В качестве выходных данных были рассчитаны:

- материальные параметры моделей (табл. 2);
- показатели отклонений модельных значений напряжений от экспериментальных данных (точность аппроксимации) (табл. 3);
- упругие характеристики — начальные, минимальные, средние и максимальные значения модуля Юнга моделей (табл. 4), его коэффициент вариации.

В рамках рассмотренных моделей были получены деформационные кривые $\sigma - \lambda$ (рис. 1, а) и $E - \lambda$ (рис. 1, б и рис. 3).

Параметры деформационных моделей представлены в табл. 2.

На рис. 1 представлены исходные данные и кривые напряжение-деформация, рассчитанные в рамках рассмотренных моделей. Видно, что большинство моделей адекватно описывают механическое поведение сухожилия. Исключение составляют модели 1-параметрическая неогуковская, микромеханическая Арруда–Бойс и линейная с единственным параметром E (модуль Юнга). Также следует отметить, что 2-параметрическая модель Муни–Ривлина в недеформированном состоянии и при малых деформациях (λ от 1 до 1.06) испытывает механическую нестабильность $\partial\sigma/\partial\varepsilon < 0$, не свойственную биологическим тканям, а при λ от 1 до $-C_{01}/C_{10} = 1.13$ $\sigma(\lambda) < 0$.



Обсудим сравнительную точность аппроксимационных моделей. Согласно табл. 3 по совокупности показателей модели полиномиальная ($SD = 0.00188$ МПа, $\Delta = 0.00899$ МПа, $\delta = 0.00993\%$, $R = 0.99998$) и Огдена ($SD = 0.00343$ МПа, $\Delta = 0.00789$ МПа, $\delta = 0.00871\%$, $R = 0.99995$) среди гиперупругих, а также экспоненциальная ($SD = 0.00327$ МПа, $\Delta = 0.00747$ МПа, $\delta = 0.00824\%$, $R = 0.99994$) среди формально определенных моделей являются наиболее точными в плане подгонки экспериментальных данных. Наихудшие результаты аппроксимации ожидаемо показала простая неогуксовская модель ($SD = 0.175$ МПа, $\Delta = 0.39571$ МПа, $\delta = 0.43701\%$, $R = 0.86173$). Условный показатель точности подгонки у гиперупругих моделей оказался равным 6.44, у формально определенных — 7.50, т.е. ниже, но ненамного (за счет хороших показателей у экспоненциальной модели).

Таблица 2 / Table 2

Параметры деформационных моделей
Parameters of deformation models

| Модель | Параметры, МПа | | | | | | |
|------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------|--------------------|---------------|---------------|----------|----------|
| | μ, C_1, C, a, E, E_1 | $\alpha, \beta, \beta/p, J_m, E_2$ | C_{10}, C_1, E_3 | C_{01}, C_2 | C_{20}, C_3 | C_{02} | C_{11} |
| Неогуксовская μ | 0.31 | — | — | — | — | — | — |
| Муни–Ривлина C_{10}, C_{01} | — | — | 2.76 | −3.13 | — | — | — |
| Огден а μ, α | 0.00527 | 16.82 | — | — | — | — | — |
| Полиномиальная $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{02}, C_{11}$ | — | — | −2.47 | 2.59 | 53.63 | 79.64 | −128.4 |
| Йео C_1, C_2, C_3 | — | — | 0.06 | −0.04 | 1.72 | — | — |
| Веронда–Вестманн C_1, C_2, C_3 | — | — | 0.01 | 6.14 | −0.06 | — | — |
| Фанга C, β | 0.11 | 7.34 | — | — | — | — | — |
| Арруда–Бойс C_1, β | 0.11 | −3.08 | — | — | — | — | — |
| Гента μ, J_m | 0.24 | 0.39 | — | — | — | — | — |
| Экспоненциальная a, b | 0.00987 | 12.67 | — | — | — | — | — |
| Линейная E | 1.52 | — | — | — | — | — | — |
| Билинейная E_1, E_2 | 3.948×10^{-7} | 11.688 | — | — | — | — | — |
| Трилинейная E_1, E_2, E_3 | 3.948×10^{-7} | 3.279 | 11.688 | — | — | — | — |

Представляет интерес поведение упругих модулей, предсказываемое моделями. Из данных рис. 1, б следует, что оно крайне вариабельно. Наименьший коэффициент вариации CV (не считая, естественно, линейной модели, для которой $CV = 0$) у модели неогуксовской (0.53) и Арруда–Бойс (0.72), а наибольший (8.05) — у микромеханической модели Гента. Эта модель также демонстрирует наибольшее значение E_{max} , равное 23.07 МПа (в исследованном интервале деформаций).



В норме упругие модули мягких биологических тканей положительны $E > 0$ (критерий Хилла – Друкера) и инкрементальны, т. е. монотонно возрастают с деформацией $\partial E / \partial \lambda > 0$. Этот феномен обусловлен эластин-коллагеновым механизмом деформаций в тканях, когда относительно жесткие и изначально волнистые волокна коллагена, растянувшись, постепенно «включаются» в процесс деформирования (начиная с некоторого критического значения λ_{cr}). До этого момента «работает» только податливый эластиновый матрикс [29]. В этом случае график $\sigma(\lambda)$ имеет характерный J-вид.

Таблица 3 / Table 3

Параметры деформационных моделей
Parameters of deformation models

| Модель | Показатели | | | | Место | | | | Среднее | Рейтинг |
|--------------------|------------|----------|----------|---------|-------|----------|----------|-----|---------|---------|
| | SD | Δ | δ | R | SD | Δ | δ | R | | |
| Неогуковская | 0.175 | 0.39571 | 0.43701 | 0.86173 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 | 13 |
| Муни – Ривлина | 0.07073 | 0.15792 | 0.1744 | 0.96953 | 9 | 9 | 9 | 8 | 8.75 | 9 |
| Огдена | 0.00343 | 0.00789 | 0.00871 | 0.99995 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2.25 | 3 |
| Полиномиальная | 0.00188 | 0.00899 | 0.00993 | 0.99998 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| Йео | 0.00385 | 0.00937 | 0.01035 | 0.99991 | 5 | 4 | 4 | 5 | 4.5 | 4 |
| Веронда – Вестманн | 0.00371 | 0.01025 | 0.01132 | 0.99992 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4.5 | 4 |
| Фанга | 0.0094 | 0.02468 | 0.02726 | 0.99954 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Арруда – Бойс | 0.13826 | 0.30146 | 0.33292 | 0.92876 | 11 | 10 | 10 | 10 | 10.25 | 10 |
| Гента | 0.03996 | 0.08364 | 0.09236 | 0.92876 | 7 | 7 | 7 | 10 | 7.75 | 7 |
| Экспоненциальная | 0.00327 | 0.00747 | 0.00824 | 0.99994 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1.75 | 1 |
| Линейная | 0.1597 | 0.35936 | 0.39686 | 0.89027 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| Трилинейная | 0.04169 | 0.09751 | 0.10769 | 0.99556 | 8 | 8 | 8 | 7 | 7.75 | 7 |
| Билинейная | 0.12533 | 0.32876 | 0.36307 | 0.95256 | 10 | 11 | 11 | 9 | 10.25 | 10 |

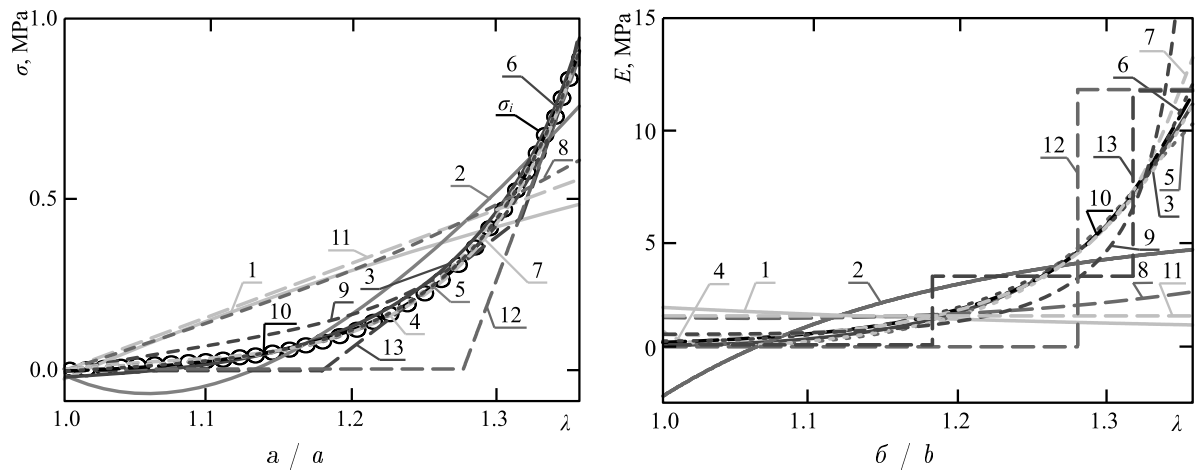


Рис. 1. Деформационные кривые $\sigma - \lambda$ (а) и $E - \lambda$ (б): σ_i — экспериментальные данные; 1 — неогуковская модель; 2 — модель Муни–Ривлина; 3 — модель Огдена; 4 — полиномиальная модель; 5 — модель Йео; 6 — модель Веронда–Вестманн; 7 — модель Фанга; 8 — модель Арруда–Бойс; 9 — модель Гента; 10 — экспоненциальная модель; 11 — линейная модель; 12 — билинейная модель; 13 — трилинейная модель

Fig. 1. Deformation curves $\sigma - \lambda$ (a) and $E - \lambda$ (b): σ_i shows experimental data; 1 shows neo-Hookean model; 2 shows Mooney–Rivlin model; 3 shows Ogden model; 4 shows polynomial model; 5 shows Yeoh model; 6 shows Veronda–Westmann model; 7 shows Fung model; 8 shows Arruda–Boyce model; 9 shows Gent model; 10 shows exponential model; 11 shows linear model; 12 shows bilinear model; 13 shows trilinear model

Как видно из данных, представленных на рис. 1, б и рис. 2, 3, неравенствам $E > 0$ и $\partial E / \partial \lambda > 0$ удовлетворяют не все модели. Лежат в верхней полуплоскости, монотонно идут вверх кривые $E(\lambda)$, соответствующие гиперупругим моделям Огдена, Веронда – Вестманн, Фанга и Гента, а также одной из формально определенной (экспоненциальной) модели. Другие модельные кривые либо идут вниз $\partial E / \partial \lambda < 0$ (неогуковская), либо выходят из отрицательной области значений $E < 0$ (Муни – Ривлина), либо меняют направление изменения, имея локальный минимум $\partial E / \partial \lambda = 0$, $\partial^2 E / \partial \lambda^2 > 0$ (модели полиномиальная, Йео и Арруда – Бойс). Модули упругости кусочно-линейных моделей (би- и трилинейной) возрастают при деформации, но ступенчато, испытывая разрывы, поскольку производная от функции Хэвисайда θ описывается δ -функцией. Модуль упругости линейной модели постоянен по величине $E = const$, не убывает и не возрастает.

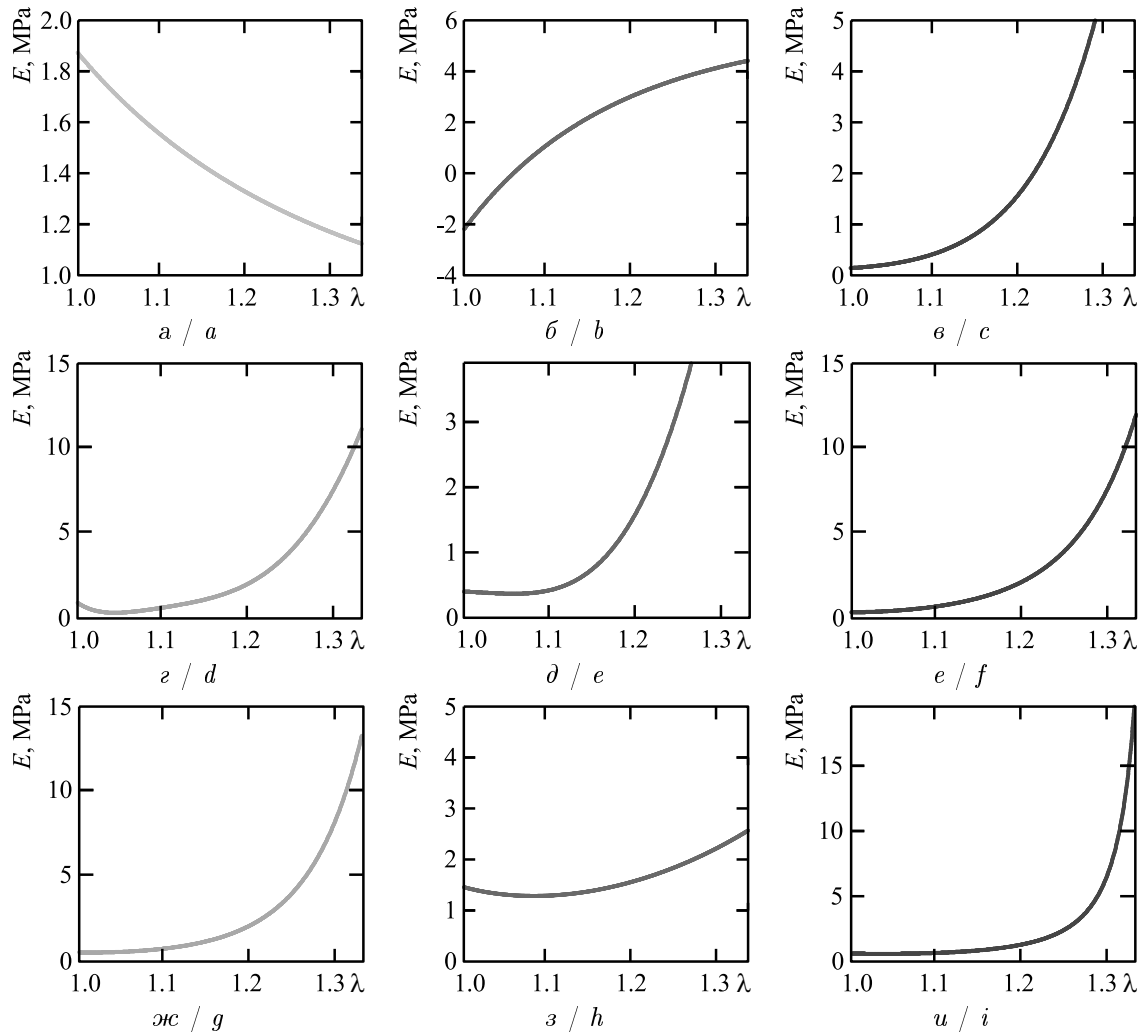


Рис. 2. Упругие модули гиперупругих моделей: а – неогуковская модель; б – модель Муни – Ривлина; в – модель Огдена; г – полиномиальная модель; д – модель Йео; е – модель Веронда – Вестманн; ж – модель Фанга; з – модель Арруда – Бойс; и – модель Гента. Здесь и на рис. 3 λ – коэффициент растяжения

Fig. 2. Elastic moduli of the PL models: a shows neo-Hookean model; b shows Mooney – Rivlin model; c shows Ogden model; d shows polynomial model; e shows Yeoh model; f shows Veronda – Westmann model; g shows Fung model; h shows Arruda – Boyce model; i shows Gent model. Here and in Fig. 3 λ is the stretching coefficient

Ненадолго вернемся к модели Муни – Ривлина. Для нее начальный модуль Юнга $E_0 = 6(C_{01} + C_{10}) = -2.20$ МПа < 0 и критерий устойчивости Хилла – Друкера $E = \partial \sigma / \partial \varepsilon > 0$



[30, 31], накладывающий ограничение на материальные константы моделей, во всем интервале деформаций не выполняется. Это ограничивает применение данной модели сухожилия малыми деформациями.

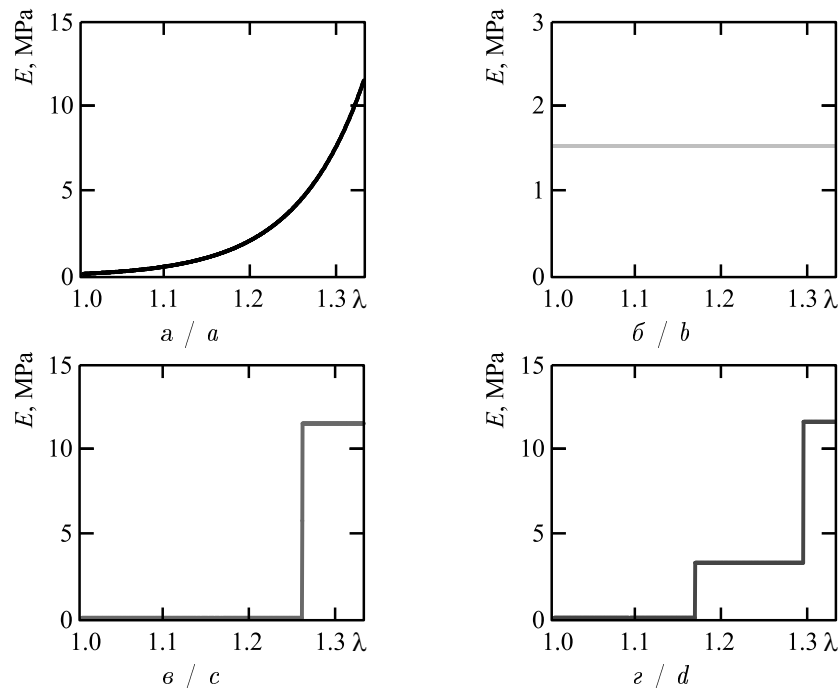


Рис. 3. Упругие модули формально определенных моделей: *a* — экспоненциальная модель; *b* — линейная модель; *в* — билинейная модель; *г* — трилинейная модель

Fig. 3. Elastic modules of formally defined models: *a* shows exponential model; *b* shows linear model; *c* shows bilinear model; *d* shows trilinear model

Также были вычислены и сведены в одну таблицу характерные значения упругих модулей моделей: начальное E_0 , минимальное E_{min} , максимальное E_{max} , среднее E_{mean} , а также коэффициент вариации CV (табл. 4).

Рассчитанные на основе данных табл. 4 значения начальных модулей сдвига $G_0 = E_0/3$ ниже определенного Т. Cheng et al. в [11] с помощью MATLAB значения $\mu = 0.87$ МПа. Наименьшие отличия от данного значения наблюдаются у гиперупругой неогуксовской модели ($G_0 = 0.62$ МПа). Усредненный упругий модуль E_{mean} рассмотренных моделей мало меняется от модели к модели, а $\langle E_{mean} \rangle = (2.31 \pm 0.46)$ МПа ($M \pm SD$) с коэффициентом вариации $CV = 0.20$.

В заключение остановимся на вопросе, который был поднят Х. Wang et al. в своей работе [24]. Кривые зависимости напряжения от деформации показали, что связки/сухожилия среднего уха обладают нелинейными и вязкоупругими свойствами. Для определения модуля упругости ткани при статической деформации модуль упругости $\partial\sigma/\partial\lambda$ может быть выражен как

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = \alpha(\sigma + \beta),$$

α и β — две константы [22]. Используя этот метод, авторы [11] сообщили об установленной ими эмпирической зависимости модуля упругости от напряжения *tendo musculi stapedis* в двух соседних диапазонах напряжений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = \begin{cases} E^*(\sigma) & 0 < \sigma \leq 0.1 \text{ МПа} \\ E^{**}(\sigma) & 0.1 < \sigma \leq 0.15 \text{ МПа} \end{cases} \quad (1)$$

Таблица 4 / Table 4

Характеристические значения упругих модулей, МПа
Characteristic values of elastic modulus, MPa

| Модель | E_0 | E_{min} | E_{max} | E_{mean} | CV |
|--------------------|------------------------|------------------------|-----------|------------|------|
| Неогуковская | 1.874 | 1.123 | 1.874 | 1.418 | 0.53 |
| Муни – Ривлина | -2.201 | -2.201 | 4.412 | 2.131 | 3.10 |
| Огдена | 0.133 | 0.133 | 11.218 | 2.56 | 4.33 |
| Полиномиальная | 0.735 | 0.137 | 11.043 | 2.553 | 4.27 |
| Йео | 0.338 | 0.304 | 10.493 | 2.538 | 4.01 |
| Веронда – Вестманн | 0.144 | 0.144 | 11.961 | 2.581 | 4.58 |
| Фанга | 0.333 | 0.328 | 13.148 | 2.62 | 4.89 |
| Арруда – Бойс | 1.458 | 1.358 | 2.572 | 1.689 | 0.72 |
| Гента | 0.705 | 0.677 | 23.077 | 2.782 | 8.05 |
| Экспоненциальная | 0.125 | 0.125 | 11.652 | 2.573 | 4.48 |
| Линейная | 1.524 | 1.524 | 1.524 | 1.524 | 0.00 |
| Билинейная | 3.948×10^{-7} | 1.974×10^{-7} | 11.688 | 2.575 | 4.54 |
| Трилинейная | 3.948×10^{-7} | 1.974×10^{-7} | 11.688 | 2.575 | 4.54 |

Для экспоненциальной модели

$$\sigma = \mu \cdot (\exp \alpha \cdot (\lambda - 1) - 1)$$

можно в явной форме получить выражение для модуля упругости E через напряжение σ в общем виде:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = E(\sigma) = \alpha(\sigma + \mu),$$

а также используя полученные численные данные из табл. 2:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = 12.67\sigma + 0.12. \quad (2)$$

В итоге кусочно-линейная зависимость (1) может быть заменена гладкой линейной (2) (рис. 4).

В результате уравнение (2) предсказывает изменение модуля упругости тканей среднего уха в зависимости от уровня статического напряжения, полученное из экспериментальных кривых во всем диапазоне деформаций.

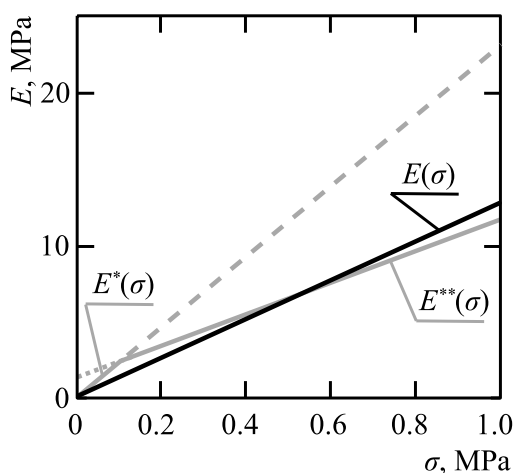


Рис. 4. Расчетные зависимости модулей упругости сухожилия стремени мышцы
Fig. 4. Calculated dependences of elastic moduli of the stapedius tendon

Выводы

1. Рассчитаны параметры гиперупругих феноменологических и микромеханических, а также формально определенных моделей сухожилия стремени мышцы среднего уха человека.

2. С точки зрения способности аналитически характеризовать механическое поведение тканей сухожилия стремени мышцы рекомендованы гиперупругая модель Огдена, а также формально определенная экспоненциальная модель.

3. Из-за потери механической устойчивости не рекомендуется применять 2-параметрическую гиперупругую модель Муни – Ривлина в недеформированном состоянии и при небольших деформациях.



4. Типичный для биотканей характер зависимостей модулей упругости биологических тканей от деформации демонстрируют модели Огдена, Веронда – Вестманн, Фанга и Гента, а также экспоненциальная модель.

5. Предложено ранжирование деформационных моделей по точности аппроксимации на основании показателей описательной статистики, при этом учитывать поведение $E(\lambda)$.

6. В рамках экспоненциальной модели установлена связь модуля упругости *tendo musculi stapedis* и растягивающего напряжения с параметрами, полученными из экспериментальных данных.

7. Описанные в работе результаты могут быть использованы в практических целях при создании физических моделей и конечно-элементном моделировании органов среднего уха, а также для подбора замещающих материалов при протезировании и пластике (стапедопластике).

Список литературы

1. Батуев А. С. Физиология высшей нервной деятельности и сенсорных систем. Москва : Питер, 2012. 316 с. EDN: [QKUHPPV](#)
2. Prendergast E. J., Ferris E., Rice H. J., Blayney A. W. Vibro-acoustic modeling of the outer and middle ear using the finite element method // *Audiol Neurootol*. 1999. Vol. 4. P. 185–191. DOI: <https://doi.org/10.1159/000013839>
3. Селянинов А. А., Еловиков А. М., Чарничева О. В., Еловиков В. А. Биомеханическое моделирование функционирования стремени среднего уха человека // *Российский журнал биомеханики*. 2016. Т. 20, № 4. С. 358–367. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2016.4.08>, EDN: [XXMNZN](#)
4. Howard J., Roberts W. M., Hudspeth A. J. Mechanoelectrical transduction by hair cells // *Annual Review of Biophysics and Biophysical Chemistry*. 1988. Vol. 17. P. 99–124. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.bb.17.060188.000531>
5. Funnell W. R. J., Maftoon N., Decraemer W. F. Modeling of middle ear mechanics // *The Middle Ear* / eds. S. Puria, R. Fay, A. Popper. New York : Springer Handbook of Auditory Research, 2013. P. 171–210. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6591-1_7
6. Lobato L. C., Paul S., Cordioli J. A. Statistical analysis of the human middle ear mechanical properties // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2022. Vol. 151, iss. 3. Art. 2043. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0009890>
7. Ebrahimian A., Mohammadi H., Maftoon N. Material characterization of human middle ear using machine-learning-based surrogate models // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2024. Vol. 153. Art. 106478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106478>
8. Gentil F., Natal Jorge R., Ferreira A. J. M., Parente M. P. L., Martins P. A. L. S., Almeida E. Biomechanical simulation of middle ear using hyperelastic models // *Journal of Biomechanics*. 2006. Vol. 39, iss. 1. P. S388–S389. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(06\)84569-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(06)84569-0)
9. Martins P. A. L. S., Jorge R. M. N., Ferreira A. J. M., Figueiredo M., Fernandes R. A. A., Figueiredo M., Silva R. Modelling the mechanical behavior of soft tissues using hyperelastic constitutive models // *International Conference on Computational Bioengineering (ICCB2005)* / eds. H. Rodrigues [et al.]. Lisbon, Portugal, 2005. P. 403–410.
10. Zhang J., Jiao C., Zou D., Ta N., Rao Z. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2020. Vol. 19, iss. 3. P. 957–970. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-019-01263-w>
11. Cheng T., Gan R. Z. Mechanical properties of stapelial tendon in human middle ear // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2007. Vol. 129, iss. 6. P. 913–918. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2800837>
12. Wang B., Lu H., Kim G. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials // *Mechanics of Materials*. 2002. Vol. 34, iss. 8. P. 475–483. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00175-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00175-8)
13. Шмурак М. И., Кучумов А. Г., Воронова Н. О. Анализ гиперупругих моделей для описания поведения мягких тканей организма человека // *Master's Journal*. 2017. № 1. С. 230–243. EDN: [YUOPFB](#)
14. Иванов Д. В., Фомкина О. А. Определение постоянных для моделей Нео-Гука и Муни – Ривлина по результатам экспериментов на одноосное растяжение // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та*, 2008. Вып. 10. С. 114–117. EDN: [UIRZIV](#)



15. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data // *Computational Mechanics*. 2004. Vol. 34, iss. 6. P. 484–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y>
16. Rackl M. Material testing and hyperelastic material model curve fitting for Ogden, polynomial and Yeoh models // Proceedings of the ScilabTEC, 7th International Scilab Users Conference At: Paris, France, May 2015. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29552.25600/1>
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1993. Vol. 66, iss. 5. P. 754–771. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538343>
18. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations // *Journal of Biomechanics*. 1970. Vol. 3, iss. 1. P. 111–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
19. Bone A., Kaoye M. B.-A. L., Baidi B. B., Samon J.-B. Comparison of hyperelastic models for analysis of human and pig skins behavior // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2025. Vol. 13, iss. 6. P. 2045–2062. DOI: <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.136114>
20. Arruda E. M., Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1993. Vol. 41, iss. 2. P. 389–412. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
21. Gent A. N. A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. Vol. 69, iss. 1. P. 59–61. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538357>
22. Fung Y.-C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. New York : Springer, 1993. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
23. Муслов С. А., Перцов С. С., Арутюнов С. Д. Физико-механические свойства биологических тканей / под ред. О. О. Янушевича. Москва : Практическая медицина, 2023. 456 с. DOI: <https://doi.org/10.17513/np.594>, EDN: MNOSIQ
24. Wang X., Cheng T., Gan R. Z. Finite-element analysis of middle-ear pressure effects on static and dynamic behavior of human ear // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2007. Vol. 122, iss. 2. P. 906–917. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2749417>
25. Муслов С. А., Никущенко А. Н., Перцов С. С. Калькулятор параметров гиперупругих моделей биотканей. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2025613849, 17.02.2025. Заявка № 2025611314 от 30.01.2025. EDN: SJTYQQ
26. Wex C., Arndt S., Stoll A., Bruns C., Kupriyanova Yu. Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: A review // *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*. 2015. Vol. 60, iss. 6. P. 577–592. DOI: <https://doi.org/10.1515/bmt-2014-0146>
27. Муслов С. А., Арутюнов С. Д., Маев И. В., Золотницкий И. В., Солодов А. А., Раснер П. И. Гиперупругие свойства биологических тканей / под ред. С. С. Перцова, С. В. Панина. Москва : Практическая медицина, 2025. 232 с. EDN: BPALJZ
28. Голубинский А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей // *Вестник Воронежского института МВД России*. 2007. № 2. С. 138–143. EDN: JXUUNF
29. Муслов С. А., Гветадзе Р. Ш., Арутюнов С. Д., Корнеев А. А., Чистяков М. В., Зайцева Н. В., Сугочев П. Ю. К вопросу о билинейной модели, механизмах деформации и параметрах эластин-коллагенового перехода в биологических тканях // *Молекулярная медицина*. 2025. Т. 23, № 2. С. 48–58. DOI: <https://doi.org/10.29296/24999490-2025-02-08>, EDN: UAOALC
30. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1958. Vol. 6, iss. 3. P. 236–249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
31. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material // *Journal of Applied Mechanics*. 1959. Vol. 26, iss. 1. P. 101–195. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011929>

References

1. Batuev A. S. *Fiziologiya vysshej nervnoj deyatel'nosti i sensorykh sistem* [Physiology of higher nervous activity and sensory systems]. Moscow, Piter, 2012. 316 p. (in Russian). EDN: QKUHVP
2. Prendergast E. J., Ferris E., Rice H. J., Blayney A. W. Vibro-acoustic modeling of the outer and middle ear using the finite element method. *Audiol Neurootol*, 1999, vol. 4, pp. 185–191. DOI: <https://doi.org/10.1159/000013839>
3. Selyaninov A. A., Elovikov A. M., Charntseva O. V., Elovikov V. A. Biomechanical modeling of the functioning of the stapes of the human middle ear. *Russian Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 20, iss. 4, pp. 358–367 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2016.4.08>, EDN: XXMNZN



4. Howard J., Roberts W. M., Hudspeth A. J. Mechanicoelectrical transduction by hair cells. *Annual Review of Biophysics and Biophysical Chemistry*, 1988, vol. 17, pp. 99–124 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev.bb.17.060188.000531>
5. Funnell W. R. J., Maftoon N., Decraemer W. F. Modeling of middle ear mechanics. In: Puria S., Fay R., Popper A. (eds.) *The Middle Ear*. New York, Springer Handbook of Auditory Research, 2013, pp. 171–210. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6591-1_7
6. Lobato L. C., Paul S., Cordioli J. A. Statistical analysis of the human middle ear mechanical properties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, vol. 151, iss. 3, art. 2043. DOI: <https://doi.org/10.1121/10.0009890>
7. Ebrahimian A., Mohammadi H., Maftoon N. Material characterization of human middle ear using machine-learning-based surrogate models. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2024, vol. 153, art. 106478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2024.106478>
8. Gentil F., Natal Jorge R., Ferreira A. J. M., Parente M. P. L., Martins P. A. L. S., Almeida E. Biomechanical simulation of middle ear using hyperelastic models. *Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 39, iss. 1, pp. S388–S389. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(06\)84569-0](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(06)84569-0)
9. Martins E. A. L. S., Jorge R. M. N., Ferreira A. J. M., Figueiredo M., Fernandes R. A. A., Figueiredo M., Silva R. Modelling the mechanical behavior of soft tissues using hyperelastic constitutive models. In: Rodrigues H. et al. (eds.) *International Conference on Computational Bioengineering (ICCB2005)*. Lisbon, Portugal, 2005, pp. 403–410.
10. Zhang J., Jiao C., Zou D., Ta N., Rao Z. Assigning viscoelastic and hyperelastic properties to the middle-ear soft tissues for sound transmission. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2020, vol. 19, iss. 3, pp. 957–970. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10237-019-01263-w>
11. Cheng T., Gan R. Z. Mechanical properties of stapedial tendon in human middle ear. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2007, vol. 129, iss. 6, pp. 913–918. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2800837>
12. Wang B., Lu H., Kim G. A damage model for the fatigue life of elastomeric materials. *Mechanics of Materials*, 2002, vol. 34, iss. 8, pp. 475–483. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(02\)00175-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(02)00175-8)
13. Shmurak M. I., Kuchumov A. G., Voronova N. O. Hyperelastic models analysis for description of soft human tissues behavior. *Master's Journal*, 2017, iss. 1, pp. 230–243 (in Russian). EDN: YUOPFB
14. Ivanov D. V., Fomkina O. A. Determination of constants for the neo-Hookean and Mooney–Rivlin models based on the results of experiments on uniaxial tension. *Mathematics. Mechanics*. Saratov, Saratov State University Publ., 2008, iss. 10, pp. 114–117 (in Russian). EDN: UIRZIV
15. Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 2004, vol. 34, iss. 6, pp. 484–502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y>
16. Rackl M. Material testing and hyperelastic material model curve fitting for Ogden, polynomial and Yeoh models. *Proceedings of the ScilabTEC, 7th International Scilab Users Conference*. At: Paris, France, May 2015. DOI: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29552.25600/1>
17. Yeoh O. H. Some forms of the strain energy function for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1993, vol. 66, iss. 5, pp. 754–771. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538343>
18. Veronda D., Westmann R. Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 1970, vol. 3, iss. 1, pp. 111–124. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(70\)90055-2](https://doi.org/10.1016/0021-9290(70)90055-2)
19. Bone A., Kaoye M. B.-A. L., Baidi B. B., Samon J.-B. Comparison of hyperelastic models for analysis of human and pig skins behavior. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2025, vol. 13, iss. 6, pp. 2045–2062. DOI: <https://doi.org/10.4236/jamp.2025.136114>
20. Arruda E. M., Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, vol. 41, iss. 2, pp. 389–412. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
21. Gent A. N. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chemistry and Technology*, 1996, vol. 69, iss. 1, pp. 59–61. DOI: <https://doi.org/10.5254/1.3538357>
22. Fung Y.-C. *Biomechanics: Mechanical properties of living tissues*. New York, Springer, 1993. 586 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2257-4>
23. Muslov S. A., Pertsov S. S., Arutyunov S. D. Fiziko-mekhanicheskie svojstva biologicheskikh tkanej [Physico-mechanical properties of biological tissues]. Moscow, Practical Medicine, 2023. 456 p. (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.17513/np.594>, EDN: MNOSIQ
24. Wang X., Cheng T., Gan R. Z. Finite-element analysis of middle-ear pressure effects on static and dynamic behavior of human ear. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, vol. 122, iss. 2, pp. 906–917. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.2749417>



25. Muslov S. A., Nikishenko A. N., Pertsov S. S. Calculator of parameters of hyperelastic models of biological tissues. Patent RU 2025613849 (in Russian). EDN: [SJTYQQ](#)
26. Wex C., Arndt S., Stoll A., Bruns C., Kupriyanova Yu. Isotropic incompressible hyperelastic models for modelling the mechanical behaviour of biological tissues: A review. *Biomedical Engineering / Biomedizinische Technik*, 2015, vol. 60, iss. 6, pp. 577–592. DOI: <https://doi.org/10.1515/bmt-2014-0146>
27. Muslov S. A., Arutyunov S. D., Maev I. V., Zolotnitsky I. V., Solodov A. A., Rasner P. I. *Giperuprugie svoystva biologicheskikh tkanej* [Hyperelastic properties of biological tissues]. Moscow, Practical Medicine, 2025. 232 p. (in Russian). EDN: [BPALJZ](#)
28. Golubinsky A. N. Methods of approximating experimental data and constructing models. *Vestnik of Voronezh Institute of the Ministry of Interior of Russia*, 2007, iss. 2, pp. 138–143 (in Russian). EDN: [JXUUHF](#)
29. Muslov S. A., Gvetadze R. Sh., Arutyunov S. D., Korneev A. A., Chistyakov M. V., Zaitseva N. V., Sukhochev P. Yu. On the bilinear model, deformation mechanisms and parameters of the elastin-collagen transition in biological tissues. *Molecular Medicine*, 2025, vol. 23, iss. 2, pp. 48–58 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.29296/24999490-2025-02-08>, EDN: [UAOALC](#)
30. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1958, vol. 6, iss. 3, pp. 236–249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2)
31. Drucker D. C. A definition of a stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, vol. 26, iss. 1, pp. 101–195. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4011929>

Поступила в редакцию / Received 26.09.2023

Принята к публикации / Accepted 02.03.2026

Опубликована / Published 01.06.2026