

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия: Математика. Механика. Информатика

2021

Том 21

Выпуск 1



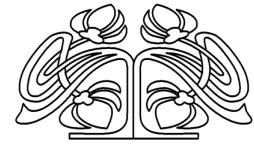
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2021 Том 21

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Высоцкая И. А., Струкова И. И. Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций 4

Сорокина М. М., Максаков С. П. О максимальных подформациях n -кратно W -расслоенных формаций конечных групп 15

Механика

Акопян А. Г. Прочность при изгибе анизотропных составных плит со свободными краями 26

Ватульян А. О., Нестеров С. А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра 35

Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей 48

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле 60

Choque-Rivero A. E., Ornelas-Tellez F. Bounded finite-time stabilization of the prey–predator model via Korobov’s controllability function
[Чоке-Риверо А. Э., Орнелас-Тельес Ф. Стабилизация за конечное время ограниченным управлением модели хищник–жертва с помощью функции управляемости В. И. Коробова] 76

Информатика

Базилевский М. П. Многокритериальный подход к построению моделей парно-множественной линейной регрессии 88

Лапатин И. Л., Назаров А. А. Выходящий поток RQ-системы $M|G|1$ асимптотически рекуррентный 100

Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы $MPP|M|1$ с разнотипными вызываемыми заявками 111

Шкленник М. А., Моисеев А. Н. Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $M|G|_{\infty} \rightarrow G|_{\infty}$ 125

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).

Журнал входит в международные базы данных Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 24.02.21.
Подписано в свет 01.03.21.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 16,05 (17,25).
Тираж 500 экз. Заказ 16-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2021



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/> или <https://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования в журнале. В случае положительного решения об опубликовании статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Vysotskaya I. A., Strukova I. I. The research of some classes of almost periodic at infinity functions 4

Sorokina M. M., Maksakov S. P. On maximal subformations of n -multiple W -foliated formations of finite groups 15

Mechanics

Akopyan A. G. The flexural strength of anisotropic composite plates with free edges 26

Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder 35

Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels 48

Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of a elastoplastic three-layer plate in a temperature field 60

Choque-Rivero A. E., Ornelas-Tellez F. Bounded finite-time stabilization of the prey – predator model via Korobov's controllability function 76

Computer Sciences

Bazilevskiy M. P. Multi-criteria approach to pair-multiple linear regression models constructing 88

Lapatin I. L., Nazarov A. A. Output process of the $M|G|1$ is an asymptotical renewal process 100

Nazarov A. A., Paul S. V., Lizyura O. D. Heavy outgoing call asymptotics for $MMPP|M|1$ retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls 111

Shklennik M. A., Moiseev A. N. Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $M|G|_{\infty} \rightarrow G|_{\infty}$ 125



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чунань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL

**«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

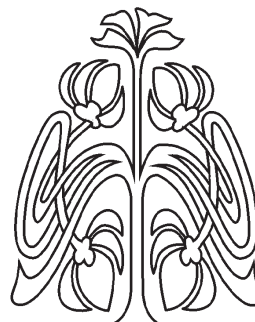
Yurii N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

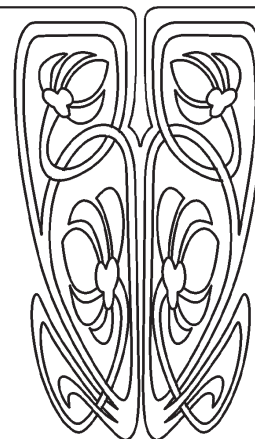
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14

Научная статья

УДК 517.98

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций

И. А. Высоцкая^{1✉}, И. И. Струкова²

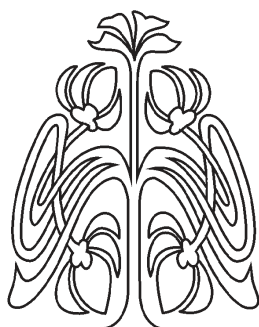
¹Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, д. 54А

²Воронежский государственный университет, Россия, 394036, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1

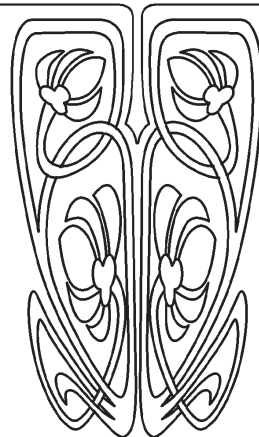
Высоцкая Ирина Алевтиновна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математики, i.a.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6521-9570>

Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, irina.k.post@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2355-0091>

Аннотация. Статья посвящена исследованию непрерывных почти периодических на бесконечности функций, заданных на всей вещественной оси и со значениями в комплексном банаховом пространстве. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций, не обязательно стремящихся к нулю на бесконечности. Вводятся понятия медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения. Первое определение (аппроксимационное) основано на аппроксимационной теореме. В классическом варианте, для почти периодических функций, это равномерные замыкания тригонометрических многочленов. В нашем случае коэффициентами Фурье являются медленно меняющиеся на бесконечности функции. Второе определение, являющееся аналогом определения Г. Бора почти периодической функции, основывается на понятии ε -периода. Третье оп-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ределение соответствует критерию С. Бохнера почти периодичности функций. Четвертое определение приводится в терминах фактор-пространства. Благодаря использованию результатов теории почти периодических векторов в банаховых модулях доказывается, что все четыре определения эквивалентны. Кроме того, доказано, что введенные пространства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно различных подпространств исчезающих на бесконечности функций совпадают с пространствами обычных медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций соответственно. Целесообразность рассмотрения почти периодических на бесконечности функций обусловлена тем, что решения некоторых важных классов дифференциальных и разностных уравнений являются почти периодическими на бесконечности. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения с правой частью из различных подпространств исчезающих на бесконечности функций. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений классу почти периодических на бесконечности функций, и изучено асимптотическое представление решений.

Ключевые слова: почти периодические на бесконечности функции, медленно меняющиеся на бесконечности функции, дифференциальные уравнения

Благодарности: Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732 А).

Для цитирования: *Высоцкая И. А., Струкова И. И.* Исследование некоторых классов почти периодических на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 4–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

The research of some classes of almost periodic at infinity functions

I. A. Vysotskaya^{1✉}, I. I. Strukova²

¹Federal State Official Military Educational Institution of Higher Education “Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy”, 56A Starih Bolshevnikov St., Voronezh 394064, Russia

²Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia

Irina A. Vysotskaya, i.a.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6521-9570>

Irina I. Strukova, irina.k.post@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2355-0091>

Abstract. The article under consideration is devoted to continuous almost periodic at infinity functions defined on the whole real axis and with their values in a complex Banach space. We consider different subspaces of functions vanishing at infinity, not necessarily tending to zero at infinity. We introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to these subspaces. For almost periodic at infinity functions (with respect to a subspace) we give four different definitions. The first definition (approximating) is based on the approximation theorem. In the classical version, for almost periodic functions, they are represented as uniform closures of trigonometric polynomials. In our case, the Fourier coefficients are slowly varying at infinity functions. The second definition, which is an analogue



of G. Bohr's definition of an almost periodic function, is based on the concept of an ε -period. The third definition meets S. Bochner's criterion for the almost periodicity of functions. The fourth definition is given in terms of factor space. With the help of the results of the theory of almost periodic vectors in Banach modules those four definitions are proved to be equivalent. In addition, it was proved that the introduced spaces of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to different subspaces of functions vanishing at infinity coincide with the spaces of ordinary slowly varying and almost periodic at infinity functions, respectively. The feasibility of consideration of these functions is due to the fact that the solutions of some important classes of differential and difference equations are almost periodic at infinity. We consider differential equations whose right-hand side is a function vanishing at infinity and obtain necessary and sufficient conditions for their bounded solutions to be almost periodic at infinity functions. We also study an asymptotic representation of the solutions.

Keywords: almost periodic at infinity functions, slowly varying at infinity functions, differential equations

Acknowledgements: The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732 A).

For citation: Vysotskaya I. A., Strukova I. I. The research of some classes of almost periodic at infinity functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 4–14 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-4-14>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

1. ПРОСТРАНСТВА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ И ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $End X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X .

Рассматривается банахово пространство $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций со значениями в X и нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, $C_0(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0\}$ — подпространство исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$.

В банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R} \rightarrow End C_b(\mathbb{R}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на \mathbb{R} измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов эквивалентности) функций со сверткой функций в качестве умножения $(f_1 * f_2)(t) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t - s)f_2(s)ds$, $t \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

Символом $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

В данной статье используется следующая теорема Винера (см. [1]).

Теорема 1. Пусть \mathcal{I} — идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Он совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$, если функции $\hat{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{I}$, разделяют точки из \mathbb{R} , т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $\varphi \in \mathcal{I}$ такая, что $\hat{\varphi}(\lambda_1) \neq \hat{\varphi}(\lambda_2)$.



Рассмотрим множество функций $\{f_\alpha, \alpha > 0\}$ из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Их преобразования Фурье имеют вид $\widehat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\alpha + i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, поэтому они разделяют точки из \mathbb{R} , т.е. для любых чисел $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ справедливо условие $\widehat{f}_\alpha(\lambda_1) \neq \widehat{f}_\alpha(\lambda_2)$. Тогда из теоремы 1 следует, что наименьший замкнутый идеал алгебры $L^1(\mathbb{R})$, содержащий множество $M_\alpha = \{f_\alpha\}$, совпадает со всей алгеброй $L^1(\mathbb{R})$.

Наряду с $C_0(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$ вида $\mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, X) : f_\alpha * x \in C_0(\mathbb{R}, X)\}$. Такие функции также будем называть *исчезающими на бесконечности*.

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{R}, X)$ символ X опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = C_0(\mathbb{R})$).

Пример 1. Следующие функции принадлежат пространству $\mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$:

- 1) $x_1(t) = e^{it^2}$;
- 2) $x_2(t) = \sin at^2$;
- 3) $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Выберем произвольное $\alpha > 0$ и покажем, что $x_1 \in \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Действительно, $(f_\alpha * x_1)(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha(t-\tau)} e^{i\tau^2} d\tau = e^{\frac{i\alpha^2}{4}} e^{-\alpha t} \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau$.

Вычислим последний интеграл отдельно:

$$\int_{-\frac{i\alpha}{2}}^\infty e^{i\tau^2} d\tau = \int_{-\frac{i\alpha}{2}}^0 e^{i\tau^2} d\tau + \int_0^\infty e^{i\tau^2} d\tau = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

где символом erf обозначена функция ошибок, задаваемая формулой

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда получаем, что

$$(f_\alpha * x_1)(t) = e^{-\alpha t} e^{\frac{i\alpha^2}{4}} \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha(i+1)}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. $f_\alpha * x_1 \in C_0(\mathbb{R})$.

Определение 1. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из C_b) подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающих свойствами:

- 1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$;
- 2) $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, $\alpha > 0$;
- 3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Каждое такое подпространство будем называть подпространством *исчезающих на бесконечности функций*.



Примером одного из таких подпространств является определенное ниже подпространство $C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$ [2, 3] функций, интегрально исчезающих на бесконечности.

Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^{\alpha} \|x(t+s)\| ds = 0.$$

В [2] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего условию $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. В [4, 5] изучались свойства непрерывных периодических на бесконечности функций.

Сформулируем определение медленно меняющейся на бесконечности функции, которое использовалось в работах [4, 6–9].

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь приведем определение функции, медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего всем условиям определения 1.

Определение 3. Функция $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$* , если $S(t)x - x \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения следует, что любое пространство $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ является замкнутым подпространством в $C_b(\mathbb{R}, X)$. Свойства медленно меняющихся на бесконечности функций изучались в работах [8–10].

Далее нам потребуется следующее определение.

Определение 4. Ограниченная последовательность $(e_n, n \geq 1)$ функций из алгебры $L^1(\mathbb{R})$ называется *ограниченной аппроксимативной единицей* (о.а.е.) алгебры $L^1(\mathbb{R})$ (см. [11]), если $\widehat{e}_n(0) = 1$ для всех $n \geq 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n * f = f$ для всех f из $L^1(\mathbb{R})$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 1. Тогда $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\alpha > 0$. Достаточно доказать равенство $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_{0,\alpha}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Включение $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) \subset C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_{0,\alpha})$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_{0,\alpha})$, тогда $\psi = S(t)x - x \in \mathcal{C}_{0,\alpha}(\mathbb{R}, X)$, т.е. $f_\alpha * \psi \in C_0(\mathbb{R}, X)$, где функция f_α имеет вид (1). Пусть $(e_n, n \geq 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. Из теоремы 1 следует, что

$$e_n * \psi = e_n * (S(t)x - x) = S(t)(e_n * x) - (e_n * x) \in C_0(\mathbb{R}, X), \quad n \geq 1,$$

откуда получаем, что $y = e_n * x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, а значит, и $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$. □



2. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$

Сформулируем определение обычной почти периодической на бесконечности функции (см. [2]).

Определение 5. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции x_1, \dots, x_N из $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. Почти периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$) впервые были введены в рассмотрение в статьях [6, 7]. В [2] изучались почти периодические на бесконечности функции относительно подпространств $C_0(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{R}, X)$. Для $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) = C_0(\mathbb{R}, X)$ определение 5 совпадает с определением 10 из [2].

На основании определения 5 строится определение почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющего определению 1.

Определение 6. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$* исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и функции x_1, \dots, x_N из пространства $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) - \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}\| < \varepsilon.$$

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Непосредственно из определения 3 следует, что если $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) = \mathbb{R}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Таким образом, имеет место включение

$$\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) \subset AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0).$$

Приведем еще три определения функций из $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$ и покажем их эквивалентность.

Определение 7. Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathbb{R}_+$ называется ε -периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Множество ε -периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$. Если $\mathcal{C}_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$, то определение 7 эквивалентно определению ε -периода из статьи [7].

Определение 8. Множество Ω из \mathbb{R} называется *относительно плотным* на \mathbb{R} , если существует такое $l > 0$, что $[t, t + l] \cap \Omega \neq \emptyset$ для любого $t \in \mathbb{R}$.



Определение 9. Функция x из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon)$ ее ε -периодов относительно плотно на \mathbb{R} .

Определение 10. Множество функций $M \subset C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций b_1, \dots, b_N (ε -сеть на бесконечности) из M таких, что для любой функции $x \in M$ существуют функции b_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, и $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, для которых имеет место оценка $\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Определение 11. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов $S(t)x$, $t \in \mathbb{R}$, является предкомпактным на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Заметим, что функции вида $x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)e^{i\lambda_k t}$, $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ (обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 11.

Определение 12. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, если класс эквивалентности $\tilde{x} = x + \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X) \in \mathcal{X}$ является почти периодическим вектором в \mathcal{X} относительно изометрического представления $\tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$.

Теорема 3. Все определения почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ (определения 6, 9, 11, 12) эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T = \tilde{S} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$. Для этого представления определение 6 соответствует свойству 4) из определения почти периодического вектора (определение 14 из [2]). Поскольку все свойства из определения 14 из [2] эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 9, 11 и 6 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и \tilde{x} — класс эквивалентности в \mathcal{X} , построенный по функции x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathcal{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$ ε -периодов класса \tilde{x} . Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 11 и свойства 2) определения 14 из [2] непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 6 и свойства 3) из определения 14 из [2]. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга [11–13] $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathcal{X}$, $\tilde{y} = y + \mathcal{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ представима в виде $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (см. свойство 4 из леммы 3 в [2]). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$, и поэтому



$\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $y_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathbb{R}$, и поэтому в силу свойства 4 из леммы 3 в [2] получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$. \square

Теорема 4. Пусть $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ — одно из подпространств исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющее всем условиям определения 1. Тогда $AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0) = AP_\infty(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. В силу эквивалентности всех четырех определений почти периодической на бесконечности функции относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$ для доказательства можно взять любое из них. Пусть функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ удовлетворяет определению 6, т.е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X; \mathcal{C}_0)$. Тогда в силу теоремы 2 она удовлетворяет и определению 5, т.е. $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. \square

3. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор с областью определения $D(A)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(t), t \in \mathbb{R}, \psi \in C_b(\mathbb{R}, X). \tag{2}$$

Теорема 5. Пусть функция ψ из уравнения (2) принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$ и для спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in \text{End } X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1, \dots, i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, \dots, i\lambda_N$ — полупростые собственные значения оператора A . Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференциального уравнения (2) принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^N y_k(t)e^{i\lambda_k t} + z_0(t), t \in \mathbb{R}, y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X), 0 \leq k \leq N, z_0 \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Доказательство. Спектр $\sigma(A)$ оператора $A \in \text{End } X$ представим в виде

$$\sigma(A) = \sigma_0 \cup \sigma_- \cup \sigma_+,$$

где σ_- — совокупность собственных значений оператора A , лежащих в левой полуплоскости, σ_+ — в правой полуплоскости, σ_0 — на мнимой оси. Исходя из такого разбиения спектра, рассмотрим проекторы $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_-, \mathcal{P}_+$, которые построены по спектральным множествам $\sigma_0, \sigma_-, \sigma_+$ соответственно. Следовательно, $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_- + \mathcal{P}_+$. Эти проекторы индуцируют разложение пространства X в прямую сумму $X = X_0 \oplus X_- \oplus X_+$, где $X_0 = \text{Im } \mathcal{P}_0, X_- = \text{Im } \mathcal{P}_-, X_+ = \text{Im } \mathcal{P}_+$.

Решение $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ представимо в виде $x(t) = x_-(t) + x_+(t) + x_0(t), t \in \mathbb{R}$, где $x_-(t) = \mathcal{P}_-x(t), x_+(t) = \mathcal{P}_+x(t), x_0(t) = \mathcal{P}_0x(t), t \in \mathbb{R}$.

Применяя проекторы $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_-, \mathcal{P}_+$ к уравнению (2), получим следующие равенства:

$$\dot{x}_-(t) = A_-x_-(t) + \psi_-(t), t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$\dot{x}_+(t) = A_+x_+(t) + \psi_+(t), t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$\dot{x}_0(t) = A_0x_0(t) + \psi_0(t), t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$



где $A_- = A | X_-$, $A_+ = A | X_+$, $A_0 = A | X_0$ — сужения оператора A на подпространства X_- , X_+ , X_0 соответственно. Отметим, что $\sigma(A_-) = \sigma_-$, $\sigma(A_+) = \sigma_+$, $\sigma(A_0) = \{i\lambda_0, \dots, i\lambda_N\}$.

Ввиду равенств (3), (4) функция x_- представима в виде $x_- = G_- * x$, где

$$G_-(t) = \begin{cases} e^{A-t} & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0. \end{cases}$$

Аналогично $x_+ = G_+ * x$, где

$$G_+(t) = \begin{cases} 0 & , t \geq 0, \\ -e^{A+t} & , t < 0. \end{cases}$$

Отметим, что функции $G_-, G_+ : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ принадлежат алгебре $L^1(\mathbb{R}, \text{End } X)$.

Поскольку ψ_- и ψ_+ принадлежат $C_0(\mathbb{R}, X)$, то их свертка с любой суммируемой операторнозначной функцией принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$. Следовательно, $x_-, x_+ \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим уравнение (5). Проектор \mathcal{P}_0 представим в виде $\mathcal{P}_0 = P_1 + P_2 + \dots + P_N$, где каждый из операторов P_k , $1 \leq k \leq N$, является спектральным проектором, построенным по спектральному множеству $\{i\lambda_k\}$, и выполняется условие $AP_k = i\lambda_k P_k$, $0 \leq k \leq N$.

Рассмотрим ограниченные функции $x_k = P_k x_0$, $0 \leq k \leq N$, и систему равенств $\dot{x}_k(t) = i\lambda_k x_k(t) + \psi_k(t)$, $0 \leq k \leq N$, где $\psi_k = P_k \psi_0$, $1 \leq k \leq N$, $\psi_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Положим $y_k(t) = x_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\dot{y}_k(t) = \dot{x}_k(t)e^{-i\lambda_k t} - i\lambda_k x_k(t)e^{-i\lambda_k t} = (\dot{x}_k(t) - i\lambda_k x_k(t))e^{-i\lambda_k t} = \psi_k(t)e^{-i\lambda_k t}$. Непосредственно из определения пространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ получаем, что функция $t \mapsto \psi_k(t)e^{-i\lambda_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, также принадлежит пространству $C_0(\mathbb{R}, X)$. А поскольку $\dot{y}_k \in C_0(\mathbb{R}, X)$, то $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

Следовательно, решение x уравнения (2) представимо в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^N y_k(t)e^{i\lambda_k t} + z_0(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq k \leq N$, $z_0 = x_- + x_+ \in C_0(\mathbb{R}, X)$. □

Теорема 6. Пусть функция ψ из уравнения (2) принадлежит пространству $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$, удовлетворяющему всем условиям определения 1, и для спектра $\sigma(A)$ оператора $A \in \text{End } X$ выполнено условие $\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_0, i\lambda_1, \dots, i\lambda_N\}$, где $i\lambda_0, \dots, i\lambda_N$ — полупростые собственные значения оператора A . Тогда каждое ограниченное решение $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ дифференциального уравнения (2) принадлежит $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$ и допускает представление вида $x(t) = \sum_{k=0}^N y_k(t)e^{i\lambda_k t} + z_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $0 \leq k \leq N$, $z_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Доказательство. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$ — ограниченное решение дифференциального уравнения (2) с функцией $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, X)$. Тогда функция x удовлетворяет уравнению

$$f_\alpha * \dot{x} = A(f_\alpha * x) + f_\alpha * \psi,$$

где функция $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ задается формулой (1). Учитывая, что функция $\varphi = f_\alpha * \psi$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}, X)$ (см. пример 1), получаем, что функция $y = f_\alpha * x$ удовлетворяет условиям теоремы 5, а значит, принадлежит пространству $AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. Тогда из теоремы 1 следует, что $e_n * x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$, $n \geq 1$, где $(e_n, n \geq 1)$ — произвольная о.а.е. алгебры $L^1(\mathbb{R})$. А значит, $x \in AP_\infty(\mathbb{R}, X)$. □



Список литературы

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца // Успехи математических наук. 1946. Т. 1, № 2 (12). С. 48–146.
2. Баскаков А. Г., Струкова И. И., Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 2. С. 293–308. <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.205>
3. Тришина И. А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 4. С. 402–418. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-4-402-418>
4. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 186–198. <https://doi.org/10.17377/smzh.2016.57.114>.
5. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity // Eurasian Mathematical Journal. 2016. Vol. 7, № 4. P. 9–29.
6. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. 2013. Т. 68, № 1 (409). С. 77–128. <https://doi.org/10.4213/rm9505>
7. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. <https://doi.org/10.4213/mzm10285>
8. Баскаков А. Г., Калужина Н. С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Математические заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. <https://doi.org/10.4213/mzm8963>
9. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 28–38. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-28-38>.
10. Тришина И. А. Медленно меняющиеся на бесконечности функции // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. 2017. № 4. С. 134–144.
11. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. <https://doi.org/10.4213/im639>
12. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151.
13. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces // Mediterranean Journal of Mathematics. 2016. Vol. 13, № 5. P. 2443–2462. <https://doi.org/10.1007/s00009-015-0633-0>

References

1. Gelfand I. M., Raikov D. A., Shilov G. E. Commutative normed rings. *Uspehi Matem. Nauk (N. S.)*, 1946, vol. 1, no. 2 (12), pp. 48–146 (in Russian).
2. Baskakov A. G., Strukova I. I., Trishina I. A. Solutions Almost Periodic at Infinity to Differential Equations With Unbounded Operator Coefficients. *Siberian Mathematical Journal*, 2018, vol. 59, iss. 2, pp. 231–242. <https://doi.org/10.1134/S0037446618020052>



3. Trishina I. A. Almost Periodic at Infinity Functions Relative to the Subspace of Functions Integrally Decrease at Infinity. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 4, pp. 402–418 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-3-402-418>
4. Strukova I. I. On Wiener's Theorem for functions periodic at infinity. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 1, pp. 145–154. <https://doi.org/10.1134/S0037446616010146>
5. Baskakov A., Strukova I. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. *Eurasian Mathematical Journal*, 2016, vol. 7, no. 4, pp. 9–29.
6. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. <https://doi.org/10.1070/RM2013v068n01ABEH004822>
7. Baskakov A. G. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. <https://doi.org/10.1134/S0001434615010198>
8. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 587–605. <https://doi.org/10.1134/S0001434612110016>
9. Strukova I. I. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 28–38 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-1-28-38>.
10. Trishina I. A. Functions slowly varying at infinity. *Proceeding of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, vol. 4, pp. 134–144 (in Russian).
11. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. <http://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000535>
12. Baskakov A. G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. <https://doi.org/10.1007%2Fs10958-006-0286-4>
13. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, vol. 13, no. 5, pp. 2443–2462. <https://doi.org/10.1007/s00009-015-0633-0>

Поступила в редакцию / Received 05.11.2019

Принята к публикации / Accepted 15.01.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 15–25
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 15–25

Научная статья

УДК 512.542

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25>

О максимальных подформациях n -кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп

М. М. Сорокина[✉], С. П. Максаков

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

Сорокина Марина Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>

Максаков Серафим Павлович, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, msp222@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9032-4951>

Аннотация. В статье рассматриваются только конечные группы. Среди классов групп центральное место занимают классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, называемые формациями. В статье изучаются Ω -расслоенные формации, построенные В. А. Ведерниковым в 1999 г., где Ω — непустой подкласс класса \mathfrak{J} всех простых групп. Ω -расслоенные формации определяются с помощью двух функций — Ω -спутника $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$ и направления $\varphi : \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$. Концепция кратной локальности, введенная в рассмотрение А. Н. Скибой в 1987 г. для формаций и получившая в дальнейшем развитие для многих других классов групп, применительно к Ω -расслоенным формациям заключается в следующем: всякую формацию считают 0-кратно Ω -расслоенной с направлением φ ; Ω -расслоенную формацию с направлением φ называют n -кратно Ω -расслоенной, где n — натуральное число, если она имеет такой Ω -спутник, все непустые значения которого являются $(n - 1)$ -кратно Ω -расслоенными формациями с направлением φ . Целью работы является исследование свойств максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций заданной n -кратно Ω -расслоенной формации. Используются классические методы доказательств теории групп, теории классов групп, а также методы общей теории решеток. В работе установлено существование максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций для формаций с определенными свойствами, получена характеристика формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} , а также установлена взаимосвязь между максимальным внутренним Ω -спутником 1-кратно Ω -расслоенной формации и максимальным внутренним Ω -спутником ее максимальной 1-кратно Ω -расслоенной подформации. Полученные результаты будут полезными при исследовании внутреннего строения формаций конечных групп, в частности, при изучении максимальных цепей подформаций и установлении решеточных свойств формаций.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация групп, максимальная подформация, Ω -расслоенная формация, n -кратно Ω -расслоенная формация

Для цитирования: Сорокина М. М., Максаков С. П. О максимальных подформациях n -кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп // Известия Саратовского университета.



Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 15–25.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25>

On maximal subformations of n -multiple Ω -foliated formations of finite groups

M. M. Sorokina[✉], S. P. Maksakov

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

Marina M. Sorokina, mmsorokina@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9516-626X>

Seraphim P. Maksakov, mmp222@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9032-4951>

Abstract. Only finite groups are considered in the article. Among the classes of groups the central place is occupied by classes closed regarding homomorphic images and subdirect products which are called formations. We study Ω -foliated formations constructed by V. A. Vedernikov in 1999 where Ω is a nonempty subclass of the class \mathfrak{S} of all simple groups. Ω -Foliated formations are defined by two functions — an Ω -satellite $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{formations}\}$ and a direction $\varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \{\text{nonempty Fitting formations}\}$. The conception of multiple locality introduced by A. N. Skiba in 1987 for formations and further developed for many other classes of groups, as applied to Ω -foliated formations is as follows: every formation is considered to be 0-multiple Ω -foliated with a direction φ ; an Ω -foliated formation with a direction φ is called an n -multiple Ω -foliated formation where n is a positive integer if it has such an Ω -satellite all nonempty values of which are $(n - 1)$ -multiple Ω -foliated formations with the direction φ . The aim of this work is to study the properties of maximal n -multiple Ω -foliated subformations of a given n -multiple Ω -foliated formation. We use classical methods of the theory of groups, of the theory of classes of groups, as well as methods of the general theory of lattices. In the paper we have established the existence of maximal n -multiple Ω -foliated subformations for the formations with certain properties, we have obtained the characterization of the formation $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ which is the intersection of all maximal n -multiple Ω -foliated subformations of the formation \mathfrak{F} , and we have revealed the relation between a maximal inner Ω -satellite of 1-multiple Ω -foliated formation and a maximal inner Ω -satellite of its maximal 1-multiple Ω -foliated subformation. The results will be useful in studying the inner structure of formations of finite groups, in particular, in studying the maximal chains of subformations and in establishing the lattice properties of formations.

Keywords: finite group, class of groups, formation, maximal subformation, Ω -foliated formation, n -multiple Ω -foliated formation

For citation: Sorokina M. M., Maksakov S. P. On maximal subformations of n -multiple Ω -foliated formations of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 15–25 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов групп важную роль играют функциональные методы (см., например, [1]). Впервые эти методы были применены В. Гашюцем к построению локальных формаций [2]. В работе [3] Л. А. Шеметков с помощью функции вида $f_1 : \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где \mathfrak{J} — класс всех простых групп, ввел в рассмотрение понятие композиционной формации. В [4] Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба обобщили данное понятие, построив \mathfrak{L} -композиционные формации, где \mathfrak{L} — непустой подкласс класса \mathfrak{J} , используя при этом функции-спутники вида $f_2 : \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$. Развивая данный функциональный подход, В. А. Ведерников разработал концепцию Ω -расслоенности для формаций и классов Фиттинга, в частности, с помощью новой функции (функции-направления) вида $\varphi : \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$, в работе [5] была построена серия Ω -расслоенных (расслоенных) формаций, где Ω — непустой подкласс класса \mathfrak{J} . Рассматривая в качестве φ различные конкретные функции, получают различные виды Ω -расслоенных (расслоенных) формаций, один из которых составляют Ω -композиционные (композиционные) формации. В статье [6] А. Н. Скиба ввел в рассмотрение концепцию кратной локальности для формаций, которая в дальнейшем получила развитие для многих других классов групп. Ω -расслоенные и n -кратно Ω -расслоенные формации изучались в работах Ю. А. Еловиковой, М. А. Корпачевой, Е. Н. Деминой, А. Б. Еловикова, Д. Г. Коптюх, Н. В. Силенок, М. М. Сорокиной и др. (см., например, [7–11]). Результаты исследований, представленные в настоящей работе, также относятся к данному направлению.

Как отмечено в монографии А. Н. Скибы [12], изучение подформационного строения формаций является одной из главных задач в теории формаций конечных групп. При решении данной задачи важную роль играют максимальные подформации исследуемых формаций, их наличие, свойства, внутреннее строение и другие характеристики. В настоящей работе изучаются максимальные n -кратно Ω -расслоенные подформации n -кратно Ω -расслоенных формаций. Решены следующие задачи: доказано существование максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций для формаций с заданными свойствами (теоремы 1–3); получена характеристика формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} (теорема 4); установлена взаимосвязь между функциями-спутниками 1-кратно Ω -расслоенной формации и ее максимальной 1-кратно Ω -расслоенной подформации, а именно взаимосвязь между значениями максимального внутреннего Ω -спутника 1-кратно Ω -расслоенной формации и соответствующими значениями максимального внутреннего Ω -спутника ее максимальной 1-кратно Ω -расслоенной подформации (теорема 5). В доказательствах используются классические методы теории групп, методы общей теории решеток, а также методы теории формаций, в частности, методы, разработанные Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой в [4] для \mathfrak{L} -композиционных формаций.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [1, 12]). Приведем лишь некоторые из них. Символ $:=$ означает равенство по определению. Если A — подгруппа (нормальная) группы G , то используется обозначение $A \leq G$ ($A \triangleleft G$). Запись $G = A \rtimes B$ означает, что группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B , где $A \triangleleft G$; Z_n — циклическая группа порядка n . Группа G называется *монолитической*, если она об-



ладает единственной минимальной нормальной подгруппой, называемой *монолитом* группы G .

Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через \mathfrak{E} , \mathfrak{S} , \mathfrak{A} обозначаются классы всех конечных, всех конечных разрешимых и всех конечных абелевых групп соответственно. (\mathfrak{X}) — класс групп, порожденный совокупностью групп \mathfrak{X} , т.е. (\mathfrak{X}) — пересечение всех классов групп, содержащих \mathfrak{X} ; в частности, (G) — класс всех групп, изоморфных группе G . Класс \mathfrak{F} называется замкнутым относительно: *гомоморфных образов*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует

$$G/N \in \mathfrak{F}; \tag{1}$$

подпрямых произведений, если $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ влечет

$$G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}; \tag{2}$$

нормальных подгрупп, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует

$$N \in \mathfrak{F}; \tag{3}$$

произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп, если из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что

$$G \in \mathfrak{F}. \tag{4}$$

Класс \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (1) и (2), называется *формацией*; класс \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется *классом Фиттинга*; \mathfrak{F} — *формация Фиттинга*, если \mathfrak{F} является *формацией* и *классом Фиттинга*. Наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу Фиттинга \mathfrak{F} , обозначается $G_{\mathfrak{F}}$ и называется *\mathfrak{F} -радикалом* группы G ; наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит *формации* \mathfrak{F} , обозначается $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *\mathfrak{F} -корадикалом* группы G . Через $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ обозначается произведение классов групп \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 , т.е. $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{E} \mid \exists N \triangleleft G, N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2)$; $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ — *корадикальное произведение* класса групп \mathfrak{F}_1 и *формации* \mathfrak{F}_2 , т.е. $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1)$. Пусть \mathfrak{I} — класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса \mathfrak{I} ; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; для класса групп \mathfrak{F} через $K(\mathfrak{F})$ обозначается $\cup_{G \in \mathfrak{F}} K(G)$. Группа G называется *Ω -группой*, если $K(G) \subseteq \Omega$. В дальнейшем \mathfrak{F}_{Ω} — класс всех Ω -групп, принадлежащих классу \mathfrak{F} ; в частности, для любой группы $A \in \mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{F}_A := \mathfrak{F}_{(A)}$, $\mathfrak{F}_{A'} := \mathfrak{F}_{(A')}$, где $(A)' := \mathfrak{I} \setminus (A)$, $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{E}_{Z_p}$. Главный фактор H/L группы G называется *главным A -фактором*, если $K(H/L) = (A)$. Через \mathfrak{S}_{cA} обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A -фактор централен; $O_{\Omega}(G) := G_{\mathfrak{E}_{\Omega}}$, $O_A(G) := G_{\mathfrak{E}_A}$, $O_p(G) := O_{Z_p}(G)$, $O_{A',A}(G) := G_{\mathfrak{E}_{A',A}}$, $F_A(G) := G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ [5]. Как отмечается в [5, замечание 2], подгруппа $F_A(G)$ группы G совпадает с пересечением централизаторов всех главных A -факторов группы G .

Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$ (символ Ω' обозначает элемент, не принадлежащий Ω), $h : \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi : \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ — функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения и называемые соответственно *ΩF -функцией*, *F -функцией*, *FR -функцией*. Если ψ_1, ψ_2 — ΩF -функции (F -функции, FR -функции), то полагают $\psi_1 \leq \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(A) \subseteq \psi_2(A)$



для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (соответственно, для любого $A \in \mathcal{J}$). Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$ называется Ω -расслоенной формацией с направлением φ (коротко, $\Omega\varphi$ -расслоенной формацией) с Ω -спутником f ; формация $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in K(G))$ называется расслоенной формацией с направлением φ (коротко, φ -расслоенной формацией) со спутником h [5, с. 126–127]. $\Omega\varphi$ -расслоенная (φ -расслоенная) формация называется Ω -свободной (свободной), если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathcal{J}$; Ω -канонической (канонической), если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любой группы $A \in \mathcal{J}$; Ω -композиционной (композиционной), если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой $A \in \mathcal{J}$ [5, с. 127–129]. Направления Ω -свободной, Ω -канонической и Ω -композиционной формаций обозначаются соответственно φ_0 , φ_2' и φ_3 . Направление φ Ω -расслоенной формации называется r -направлением, если $\mathfrak{E}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathcal{J}$; b -направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathcal{J}$ [13, с. 56].

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR -функция. Следуя [6], всякую непустую формацию считают 0 -кратно Ω -расслоенной с направлением φ (коротко, $0\Omega\varphi$ -расслоенной); при $n > 0$ $\Omega\varphi$ -расслоенную формацию \mathfrak{F} называют n -кратно Ω -расслоенной с направлением φ (коротко, $n\Omega\varphi$ -расслоенной), если \mathfrak{F} обладает хотя бы одним $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником, т.е. таким Ω -спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)\Omega\varphi$ -расслоенными формациями. Собственную $n\Omega\varphi$ -расслоенную подформацию \mathfrak{M} формации \mathfrak{F} называют максимальной $n\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} , если для любой $n\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{H} , удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Через $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначается $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация, порожденная множеством групп \mathfrak{X} , т.е. $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ — пересечение всех $n\Omega\varphi$ -расслоенных формаций, содержащих \mathfrak{X} ; в частности, $\Omega F_1(\mathfrak{X}, \varphi) := \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\Omega F_0(\mathfrak{X}, \varphi) := form(\mathfrak{X})$; если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $\Omega F_n(\{G\}, \varphi)$ называется *однопорожденной $n\Omega\varphi$ -расслоенной формацией* и обозначается $\Omega F_n(G, \varphi)$ (см., например, [10]).

Пусть θ — непустое множество формаций, упорядоченное относительно включения \subseteq , \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 — θ -формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \theta$). Тогда точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 определяют соответственно следующим образом: $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \wedge_\theta \mathfrak{F}_2$, $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1 \wedge_\theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$ — θ -формация, порожденная объединением $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, т.е. $\mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$ — пересечение всех θ -формаций, содержащих $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Если множество θ замкнуто относительно пересечения и в θ имеется такая формация \mathfrak{M} , что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ для любой $\mathfrak{H} \in \theta$, то $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \theta$ и $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \theta$, тем самым на множестве θ задана структура решетки. В этом случае θ называется *полной решеткой формаций* [12, с. 12]. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \theta$, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Через $\mathfrak{F}_2/\theta\mathfrak{F}_1$ обозначается решетка всех θ -формаций \mathfrak{H} , удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$ [12, с. 168]. Через $n\Omega\varphi$ обозначим множество всех $n\Omega\varphi$ -расслоенных формаций. Отметим, что, согласно [10, теорема 4 (6)], множество $n\Omega\varphi$ является полной модулярной решеткой формаций.

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ N -КРАТНО Ω -РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR -функция. Следуя [12], $n\Omega\varphi$ -расслоенную формацию \mathfrak{F} назовем *$n\Omega\varphi$ -неприводимой*, если $\Omega F_n(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций из \mathfrak{F} .



Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, \mathfrak{F} — $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация. Если \mathfrak{F} является $n\Omega\varphi$ -неприводимой формацией, то в ней существует единственная максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} — $n\Omega\varphi$ -неприводимая формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} и $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi)$. Так как \mathfrak{F} — $n\Omega\varphi$ -неприводимая формация, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что \mathfrak{M} — максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} . Пусть \mathfrak{H} — такая $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация из \mathfrak{F} , что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Отсюда, ввиду задания \mathfrak{M} , получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Последнее, в силу включения $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, означает, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что \mathfrak{M} — максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} .

Покажем, что \mathfrak{M} — единственная максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} . Пусть \mathfrak{X} — произвольная максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} . Тогда $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F_n(\cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi) = \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ в силу выбора \mathfrak{X} получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$. Таким образом, всякая максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} совпадает с \mathfrak{M} , и, следовательно, \mathfrak{M} — единственная максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} . \square

Справедливость следующей леммы вытекает из [10, теорема 4 (2, 3)].

Лемма. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, $\mathfrak{F}_i \in n\Omega\varphi$, $i \in I$, $\mathfrak{F} = \cup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Если множество $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является цепью, то $\mathfrak{F} \in n\Omega\varphi$.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}$, где \mathfrak{B} и \mathfrak{H} — соответственно однопорожденная и собственная $n\Omega\varphi$ -расслоенные подформации формации \mathfrak{F} . Тогда в \mathfrak{F} существует максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация, содержащая \mathfrak{H} .

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \Omega F_n((\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}), \varphi)$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} = \Omega F_n((\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}), \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$, что в силу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ невозможно. Следовательно, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$. Покажем, что в \mathfrak{B} существует максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Пусть $\mathcal{X} := \{\mathfrak{X} \in n\Omega\varphi \mid \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}\}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — произвольная цепь в \mathcal{X} и $\mathfrak{D} := \cup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Согласно лемме, $\mathfrak{D} \in n\Omega\varphi$, причем $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. По условию $\mathfrak{B} = \Omega F_n(B, \varphi)$, где B — некоторая группа. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, то найдется такое $j \in I$, что $B \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{B} = \Omega F_n(B, \varphi) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору \mathcal{X} . Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathcal{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в \mathcal{X} имеется максимальный элемент \mathfrak{M} .

Покажем, что \mathfrak{M} — максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{B} . Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{T} \in n\Omega\varphi$. Так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{T}$ и поэтому $\mathfrak{T} \in \mathcal{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$. Таким образом, \mathfrak{M} — максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{B} .

Так как, согласно [10, теорема 4 (6)], множество $n\Omega\varphi$ является модулярной решеткой формаций, то ввиду [14, глава 1, п. 7] решетка $(\mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}) /_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}$ изоморфна решетке $\mathfrak{B} /_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{B} \wedge_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H})$, т. е. $\mathfrak{F} /_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H} \cong \mathfrak{B} /_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H})$. В силу данного изоморфизма, из того, что в \mathfrak{B} существует максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$, следует, что в \mathfrak{F} существует максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация, содержащая \mathfrak{H} . \square

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ обозначается совокуп-



ность всех групп вида $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \dots, i_t \in I$ [12, с. 171].

Теорема 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — r -направление Ω -расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_2'$, $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i \in n\Omega\varphi$, $i \in I$. Если формация \mathfrak{F} обладает максимальной $n\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией, то найдется такое $j \in I$, что формация \mathfrak{F}_j также обладает максимальной $n\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией.

Доказательство. Пусть формация \mathfrak{F} обладает максимальной $n\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией \mathfrak{M} . Предположим, что формация \mathfrak{F}_i не имеет максимальных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций для любого $i \in I$. По определению $\Omega\varphi$ -расслоенной формации имеем $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Тогда, согласно [12, лемма 4.3.4], $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i \in I} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то существует такое $j \in I$, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}_j$. Ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}_j$ получаем, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}_j$. По предположению формация \mathfrak{F}_j не имеет максимальных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций. Следовательно, в \mathfrak{F}_j существует такая собственная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{H}_j , что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j$. Пусть $\mathfrak{M}_{j'} := \bigotimes_{i \in I \setminus \{j\}} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$ и $\mathfrak{H} := \Omega F_n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $G = A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$, где $A_{i_r} \in \mathfrak{F}_{i_r} \cap \mathfrak{M}$, $i_r \in I$, $r = \overline{1, t}$. Отметим, что $A_{i_s} \cap A_{i_p} = 1$ для любых $s \neq p$, $s = \overline{1, t}$, $p = \overline{1, t}$. Пусть $i_r \neq j$ для любого $r = \overline{1, t}$. Тогда $G \in \mathfrak{M}_{j'}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $j \in \{i_1, \dots, i_t\}$. Если $t = 1$, то $i_1 = i_t = j$ и $G = A_j \in \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j$. Поэтому при $t = 1$ имеем $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $t \neq 1$. Поскольку в прямом произведении $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_t}$ множители попарно перестановочны, то можем считать $A_{i_t} = A_j$. Это означает, что $G/A_j = G/A_{i_t} \cong A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{t-1}} \in \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A := A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{t-1}}$. Тогда $G/A \cong A_j \in \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Так как \mathfrak{H} — формация, то из $G/A_j \in \mathfrak{H}$ и $G/A \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \cong G/(A \cap A_j) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}$, и ввиду $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$ получаем $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_j \subset \mathfrak{H}_j$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi)$, достаточно проверить, что \mathfrak{F} — $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация, содержащая множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$. Поскольку \mathfrak{F}_i — $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация для любого $i \in I$, φ — r -направление и $\varphi \leq \varphi_2'$, то по [7, теорема 1] формация \mathfrak{F} является $n\Omega\varphi$ -расслоенной. Из $\mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду того, что \mathfrak{H} — наименьшая $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация, содержащая $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j. \quad (5)$$

С другой стороны, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \Omega F_n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi) \cap \mathfrak{F}_j$. Отметим, что по [7, теорема 1] $\mathfrak{M}_{j'} \in n\Omega\varphi$. Поскольку, согласно [10, теорема 4 (6)], решетка $n\Omega\varphi$ модулярна, то ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'} = (1)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j &= \Omega F_n(\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi) \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j \wedge_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{H}_j \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{M}_{j'}) = \\ &= \mathfrak{H}_j \vee_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{F}_j \wedge_{n\Omega\varphi} \mathfrak{M}_{j'}) = \Omega F_n(\mathfrak{H}_j \cup (\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'}), \varphi) = \mathfrak{H}_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j. \quad (6)$$



Из (5) и (6) следует равенство $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$, что в силу выбора формации \mathfrak{H}_j невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 получаем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, что противоречит выбору \mathfrak{M} . Таким образом, найдется $j \in I$ такое, что формация \mathfrak{F}_j обладает максимальной $n\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией. \square

3. О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ N -КРАТНО Ω -РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR -функция. Следуя [12], через $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ обозначим пересечение всех максимальных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} . Если \mathfrak{F} не имеет максимальных $n\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций, то полагаем $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. Группу $G \in \mathfrak{F}$ назовем $n\Omega\varphi$ -необразующей группой формации \mathfrak{F} , если из $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi)$ всегда следует, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$.

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \leq \varphi$, \mathfrak{F} — $n\Omega\varphi$ -расслоенная формация. Тогда формация $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ состоит из всех $n\Omega\varphi$ -необразующих групп формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть \mathfrak{K} — совокупность всех $n\Omega\varphi$ -необразующих групп из \mathfrak{F} .

1. Установим, что $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Пусть $G \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Проверим, что $G \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$. Отметим, что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subset \mathfrak{F}$. Так как $\Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi) = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \vee_{n\Omega\varphi} \Omega F_n(G, \varphi)$, то, по теореме 2, в \mathfrak{F} существует такая максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{H} , что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $G \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $\Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ и поэтому $G \in \mathfrak{K}$. Следовательно, $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Пусть $K \in \mathfrak{K}$. Предположим, что $K \notin \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Тогда $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{F}$ и, согласно определению формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, в \mathfrak{F} существует такая максимальная $n\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{F}_1 , что $K \notin \mathfrak{F}_1$. Рассмотрим формацию $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi)$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \Omega F_n(\mathfrak{F}_1, \varphi) \subset \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi) = \mathfrak{F}$. Ввиду выбора группы K имеем $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1, \varphi) = \mathfrak{F}$. Это означает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $K \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ и поэтому $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$.

Из 1 и 2 следует, что $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}$. \square

4. ОБ Ω -СПУТНИКАХ 1-КРАТНО Ω -РАССЛОЕННЫХ ФОРМАЦИЙ И ИХ МАКСИМАЛЬНЫХ 1-КРАТНО Ω -РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Ω -спутник f $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F} называется *внутренним*, если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$; *минимальным* (максимальным *внутренним*), если f является минимальным (максимальным) элементом множества всех (всех внутренних) Ω -спутников формации \mathfrak{F} [13]. В следующей теореме рассматриваются $n\Omega\varphi$ -расслоенные формации в случае, когда $n = 1$.

Теорема 5. Пусть \mathfrak{F}_1 — максимальная $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F}_2 , где φ — br -направление, $\varphi \leq \varphi_3$, h_1 и h_2 — максимальные внутренние Ω -спутники формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 соответственно. Если существует такая простая абелева группа $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$, что

$$h_1(Z_p) \subset h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{G}, \quad (7)$$



то Z_p — единственная с точностью до изоморфизма абелева группа из $\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$, удовлетворяющая (7), т.е. $h_1(A) = h_2(A)$ для любой абелевой группы $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$.

Доказательство. Пусть Z_p — группа из $\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$, удовлетворяющая условию (7). Предположим, что в классе $(\Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$ существует группа Z_q такая, что $h_1(Z_q) \subset h_2(Z_q) \subseteq \mathfrak{S}$. По [5, теорема 5] формация \mathfrak{F}_i обладает единственным минимальным Ω -спутником f_i , имеющим следующее строение:

$$f_i(A) = \text{form}(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{F}_i)$$

для любой группы $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2$. Согласно [10, следствие 5.8], h_i — единственный максимальный внутренний Ω -спутник формации \mathfrak{F}_i , причем ввиду [10, лемма 11 (2)] справедливы равенства $h_i(Z_p) = \mathfrak{N}_p f_i(Z_p)$ и $h_i(Z_q) = \mathfrak{N}_q f_i(Z_q)$, $i = 1, 2$.

1. Пусть L — группа минимального порядка из $h_2(Z_p) \setminus h_1(Z_p)$. Поскольку $f_i(Z_p)$ — формация и \mathfrak{N}_p — формация, замкнутая относительно нормальных подгрупп, то ввиду [1, определение IV.1.7] и [1, теорема IV.1.8 (a)] класс $h_i(Z_p) = \mathfrak{N}_p \circ f_i(Z_p)$ является формацией, $i = 1, 2$. Это означает, что L — монолитическая группа. В силу включения $h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{S}$ группа L разрешима.

Допустим, что $O_p(L) \neq 1$. Так как класс $h_2(Z_p)$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $L/O_p(L) \in h_2(Z_p)$. Тогда, в силу выбора группы L , из $|L/O_p(L)| < |L|$ следует, что $L/O_p(L) \in h_1(Z_p)$. Поэтому $L \in \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$. Отсюда, согласно [1, определение IV.1.7] и [1, теорема IV.1.8 (c)], получаем $L \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p f_1(Z_p)) = \mathfrak{N}_p \circ (\mathfrak{N}_p \circ f_1(Z_p)) = (\mathfrak{N}_p \circ \mathfrak{N}_p) \circ f_1(Z_p) = \mathfrak{N}_p f_1(Z_p) = h_1(Z_p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(L) = 1$ и по [15, лемма 18.8] существует точный неприводимый $F_p(L)$ -модуль K , где F_p — поле из p элементов. Пусть $G = K \rtimes L$. Тогда группа G является монолитической с монолитом $K = C_G(K)$, являющимся элементарной абелевой p -группой. Так как $\varphi \leq \varphi_3$ и φ — b -направление, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \subseteq \varphi_3(Z_p)$. Поэтому $K \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(K) = K$. Следовательно, $K = G_{\varphi(Z_p)}$ и, значит, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong L$.

Покажем, что $G/G_{\varphi(Z_q)} \cong L/L_{\varphi(Z_q)}$. Из $Z_q \not\cong Z_p$ и $K \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $K \in \mathfrak{E}_{(Z_q)'}^{\varphi}$. Поскольку φ — r -направление, то справедливо равенство $\varphi(Z_q) = \mathfrak{E}_{(Z_q)'}^{\varphi}(Z_q)$ и, согласно [13, лемма 1 (7)], $(G/K)_{\varphi(Z_q)} = G_{\varphi(Z_q)}/K$. Тогда $L/L_{\varphi(Z_q)} \cong (G/K)/(G/K)_{\varphi(Z_q)} = (G/K)/(G_{\varphi(Z_q)}/K) \cong G/G_{\varphi(Z_q)}$. Пусть $L/L_{\varphi(Z_q)} := H$. Если $|H| = |L|$, то $L_{\varphi(Z_q)} = 1$. Из $F(L) \subseteq L_{\varphi(Z_q)}$ получаем $F(L) = 1 = \Phi(L)$, что, ввиду разрешимости группы L , невозможно. Следовательно, $|H| < |L|$.

Покажем, что $H \in h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$. Для этого предварительно установим, что $G \in \mathfrak{F}_2 \setminus \mathfrak{F}_1$. Согласно [13, следствие 3 (1)], $\mathfrak{N}_p h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}_2$. Поэтому $G = K \rtimes L \in \mathfrak{F}_2$. Отсюда, в частности, следует, что $H \cong G/G_{\varphi(Z_q)} \in h_2(Z_q)$. Если $G \in \mathfrak{F}_1$, то $L \cong G/G_{\varphi(Z_p)} \in h_1(Z_p)$, что противоречит выбору группы L . Поэтому $G \notin \mathfrak{F}_1$. Так как \mathfrak{F}_1 — максимальная $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация из \mathfrak{F}_2 , то $\mathfrak{F}_2 = \Omega F((G) \cup \mathfrak{F}_1, \varphi)$ и по [5, теорема 5] $f_2(Z_q) = \text{form}((G/G_{\varphi(Z_q)}) \cup f_1(Z_q)) = \text{form}((H) \cup f_1(Z_q))$. Тогда $h_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q f_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q \text{form}((H) \cup f_1(Z_q))$. Если $H \in h_1(Z_q)$, то $H \in \mathfrak{N}_q f_1(Z_q)$ и $h_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q \text{form}((H) \cup f_1(Z_q)) = \mathfrak{N}_q f_1(Z_q) = h_1(Z_q)$, что невозможно. Следовательно, $H \notin h_1(Z_q)$. Таким образом, $H \in h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$.

2. Пусть L_1 — группа минимального порядка из $h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$. Тогда L_1 — монолитическая разрешимая группа. В силу выбора группы L_1 имеем $|L_1| \leq |H|$. Как и в пункте 1 $O_q(L_1) = 1$ и ввиду [15, лемма 18.8] существует монолитическая



группа $G_1 = K_1 \rtimes L_1$ с монолитом K_1 , являющимся элементарной абелевой q -группой, $K_1 = (G_1)_{\varphi(Z_q)}$ и $L_1/(L_1)_{\varphi(Z_p)} \cong G_1/(G_1)_{\varphi(Z_p)}$. Пусть $L_1/(L_1)_{\varphi(Z_p)} := H_1$. Рассуждая аналогично пункту 1, получаем $H_1 \in h_2(Z_p) \setminus h_1(Z_p)$ и $|H_1| < |L_1|$. Ввиду выбора группы L справедливо $|L| \leq |H_1|$.

Таким образом, $|H_1| < |L_1| \leq |H| < |L| \leq |H_1|$, что невозможно. Следовательно, предположение о том, что существует такая группа $Z_q \in (\Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$, что $h_1(Z_q) \subset h_2(Z_q) \subseteq \mathfrak{S}$, ложно. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоремы 1, 2, 4 развивают результаты работы [4] (см. [4, п. 5]), полученные для \mathfrak{L} -композиционных формаций, а именно в качестве следствий из данных теорем вытекают результаты для Ω -композиционных (\mathfrak{L} -композиционных), Ω -канонических, Ω -биканонических, Ω -свободных и других видов Ω -расслоенных формаций. В качестве следствий теоремы 3 получаются утверждения для Ω -свободных и Ω -канонических формаций; в качестве следствий теоремы 5 — результаты для Ω -композиционных и Ω -биканонических формаций. При $\Omega = \mathfrak{I}$ из теорем 1–5 вытекают результаты для n -кратно расслоенных формаций.

Вопросы существования максимальных τ -замкнутых локальных подформаций у заданной формации \mathfrak{F} вида $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, свойства пересечений максимальных τ -замкнутых локальных подформаций, а также вопросы взаимосвязи между минимальными экранами (спутниками) локальной формации и ее максимальной локальной подформации исследовались в [12] (см. [12, гл. 5]). Исследованию решеточных свойств n -кратно Ω -расслоенных формаций посвящены работы [7, 8]. Некоторые свойства максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций заданной формации для случая $n = 1$ были рассмотрены в [9].

Список литературы

1. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 901 p.
2. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 80, iss. 1. P. 300–305. <https://doi.org/10.1007/BF01162386>
3. Шеметков Л. А. О произведении формаций // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
4. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно \mathfrak{L} -композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144. <https://doi.org/10.4213/dm299>
6. Скиба А. Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 21–31.
7. Скачкова (Еловицова) Ю. А. Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 42–46. <https://doi.org/10.4213/dm252>
8. Еловицова Ю. А. Алгебраичность решеток Ω -расслоенных формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 13–16.
9. Сорокина М. М., Корпачева М. А. О критических Ω -расслоенных формациях конечных групп // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 1. С. 106–115. <https://doi.org/10.4213/dm35>
10. Ведерников В. А., Демина Е. Н. Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.



11. Еловиков А. Б. Факторизация однопорожденных частично расслоенных формаций // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 99–118. <https://doi.org/10.4213/dm1064>
12. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск : Беларуская навука, 1997. 240 с.
13. Ведерников В. А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
14. Биркгоф Г. Теория решеток : перевод с английского. Москва : Наука, 1984. 568 с.
15. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. Москва : Наука, 1989. 256 с.

References

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 901 p.
2. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 80, iss. 1, pp. 300–305 (in Germany). <https://doi.org/10.1007/BF01162386>
3. Shemetkov L. A. On product of formations. *Academy of Sciences BSSR Report*, 1984, vol. 28, no. 2, pp. 101–103 (in Russian).
4. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiple \mathcal{L} -composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, no. 6, pp. 783–797 (in Russian).
5. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. The Ω -foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2001, vol. 11, no. 5, pp. 507–527.
6. Skiba A. N. Characterization of finite solvable groups of a certain nilpotent length. *Issues of Algebra*, 1987, vol. 3, pp. 21–31 (in Russian).
7. Skachkova (Elovikova) Y. A. Boolean lattices of multiple Ω -foliated formations and Fitting classes. *Discrete Mathematics and Applications*, 2002, vol. 12, no. 5, pp. 477–482.
8. Elovikova Y. A. The algebraic lattices of Ω -foliated formations. *The Bryansk State University Herald*, 2013, no. 4, pp. 13–16 (in Russian).
9. Sorokina M. M., Korpacheva M. A. On the critical Ω -foliated formations of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2006, vol. 16, no. 3, pp. 289–298. <https://doi.org/10.1515/156939206777970417>
10. Vedernikov V. A., Demina E. N. Ω -Foliated formations of multioperator T-groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 789–804. <https://doi.org/10.1007/s11202-010-0079-3>
11. Elovikov A. B. The factorisation of one-generated partially foliated formations. *Discrete Mathematics and Applications*, 2009, vol. 19, iss. 4, pp. 411–430. <https://doi.org/10.1515/DMA.2009.029>
12. Skiba A. N. *Algebra formatsiy* [Algebra of Formations]. Minsk, Belarusskaya Nauka, 1997. 240 p. (in Russian).
13. Vedernikov V. A. Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2001, suppl. 2, pp. S217–S233.
14. Birkhoff G. *Lattice Theory*. New York, American Mathematical Society, 1973. 423 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1984. 568 p.).
15. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 1997. 256 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 04.12.2019

Принята к публикации / Accepted 03.02.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 26–34
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 26–34

Научная статья

УДК 593.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

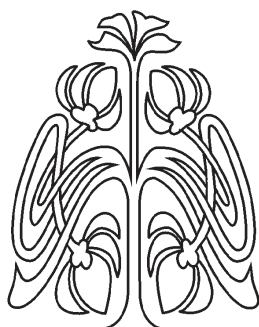
Прочность при изгибе анизотропных составных плит со свободными краями

А. Г. Акопян

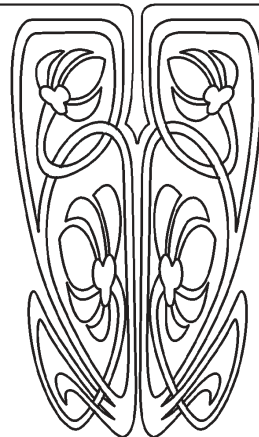
Северо-Кавказский филиал Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), Россия, Ставропольский край, 357340, г. Лермонтов, ул. Промышленная, д. 20

Акопян Ашот Гаврошович, кандидат физико-математических наук, доцент, manakofoto@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Аннотация. Современная техника предъявляет повышенные требования к прочностным свойствам машин, их деталей, а также различных конструкций и сооружений, уменьшению их веса, объема и размеров, что приводит к необходимости использования анизотропных композитных материалов. Нахождение критериев, позволяющих определить предельные прочностные характеристики элементов конструкций, инженерных сооружений, является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Проблемы прочности в конструкциях часто сводятся к выяснению характера местного напряженного состояния у вершин стыков составляющих частей. Решению этой актуальной проблемы для составных анизотропных плит может служить данная статья, где автор продолжает исследования в этой области, распространив их на изгиб анизотропных составных плит со свободными краями. Целью работы является изучение предельного напряженного состояния анизотропных составных плит в рамках классической теории изгиба плит. Внешние края плиты считаются свободными. Используя классическую теорию изгиба анизотропной плиты в пространстве физических и геометрических параметров, получены уравнения гиперповерхности, определяющие зоны малонапряженности для края контактной поверхности составной цилиндрически ортотропной плиты. Современные технологические процессы сварки, наплавки, пайки и склеивания позволяют изготавливать



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





элементы конструкций из монолитно соединенных между собой разнородных анизотропных материалов. Комбинирование различных материалов, обладающих качествами, соответствующими тем или иным условиям эксплуатации, открывает большие возможности для повышения технических и экономических характеристик машин, оборудования и сооружений. Оно может способствовать значительному увеличению их надежности, долговечности, уменьшению расходов на изготовление и эксплуатацию. Исходя из этого, решение, предлагаемое в данной работе, может быть полезным для повышения прочности композитных изделий.

Ключевые слова: малонапряженность, изгиб плит, анизотропный, составной

Для цитирования: Акопян А. Г. Прочность при изгибе анизотропных составных плит со свободными краями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 26–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

The flexural strength of anisotropic composite plates with free edges

A. G. Akopyan

North Caucasus Branch of the Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), 20 Promyshlennaya St., Stavropol region, Lermontov 357340, Russia

Ashot G. Akopyan, manakofoto@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Abstract. Modern technology shows increased demands on the strength properties of machines, their parts, as well as various structures, reducing their weight, volume and size, which leads to the need to use anisotropic composite materials. Finding criteria to determine the ultimate strength characteristics of structural elements, engineering structures is one of the urgent problems of solid mechanics. Strength problems in structures are often reduced to finding out the nature of the local stress state at the vertices of the joints of the constituent parts. The solution of this urgent problem for composite anisotropic plates can be found in this article, where the author continues the research in this area, extending them to the bending of anisotropic composite plates. The aim of the work is to study the limit stress state of anisotropic composite plates in the framework of the classical theory of plate bending. The outer edges of the plate are considered to be free. Using the classical theory of anisotropic plate bending in the space of physical and geometric parameters, the hypersurface equations determining the low-stress zones for the edge of the contact surface of a composite cylindrical orthotropic plate are obtained. Modern technological processes of welding, surfacing, soldering and bonding allow to produce structural elements of monolithic interconnected dissimilar anisotropic materials. The combination of different materials with qualities corresponding to certain operating conditions opens up great opportunities to improve the technical and economic characteristics of machines, equipment and structures. It can contribute to a significant increase in their reliability, durability, reduce the cost of production and operation. On this basis, the solution proposed in this work can be useful to increase the strength of composite materials.

Keywords: low tension, bending plates, anisotropic, composite



For citation: Akopyan A. G. The flexural strength of anisotropic composite plates with free edges. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 26–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Рассматривается малонапряженное состояние [1–5] около углового ребра края контактной поверхности соединения двух различных, цилиндрически ортотропных плит одинаковой толщины в рамках классической теории изгиба линейно упругих анизотропных плит [6, 7] при свободных краях. Исследование поведения напряжений в вершине угла при изгибе однородной изотропной плиты, имеющей угловое ребро, по классической теории изгиба плит, было проведено в работе [8]. Последующее рассмотрение этой задачи, по уточненной теории Рейсснера, показало [9], что перерезывающие силы в этом крае конечны. В работе [10] экспериментально показано существование и расположение зон малонапряженности и концентрации напряжений в угловых точках составных плит. Случай неоднородной составной плиты рассмотрен в [11]. Изучению вопросов изгиба анизотропных плит посвящены работы [12–18].

Поверхность, соединяющая две плиты, вертикальна к срединной плоскости. Такая составная плита подвержена изгибу под общей поперечной нагрузкой. Окрестность краевого ребра контактной поверхности соединения свободна от внешних сил. Поместим начало цилиндрической системы координат в угловой точке срединной плоскости плиты, как показано на рис. 1.

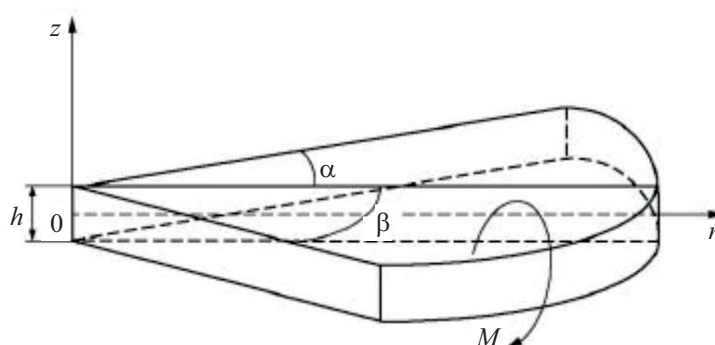


Рис. 1. Схема составной плиты
Fig. 1. The scheme of the composite plate

Принимаем, что главные оси анизотропии совпадают с осями этой цилиндрической системы координат. Толщину плиты обозначим h , а величины в окрестности точки $r = 0$, относящиеся к областям $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, отмечаем индексами $i = 1, 2$ соответственно.

Прогиб w_i каждой области ортотропной плиты в окрестности точки $r = 0$ определяется из следующего уравнения [6]:

$$D_{ri} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} + 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^2 \partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^4} + 2D_{ri} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} - 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r \partial \theta^2} - D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + 2(D_{\theta i} + D_{r\theta i}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial w_i}{\partial r} = 0, \quad (1)$$



где D_{ri} , $D_{\theta i}$, $D_{r\theta i}$ — жесткости каждой анизотропной плиты:

$$D_{ri} = \frac{E_{ri}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})}h^3, \quad D_{\theta i} = \frac{E_{\theta i}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})}h^3, \quad D_{r\theta i} = D_{ri}\nu_{\theta i} + 2D_{ki}, \quad D_{ki} = \frac{G_i}{12}h^3.$$

Здесь E_{ri} , $E_{\theta i}$ модули Юнга для растяжения-сжатия в радиальном направлении r и в тангенциальном направлении θ , ν_{ri} , $\nu_{\theta i}$ — главные коэффициенты Пуассона, G_i — модуль сдвига для главных направлений r и θ .

В случае изотропного материала:

$$E_{ri} = E_{\theta i}, \quad \nu_{ri} = \nu_{\theta i} = \nu_i, \quad G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)},$$

и все жесткости сводятся к одной:

$$D_{ri} = D_{\theta i} = D_{r\theta i} = D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_i^2)}.$$

Представляя прогиб плиты в форме

$$w_i(r, \theta) = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda), \quad (2)$$

где f_i и λ — искомые функции и постоянная, из уравнения (1) будет следовать

$$f_i'''' + 2(k_{1i}\lambda^2 + 1)f_i'' + (\lambda^2 - 1)(k_{2i}\lambda^2 - 1)f_i = 0, \quad (3)$$

где $k_{1i} = D_{r\theta i}/D_{\theta i}$, $k_{2i} = D_{ri}/D_{\theta i}$.

Корни соответствующего характеристического уравнения для (3) определяются из следующего выражения:

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \sqrt{-(k_{1i}\lambda^2 + 1) \pm \lambda \sqrt{(k_{1i}^2 - k_{2i})\lambda^2 + 2k_{1i} + k_{2i} + 1}} = \pm \sqrt{-a \pm b}. \quad (4)$$

Нам нужно рассмотреть три следующих случая:

1) все четыре корня (4) мнимые ($a \geq b$, b — величина действительная):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \omega_{ki} i,$$

где случай $k = 1$ соответствует нижнему знаку под радикалом (4), а $k = 2$ — верхнему;

2) все корни (4) комплексные (b — величина мнимая):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm(\xi_i \pm i\eta_i);$$

3) одна пара корней действительная, а другая — мнимая ($a < b$, b — действительная):

$$r_{(1,2)i} = \pm \xi_i, \quad r_{(3,4)i} = \pm \eta_i i.$$

Для каждого из случаев напомним общее решение уравнения (3):

- 1) $f_i = A_i \cos \omega_{1i} \theta + B_i \sin \omega_{1i} \theta + C_i \cos \omega_{2i} \theta + E_i \sin \omega_{2i} \theta;$
- 2) $f_i = A_i \cosh \xi_i \theta \cos \eta_i \theta + B_i \sinh \xi_i \theta \cos \eta_i \theta + C_i \cosh \xi_i \theta \sin \eta_i \theta + E_i \sinh \xi_i \theta \sin \eta_i \theta;$
- 3) $f_i = A_i \cosh \xi_i \theta + B_i \sinh \xi_i \theta + C_i \cos \eta_i \theta + E_i \sin \eta_i \theta,$ (5)

где A_i , B_i , C_i , E_i — произвольные постоянные.



Тогда для моментов будем иметь

$$\begin{aligned} M_{ri} &= -D_{ri}r^{\lambda-1} [v_{\theta i}f_i'' + (\lambda + 1)(\lambda + v_{\theta i})f_i], \\ M_{\theta i} &= -D_{\theta i}r^{\lambda-1} [f_i'' + (\lambda + 1)(v_{ri}\lambda + 1)f_i], \\ M_{r\theta i} &= -2D_{ki}r^{\lambda-1}f_i', \end{aligned} \quad (6)$$

а перерезывающие силы будут

$$\begin{aligned} Q_{ri} &= -r^{\lambda-2} [(D_{r\theta i}\lambda - D_{\theta i})f_i'' + (\lambda + 1)(D_{ri}\lambda^2 - D_{\theta i})f_i], \\ Q_{\theta i} &= -r^{\lambda-2} [(D_{\theta i}f_i'' + (\lambda + 1)(D_{r\theta i}\lambda + D_{\theta i})f_i']. \end{aligned} \quad (7)$$

Для обобщающей перерезывающей силы будем иметь

$$V_{\theta i} = Q_{\theta i} + \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial r} = -r^{\lambda-2} (D_{\theta i}f_i''' + g_i f_i'), \quad (8)$$

где

$$g_i = (\lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda [(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{k1}].$$

На контактной поверхности ($\theta = 0$) следует соблюдать условия непрерывности: прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2, \quad f_1' = f_2', \quad D_{\theta 1}f_1''' + g_1f_1' = D_{\theta 2}f_2''' + g_2f_2', \\ D_{\theta 1} [f_1'' + (\lambda + 1)(v_{r1}\lambda + 1)f_1] &= D_{\theta 2} [f_2'' + (\lambda + 1)(v_{r2}\lambda + 1)f_2]. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим граничные условия на внешних краях ($\theta = \alpha, \theta = -\beta$) плиты.

При свободных краях имеем условия Кирхгофа, т.е. изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила равны нулю:

$$f_i'' + (\lambda + 1)(v_{ri}\lambda + 1)f_i' = 0, \quad D_{\theta i}f_i''' + g_i f_i' = 0. \quad (10)$$

Подставляя значение f_i из (5) в граничные условия (9) и (10), получаем системы восьми линейных уравнений относительно восьми постоянных A_i, B_i, C_i, E_i для каждого из трех случаев в (5) соответственно.

Для существования нетривиального решения полученных однородных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i, B_i, C_i, E_i необходимо, чтобы определители этих систем равнялись нулю:

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, v_{ri}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i) = 0. \quad (11)$$

Из (2) и (6) следует, что если $0 < \text{Re } \lambda_1 < 1$, то при приближении к краю поверхности соединения ($r \rightarrow 0$) напряжения (моменты) неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\text{Re } \lambda_1 - 1|$. А если $\text{Re } \lambda_1 > 1$, напряжения убывают до нуля при приближении к вершине угла. Полученное уравнение может позволить численным способом определить значение λ в зависимости от $\alpha, \beta, v_{ri}, v_{\theta i}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i$.

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности ребра края поверхности соединения составной анизотропной плиты при изгибе приводится к отысканию корня λ трансцендентного уравнения (11) с наименьшей положительной частью для фиксированных углов и механических характеристик соединяемых материалов. Можно составить программу для нахождения корня λ (11).



Численные расчеты можно провести для различных групп значений параметров анизотропии: 1) $\gamma = 1$, $G_i = \mu_i$; 2) $\lambda = 1$, $G_i = 4\mu_i$; 3) $\gamma = 1/20$, $G_i = 4\mu_i$; 4) $\gamma = 20$, $G_i = \mu/4$, где $\gamma = E_1/E_2$, $\mu_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, можно принять $\nu_{ri} = \nu_{\theta i} = 0.25$. Причем надо учесть замечание Фойгта [6] о равенстве $E_{ri} = E_{\theta i}$. Ясно, что здесь случай $\gamma = 1$ будет соответствовать однородной плите ($E_{r1} = E_{r2}$, $E_{\theta 1} = E_{\theta 2}$, $\nu_{r1} = \nu_{r2}$, $\nu_{\theta 1} = \nu_{\theta 2}$, $G_1 = G_2$), а $G_i = \mu_i$ — изотропной плите.

Можно рассматривать и обратную задачу [1–5]. А именно построить кривые, которые при фиксированных значениях механических характеристик материалов на плоскости (α, β) отделяют зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений (моментов) у угловой точки. Предполагая, что вблизи границы области высокой концентрации напряжений наименьший корень уравнения (11) действительный, полагая в этом уравнении $\lambda = 1$ (предварительно освобождаясь от двукратного корня $\lambda = 1$), можно найти наименьшие положительные значения углов α и β в зависимости от параметров анизотропии. Геометрические места этих точек в плоскости (α, β) образуют те предельные кривые, которые разделяют область, где напряжения бесконечны, от области, где они конечны (области малонапряженного состояния). Численная реализация полученного уравнения может позволить в пространстве параметров $\alpha, \beta, \nu_{ri}, \nu_{\theta i}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i$ определить зону малонапряженности для края, обеспечивающую прочность соединения.

В частном случае, для изотропного материала, получаем следующее уравнение предельной кривой:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + 3\cos 2\alpha} + \gamma \frac{\sin 2\beta}{1 + 3\cos 2\beta} = 0. \tag{12}$$

На рис. 2 приведены предельные линии в плоскости (α, β), разделяющие эту плоскость на две области. В области выше линий при $r = 0$ напряжения бесконечны, в области ниже линий при $r = 0$ напряжения конечны (области малонапряженного состояния). Линии 1, 2 и 3 построены по уравнению (12) при $\gamma = 1$, $\gamma = 20$ и $\gamma = 1/20$ соответственно.

На рис. 2 прямая линия 1 соответствует однородной плите, а кривые 2 и 3 — составной. Если для однородной изотропной плиты с углом раствора $\alpha + \beta$ больше π всегда имеется концентрация напряжений в вершине, а с углом меньше π отсутствует, то для составной изотропной плиты, как показывают кривые 2 и 3 на графике, есть участки, где $\varphi > \pi$ отсутствует концентрация напряжений, и, наоборот, есть участки, когда $\varphi < \pi$, но имеется концентрация напряжений.

Результаты, полученные в данной работе, могут быть полезными для повышения прочности при сварке, наплавке, пайке и склеивании разнородных плит.

Как мы видим, степень концентрации перерезывающих сил вблизи угловой точки

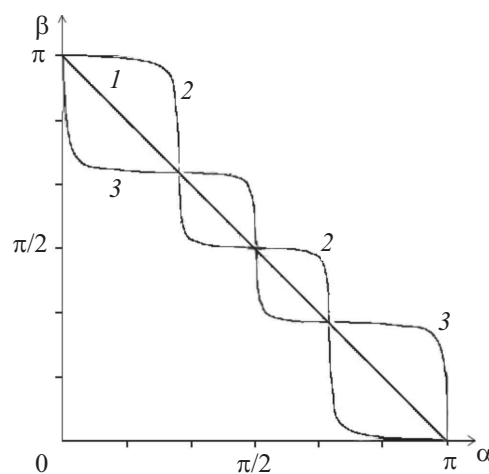


Рис. 2. Кривые, разделяющие области, в которых напряжения бесконечны, и области, в которых напряжения конечны: 1 — $\gamma = 1$; 2 — $\gamma = 20$; 3 — $\gamma = 1/20$

Fig. 2. Curves, separating regions in which the stresses are infinite and regions in which the stresses are finite: 1 — $\gamma = 1$; 2 — $\gamma = 20$; 3 — $\gamma = 1/20$



на единицу выше по сравнению с моментами, что объясняется несовершенством классической теории изгиба плит.

Применение классической теории к граничным условиям (10) свободных смежных краев приводит к возникновению суммарной поперечной силы, приложенной к угловой точке, что может оказывать значительное влияние на напряжения. Однако эти силы не столь важны, если углы оперты или защемлены [12, 13, 19]. Рассмотренный здесь случай граничных условий можно исследовать, используя уточненную теорию изгиба анизотропных плит [17, 20], позволяющую уйти от ограничений, налагаемых аппроксимацией Кирхгофа, и сравнить результаты.

Аналогичным образом можно рассматривать смешанные краевые условия.

Список литературы

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван : Издательство АН Армянской ССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М. А. Об условиях малонапряженности составных плит // Доклады Академии наук. 1993. Т. 332, № 3. С. 319–321.
3. Акопян А. Г. Малонапряженное состояние неоднородно-составных клиньев при смешанных граничных условиях // Прикладная механика и техническая физика. 1994. № 3. С. 149–156.
4. Акопян А. Г. О плоской деформации малонапряженного неоднородно-составного клина // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 1994. Т. 47, вып. 5–6. С. 42–48.
5. Акопян А. Г., Задоян М. А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1992. № 5. С. 88–96.
6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Москва : Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. Chyanbin Hwu. Anisotropic Elastic Plates. Springer Science & Business Media, 2010. 673 p.
8. Williams M. L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending // Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics. 1950. P. 325–329.
9. Burton W. S., Sinclair G. B. On the Singularities in Reissner's Theory for the Bending of Elastic Plates // Journal of Applied Mechanics. 1986. Vol. 53, № 1. P. 220–222.
10. Геворкян Г. В., Задоян М. А., Саакян Г. Р., Саркисян С. М. Экспериментальные исследования прочности составных плит при изгибе // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 4. С. 211–215.
11. Задоян М. А. О прочности соединения составной плиты // Известия Национальной академии наук Республики Армения и ГИУА. Серия ТН. 2000. Т. 53, № 1. С. 8–11.
12. Акопян А. Г. О прочности соединения составной анизотропной пластины, жестко защемленной по внешним краям // Вестник Донского государственного технического университета. 2019. Т. 19, № 4. С. 304–309. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-4-304-309>
13. Акопян А. Г. Малонапряженное состояние свободно опертых анизотропных составных плит // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 4. С. 119–125. <https://doi.org/10.15372/PMTF20190413>
14. Недорезов П. Ф. Численное исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба тонкой анизотропной пластинки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 143–148. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-143-148>



15. Недорезов П. Ф., Аристамбекова А. В. Статический изгиб и колебания многослойной прямоугольной пластинки из ортотропного материала при свободном опирании краев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. 2011. Вып. 1 (22). С. 244–254. <https://doi.org/10.14498/vsgtu926>
16. Калоеров С. А., Занько А. И. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 456–464. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464>
17. Vijayakumar K. A relook at Reissner's theory of plates in bending // Archive of Applied Mechanics. 2011. Vol. 81, iss. 11. P. 1717–1724. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0513-4>
18. Vijayakumar K. Modified Kirchhoff's theory of plates including transverse shear deformations // Mechanics Research Communications. 2011. Vol. 38, iss. 3. P. 211–213. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.02.007>
19. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. Москва : Наука, 1982. 568 с.
20. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва : Наука, 1967. 360 с.

References

1. Chobanyan K. S. *Napriazheniia v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in Compound Elastic Bodies]. Yerevan, Izd-vo AN Armianskoi SSR, 1987. 338 p. (in Russian).
2. Zadoyan M. A. Low-stress conditions in composite plates. *Doklady Akademii Nauk*, 1993, vol. 332, no. 3, pp. 319–321 (in Russian).
3. Akopyan A. G. Low-stress state in an inhomogeneous compound wedge with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1994, vol. 35, pp. 459–466. <https://doi.org/10.1007/BF02369888>
4. Hakobyan A. G. On the plane deformation of a low-stress level nonhomogeneous-compound wedge. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 1994, vol. 47, iss. 5–6, pp. 42–48 (in Russian).
5. Akopyan A. G., Zadoyan M. A. Low tension inhomogeneous composite wedges. *Izvestia: Mechanics of Solids*, 1992, no. 5, pp. 88–96 (in Russian).
6. Lehnitsky S. G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic Plates]. Moscow, Gostekhizdat, 1957. 463 p. (in Russian).
7. Chyanbin Hwu. *Anisotropic Elastic Plates*. Springer Science & Business Media, 2010. 673 p.
8. Williams M. L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. *Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics*, 1950, pp. 325–329.
9. Burton W. S., Sinclair G. B. On the singularities in Reissner's Theory for the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, vol. 53, no. 1, pp. 220–222.
10. Gevorkyan G. V., Zadoyan M. A., Saakyan G. R., Sarkisyan S. M. Experimental study of the strength of composite plates in bending. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, iss. 4, pp. 763–767. <https://doi.org/10.1007/BF02466879>
11. Zadoyan M. A. On the bond strength of a composite plate. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia and GIUA, Technical Sciences*, 2000, vol. 53, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).
12. Akopyan A. G. On joint efficiency of composite anisotropic plate rigidly fixed along outside edges. *Vestnik of Don State Technical University*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 304–309. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-4-304-309>
13. Akopyan A. G. Low-stress state of simply-supported anisotropic composite plates. *Jour-*



- nal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, iss. 4, pp. 692–697. <https://doi.org/10.1134/S0021894419040138>
14. Nedorezov P. F. Numerical study of stress-strain state of a thin anisotropic rectangular plate. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 2, pp. 143–148 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-143-148>
 15. Nedorezov P. F., Arystanbekova A. V. Static bending and vibrations of multilayer orthotropic rectangular plate with simply supported edges. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, iss. 1 (22), pp. 244–254 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu926>
 16. Kaloerov S. A., Zanko A. I. Bending of multiconnected anisotropic plates with the curvilinear holes. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 456–464 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464>
 17. Vijayakumar K. A relook at Reissner's theory of plates in bending. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, vol. 81, iss. 11, pp. 1717–1724. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0513-4>
 18. Vijayakumar K. Modified Kirchhoff's theory of plates including transverse shear deformations. *Mechanics Research Communications*, 2011, vol. 38, iss. 3, pp. 211–213. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.02.007>
 19. Donnell L. G. *Balki, plastiny i obolochki* [Beams, Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1982. 568 p. (in Russian).
 20. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967. 360 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 07.06.2019

Принята к публикации / Accepted 04.07.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра

А. О. Ватульян^{1,2✉}, С. А. Нестеров²

¹Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

²Южный математический институт — филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия, 362027, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

Ватульян Александр Ованесович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости; заведующий отделом дифференциальных уравнений, aovatulyan@sfedu.ru, vatulyan@aaanet.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

Нестеров Сергей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, 1079@list.ru

Аннотация. Рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях функционально-градиентного конечного полого цилиндра. Торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. На внутренней поверхности цилиндра, свободной от напряжений, поддерживается нулевая температура, а на внешней действует комбинированная термосиловая нагрузка. Прямая задача после применения преобразования Лапласа решена на основе метода разделения переменных. Получен набор канонических линейных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка, решение каждой из которых получено численно с помощью метода пристрелки. Поставлена коэффициентная обратная задача о нахождении термомеханических характеристик цилиндра конечной длины по дополнительной информации в трансформантах Лапласа, заданной на внешней поверхности цилиндра. Безразмерные термомеханические характеристики цилиндра восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных функций. На втором этапе на основе решения соответствующих интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода находились поправки реконструируемых функций, и строился итерационный процесс их уточнения. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что монотонные характеристики восстанавливаются со значительной точностью; процедура реконструкции устойчива к зашумлению входной информации.

Ключевые слова: термоупругость, конечный цилиндр, идентификация, коэффициентная обратная задача, итерационный процесс, интегральное уравнение, метод пристрелки, метод разделения переменных

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928 и Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН, г. Владикавказ.



Для цитирования: Ватульян А. О., Нестеров С. А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder

A. O. Vatulyan^{1,2✉}, S. A. Nesterov²

¹Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, Southern Federal University, 8-a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

²Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia

Alexander O. Vatulyan, aovatulyan@srfedu.ru, vatulyan@aanet.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

Sergei A. Nesterov, 1079@list.ru

Abstract. The problem of axisymmetric vibrations of a functionally graded finite hollow cylinder is considered. The ends of the cylinder are thermally insulated and are in a sliding fit. Zero temperature is maintained on the inner surface of the cylinder, free from stress, and a combined thermal and power load acts on the outer surface. The direct problem after applying the Laplace transform is solved based on the method of separation of variables. A set of canonical linear systems of differential equations of the 1st order is obtained, the solution of each of which is obtained numerically using the shooting method. The coefficient inverse problem of finding the thermomechanical characteristics of a finite length cylinder using additional information in Laplace transforms, given on the outer surface of the cylinder, is posed. The dimensionless thermomechanical characteristics of the cylinder were restored in two stages. At the first stage, the initial approximation was determined in the class of positive bounded functions. At the second stage, based on the solution of the corresponding Fredholm integral equations of the 1st kind, corrections of the reconstructed functions were found, and an iterative process of their refinement was constructed. In the course of computational experiments, it was found that monotonic characteristics are restored with good accuracy; the reconstruction procedure is resistant to input information noise.

Keywords: thermoelasticity, finite cylinder, identification, coefficient inverse problem, iterative process, integral equation, shooting method, variable separation method

Acknowledgements: This work was supported by a grant from the Government of the Russian Federation No. 075-15-2019-1928 and Southern Mathematical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz.

For citation: Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



ВВЕДЕНИЕ

Элементы цилиндрической формы являются составными частями многих сложных конструкций, которые подвергаются большим термомеханическим нагрузкам. Как правило, такие конструкции изготавливают из однородных или слоистых материалов. Однако в настоящее время все шире применяются функционально-градиентные материалы (FGM) в качестве альтернативы слоистым композитам. FGM, как правило, представляют собой двухфазные композиты, синтезированные на основе металла и керамики, с непрерывным изменением термомеханических характеристик [1]. Важным преимуществом FGM по сравнению со слоистыми материалами является существенное снижение вероятности появления трещин и отслоений и более экономное расходование материала [2]. Технология изготовления FGM с требуемыми свойствами является достаточно сложной и требует на последнем этапе диагностики реальных свойств изделия.

Сегодня самые популярные методики диагностики свойств конструкций опираются на теоретические результаты, полученные в области коэффициентных обратных задач (КОЗ) механики, в том числе и термоупругости [3]. Эти задачи состоят в нахождении коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости по некоторой дополнительной информации о полях смещений и температуры.

К настоящему времени выполнено довольно много исследований по решению КОЗ теплопроводности [4–8] и теории упругости [9–13] для неоднородных материалов. При этом наиболее часто используемым методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [5–7]. Рассматриваются и альтернативные методы решения, например метод обращения конечно-разностных схем [8], проекционные методы [14]. В работах [9, 10, 15] решение КОЗ основано на организации итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линеаризованное операторное уравнение. Используя этот подход, была проведена идентификация механических и теплофизических характеристик функционально-градиентного бесконечного полого цилиндра.

Для некоторых материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [3, 16]. В работах [14, 17] представлены результаты идентификации неоднородных термомеханических характеристик стержня, слоя, бесконечно длинного полого цилиндра.

Данная работа посвящена решению обратной задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного цилиндра на основе дополнительной информации о трансформантах температуры и радиального перемещения на внешней боковой поверхности цилиндра.

1. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о неустановившихся осесимметричных колебаниях функционально-градиентного конечного полого термоупругого цилиндра. Цилиндр имеет высоту $2h$, внутренний радиус r_1 и внешний радиус r_2 . Торцы цилиндра теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. На внутренней поверхности цилиндра, свободной от механических нагрузок, поддерживается нулевая температура. Колебания цилиндра вызываются двумя способами: 1) распределенной по закону $S(z)G_1(t)$ нормальной механической нагрузкой с амплитудой p^0 ; 2) распределенным по закону $R(z)G_2(t)$ тепловым потоком с амплитудой q^0 , приложенным на внешней боковой поверхности. Термомеханические характеристики цилиндра изменяются только по радиальной координате: $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\rho = \rho(r)$, $\gamma = \gamma(r)$, $k = k(r)$,



$c = c(r)$. Постановка задачи в цилиндрической системе координат (ρ, ϕ, z) имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + k(r) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = c(r) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(r) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial t} \right), \quad (3)$$

$$u_z(r, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r, \pm h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(r, \pm h, t) = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}(r_1, z, t) = \sigma_{rz}(r_1, z, t) = \theta(r_1, z, t) = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = -p^0 S(z) G_1(t), \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0, \quad -k(r_2) \frac{\partial \theta}{\partial r}(r_2, z, t) = q^0 R(z) G_2(t), \quad (6)$$

$$\theta(r, z, 0) = u_r(r, z, 0) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = \frac{\partial u_z}{\partial t}(r, z, 0) = 0. \quad (7)$$

Здесь θ — приращение температуры от температуры естественного состояния T_0 , u_r , u_z — компоненты радиального и осевого перемещения соответственно, λ и μ — параметры Ламе, ρ — плотность, γ — коэффициент температурных напряжений, k — коэффициент теплопроводности, c — удельная объемная теплоемкость, $\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$, $\sigma_{\phi\phi} = (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \gamma \theta$, $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \gamma \theta$, $\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$ — ненулевые компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $\theta = \theta(r, z, t)$, $u_r = u_r(r, z, t)$, $u_z = u_z(r, z, t)$ из (1)–(7) при известных термомеханических характеристиках $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\rho(r)$, $\gamma(r)$, $k(r)$, $c(r)$.

Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции: $\xi = \frac{r}{r_2}$, $\eta = \frac{z}{r_2}$, $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$, $\beta_0 = \frac{h}{r_2}$, $U = \frac{u_r}{r_2}$, $V = \frac{u_z}{r_2}$, $W = \frac{\gamma_0 \theta}{\lambda_0}$, $\tau = \frac{t}{r_2} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\rho_0}}$, $\delta_0 = \frac{\gamma_0 T_0}{c_0 \lambda_0}$, $\Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\lambda_0}$, $\Omega_{\phi\phi} = \frac{\sigma_{\phi\phi}}{\lambda_0}$, $\Omega_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{\lambda_0}$, $\Omega_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{\lambda_0}$, $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$, $g_0 = \frac{\mu_0}{\lambda_0}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$, $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, $\bar{k} = \frac{k}{k_0}$, $\bar{c} = \frac{c}{c_0}$, $\chi_0 = \frac{p^0}{\lambda_0}$, $\omega_0 = \frac{q^0 r_2 \gamma_0}{k_0 \lambda_0}$. Здесь λ_0 , μ_0 , ρ_0 , γ_0 , k_0 , c_0 — характерные величины.

Обезразмеренная задача (1)–(7) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \eta} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\phi\phi}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Omega_{zr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Omega_{zz}}{\partial \eta} + \frac{\Omega_{zr}}{\xi} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + \bar{k}(\xi) \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = \bar{c}(\xi) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(\xi) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \tau} \right), \quad (10)$$

$$V(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta}(\xi, \pm \beta_0, \tau) = 0, \quad (11)$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad \Omega_{rz}(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad W(\xi_0, \eta, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$\Omega_{rr}(1, \eta, \tau) = \chi_0 S(\eta) G_1(\tau), \quad \Omega_{rz}(1, \eta, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial \xi}(1, \eta, \tau) = \omega_0 R(\eta) G_2(\tau), \quad (13)$$

$$W(\xi, \eta, 0) = U(\xi, \eta, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(\xi, \eta, 0) = V(\xi, \eta, 0) = \frac{\partial V}{\partial \tau}(\xi, \eta, 0) = 0. \quad (14)$$



После применения преобразования Лапласа по τ к уравнениям (8)–(13) с учетом начальных условий (14) получим:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{rr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{\Omega}_{rr} - \tilde{\Omega}_{\phi\phi}}{\xi} = p^2 \bar{\rho} \tilde{U}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{zr}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{zz}}{\partial \eta} + \frac{\tilde{\Omega}_{zr}}{\xi} = p^2 \bar{\rho} \tilde{V}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\bar{k}(\xi) \xi \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} \right) + \bar{k}(\xi) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \eta^2} = p \bar{c}(\xi) \tilde{W} + \delta_0 p \bar{\gamma}(\xi) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{U}}{\xi} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \eta} \right), \quad (17)$$

$$\tilde{V}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta}(\xi, \pm \beta_0, p) = 0, \quad (18)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{rz}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad \tilde{W}(\xi_0, \eta, p) = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{\Omega}_{rr}(1, \eta, p) = \chi_0 S(\eta) \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{\Omega}_{rz}(1, \eta, p) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi}(1, \eta, p) = \omega_0 R(\eta) \tilde{G}_2(p). \quad (20)$$

Задача (15)–(20) решается на основе метода разделения переменных. Для этого полагаем $\nu_n = \frac{n\pi}{\beta_0}$, $\tilde{U}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(\xi, p) \cos(\nu_n \eta)$, $\tilde{V}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n(\xi, p) \sin(\nu_n \eta)$, $\tilde{W}(\xi, \eta, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{d}_n(\xi, p) \cos(\nu_n \eta)$. В этом случае граничные условия на торцах цилиндра (18) выполняются тождественно.

Будем предполагать, что функции $S(\eta)$ и $R(\eta)$ — четные, тогда законы изменения внешней нагрузки допускают представления

$$S(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(\nu_n \eta), \quad R(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(\nu_n \eta),$$

где коэффициенты $s_n = \int_{-\beta_0}^{\beta_0} S(\eta) \cos(\nu_n \eta) d\eta$, $r_n = \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R(\eta) \cos(\nu_n \eta) d\eta$.

Распишем компоненты тензора напряжений, входящие в уравнения колебаний, в виде:

$$\tilde{\Omega}_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{1n} \cos(\nu_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{zr} = \tilde{\Omega}_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{2n} \sin(\nu_n \eta), \quad (21)$$

$$\tilde{\Omega}_{\phi\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{3n} \cos(\nu_n \eta), \quad \tilde{\Omega}_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{4n} \cos(\nu_n \eta). \quad (22)$$

Здесь $\tilde{R}_{1n} = (\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}) \tilde{a}'_n + \bar{\lambda} \left(\frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$, $\tilde{R}_{2n} = g_0 \bar{\mu} (\tilde{b}'_n - \nu_n \tilde{a}_n)$, $\tilde{R}_{3n} = \frac{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}{\xi} \tilde{a}_n + \bar{\lambda} (\tilde{a}'_n + \nu_n \tilde{b}_n) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$, $\tilde{R}_{4n} = (\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}) \nu_n \tilde{b}_n + \bar{\lambda} \left(\tilde{a}'_n + \frac{1}{\xi} \tilde{a}_n \right) - \bar{\gamma} \tilde{d}_n$.

Из (15)–(20) и (21), (22) с учетом введенных обозначений и свойств ортогональности систем функций $\{\cos(\nu_n \eta)\}$ и $\{\sin(\nu_n \eta)\}$ получим набор линейных систем дифференциальных уравнений:

при $n = 0$:

$$\tilde{a}'_0 = \frac{R_{10} - \bar{\lambda} \frac{\tilde{a}_0}{\xi} + \bar{\gamma} \tilde{d}_0}{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}, \quad \tilde{R}'_{10} = - \left(\frac{\tilde{R}_{10} - \tilde{R}_{30}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_0,$$



$$\begin{aligned} \tilde{d}'_0 &= \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \tilde{Q}_0, \quad \tilde{Q}'_0 = -\frac{\tilde{Q}_0}{\xi} + \left(p\bar{c}\tilde{d}_0 + p\delta_0\bar{\gamma} \left(\tilde{a}'_0 + \frac{\tilde{a}_0}{\xi} \right) \right), \\ \tilde{R}_{10}(\xi_0, p) &= 0, \quad \tilde{d}_0(\xi_0, p) = 0, \\ \tilde{R}_{10}(1, p) &= \chi_0 s_0 \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{Q}_0(1, p) = -\omega_0 r_0 \tilde{G}_2(p); \end{aligned}$$

при $n = 1, 2, \dots$:

$$\tilde{a}'_n = \frac{\tilde{R}_{1n} - \bar{\lambda} \left(\frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right) + \bar{\gamma} \tilde{d}_n}{\bar{\lambda} + 2g_0 \bar{\mu}}, \quad \tilde{b}'_n = \frac{\tilde{R}_{2n}}{g_0 \bar{\mu}} + \nu_n \tilde{a}_n, \quad (23)$$

$$\tilde{R}'_{1n} = - \left(\nu_n \tilde{R}_{2n} + \frac{R_{1n} - R_{3n}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_n, \quad (24)$$

$$\tilde{R}'_{2n} = - \left(\nu_n \tilde{R}_{4n} + \frac{R_{2n}}{\xi} \right) + p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_n, \quad \tilde{d}'_n = \frac{1}{\bar{k}(\xi)} \tilde{Q}_n, \quad (24)$$

$$\tilde{Q}'_n = -\frac{\tilde{Q}_n}{\xi} + (p\bar{c}(\xi) + \nu_n \bar{k}(\xi)) \tilde{d}_n + p\delta_0 \bar{\gamma} \left(\tilde{a}'_n + \frac{\tilde{a}_n}{\xi} + \nu_n \tilde{b}_n \right), \quad (25)$$

$$\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \quad \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \quad (26)$$

$$\tilde{R}_{1n}(1, p) = \chi_0 s_n \tilde{G}_1(p), \quad \tilde{R}_{2n}(1, p) = 0, \quad \tilde{Q}_n(1, p) = -\omega_0 r_n \tilde{G}_2(p). \quad (27)$$

Здесь $\tilde{R}_{3n}, \tilde{R}_{4n}$ выражаются через $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n, \tilde{d}_n, \tilde{R}_{1n}$.

Задача (23)–(27) является линейной относительно искомым функций $\tilde{a}_n(\xi, p), \tilde{b}_n(\xi, p), \tilde{d}_n(\xi, p), \tilde{Q}_n(\xi, p), \tilde{R}_{1n}(\xi, p), \tilde{R}_{2n}(\xi, p)$. Ее решение при заданных $\bar{\lambda}(\xi), \bar{\mu}(\xi), \bar{\rho}(\xi), \bar{\gamma}(\xi), \bar{k}(\xi), \bar{c}(\xi)$ может быть получено численно с помощью метода пристрелки, как в [10]. Для этого сначала строятся решения трех вспомогательных задач Коши с граничными условиями при $\xi = \xi_0$:

- 1) $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 1, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 0;$
- 2) $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 1, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 0;$
- 3) $\tilde{R}_{1n}(\xi_0, p) \nu = 0, \tilde{R}_{2n}(\xi_0, p) = 0, \tilde{d}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{a}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{b}_n(\xi_0, p) = 0, \tilde{Q}_n(\xi_0, p) = 1.$

Решение каждой из полученных задач Коши реализовано численно с помощью метода Рунге – Кутты. Тогда решения набора систем (23)–(27) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{1n}(\xi, p) &= A_n \tilde{R}_{1n}^I(\xi, p) + B_n \tilde{R}_{1n}^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{R}_{1n}^{III}(\xi, p), \\ \tilde{R}_{2n}(\xi, p) &= A_n \tilde{R}_{2n}^I(\xi, p) + B_n \tilde{R}_{2n}^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{R}_{2n}^{III}(\xi, p), \\ \tilde{a}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{a}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{a}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{a}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{b}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{b}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{b}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{b}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{d}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{d}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{d}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{d}_n^{III}(\xi, p), \\ \tilde{Q}_n(\xi, p) &= A_n \tilde{Q}_n^I(\xi, p) + B_n \tilde{Q}_n^{II}(\xi, p) + C_n \tilde{Q}_n^{III}(\xi, p), \end{aligned}$$

где коэффициенты пристрелки A_n, B_n, C_n определяются из граничных условий при $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} A_n \tilde{R}_{1n}^I(1, p) + B_n \tilde{R}_{1n}^{II}(1, p) + C_n \tilde{R}_{1n}^{III}(1, p) &= \chi_0 s_n \tilde{G}_1(p), \\ A_n \tilde{R}_{2n}^I(1, p) + B_n \tilde{R}_{2n}^{II}(1, p) + C_n \tilde{R}_{2n}^{III}(1, p) &= 0, \\ A_n \tilde{Q}_n^I(1, p) + B_n \tilde{Q}_n^{II}(1, p) + C_n \tilde{Q}_n^{III}(1, p) &= \omega_0 r_n \tilde{G}_2(p). \end{aligned}$$



2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Если температура и радиальное перемещение на внешней боковой поверхности цилиндра известны в любой момент времени $\tau \in [0, \infty)$, то обратную задачу можно сформулировать в пространстве трансформант Лапласа.

Рассмотрим обратную задачу об идентификации законов изменения $\bar{\lambda}(\xi)$, $\bar{\mu}(\xi)$, $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{\gamma}(\xi)$, $\bar{k}(\xi)$, $\bar{c}(\xi)$ из (15)–(20) по данным о трансформантах гармоник радиального перемещения $\tilde{f}_n^{(1)}(1, p)$ и температуры $\tilde{f}_n^{(2)}(1, p)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В работе [14] на основе слабой постановки прямой задачи получено два операторных соотношения для решения коэффициентной обратной задачи в трансформантах для изотропного неоднородного термоупругого тела:

$$\int_V \lambda \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u})) \text{tr}(\varepsilon(\tilde{v})) dV + 2 \int_V \mu \varepsilon(\tilde{u}) \odot \varepsilon(\tilde{v}) dV + p^2 \int_V \rho \tilde{u} \tilde{v} dV - \int_V \gamma \tilde{\theta} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{v})) dV = \int_{S_\sigma} \tilde{P} \tilde{v} dS_\sigma, \quad (28)$$

$$\int_V k \nabla \tilde{\theta} \nabla \tilde{\vartheta} dV + p \int_V c \tilde{\theta} \tilde{\vartheta} dV + p T_0 \int_V \gamma \tilde{\vartheta} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u})) dV = - \int_{S_q} \tilde{Q} \tilde{\vartheta} dS_q. \quad (29)$$

Здесь \tilde{v} и $\tilde{\vartheta}$ — гладкие пробные функции.

Соотношения (28), (29) можно кратко описать как $A_1(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v}) = B_1(\tilde{v})$ и $A_2(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = B_2(\tilde{\vartheta})$. Оператор $A_1(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{v})$ является линейным по термомеханическим характеристикам a , компонентам трансформант физических полей \tilde{u} и $\tilde{\theta}$ и пробным функциям \tilde{v} . Оператор $A_2(a, \tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})$ является линейным по термомеханическим характеристикам a , компонентам трансформант физических полей \tilde{u} и $\tilde{\theta}$ и пробным функциям $\tilde{\vartheta}$.

Для формулировки обобщенного соотношения взаимности рассмотрим два состояния, которым соответствуют два набора характеристик $a^{(1)}$, $\tilde{u}^{(1)}$, $\tilde{\theta}^{(1)}$ и $a^{(2)}$, $\tilde{u}^{(2)}$, $\tilde{\theta}^{(2)}$. Рассмотрим выражения:

$$A_1(a^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(1)}, \tilde{u}^{(2)}) - A_1(a^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(2)}, \tilde{u}^{(1)}) = B_1(\tilde{u}^{(2)}) - B_1(\tilde{u}^{(1)}), \quad (30)$$

$$A_2(a^{(1)}, \tilde{u}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(1)}, \tilde{\theta}^{(2)}) - A_2(a^{(2)}, \tilde{u}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(2)}, \tilde{\theta}^{(1)}) = B_2(\tilde{\theta}^{(2)}) - B_2(\tilde{\theta}^{(1)}). \quad (31)$$

Осуществим линеаризацию (30), (31) по правилу: $a^{(1)} = a^{(m-1)}$, $a^{(2)} = a^{(m-1)} + a^{(m)}$, $\tilde{u}^{(1)} = \tilde{u}^{(m-1)}$, $\tilde{u}^{(2)} = \tilde{u}^{(m-1)} + \tilde{u}^{(m)}$, $\tilde{\theta}^{(1)} = \tilde{\theta}^{(m-1)}$, $\tilde{\theta}^{(2)} = \tilde{\theta}^{(m-1)} + \tilde{\theta}^{(m)}$. Здесь $a^{(m)}$, $\tilde{u}^{(m)}$, $\tilde{\theta}^{(m)}$ — малые поправки к соответствующим функциям. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим в развернутом виде

$$\int_V (\lambda^{(m)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))^2 + 2\mu^{(m)} (\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))^2 + p^2 \rho^{(m)} (\tilde{u}^{(m-1)})^2 - 2\gamma^{(m)} \tilde{\theta}^{(m-1)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)}))) dV = \int_{S_\sigma} \tilde{P} \cdot \tilde{u}^{(m)} dS_\sigma, \quad (32)$$

$$\int_V \left[k^{(m)} (\nabla \tilde{\theta}^{(m-1)})^2 + p c_\varepsilon^{(m)} (\tilde{\theta}^{(m-1)})^2 + 2p T_0 \gamma^{(m)} \tilde{\theta}^{(m-1)} \text{tr}(\varepsilon(\tilde{u}^{(m-1)})) \right] dV =$$



$$= \int_{S_q} \tilde{Q} \cdot \tilde{\theta}^{(m)} dS_q. \quad (33)$$

На основе (32), (33) получим необходимые соотношения для решения обратной задачи для цилиндра, учитывая выражения для тензора деформации, векторов механической и тепловой нагрузки, осесимметричность задачи. Так, при $n = 0$ операторные соотношения в безразмерном виде имеют вид:

$$\int_{\xi_0}^1 (\bar{\lambda}^{(m)} \left(\tilde{a}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 + 2\bar{\mu}^{(m)} g_0 \left((\tilde{a}'_0^{(m-1)})^2 + \left(\frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 \right) + p^2 \bar{\rho}^{(m)} (\tilde{a}_0^{(m-1)})^2 - 2\delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left(\tilde{a}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{d}_0^{(m-1)} \xi d\xi = s_0 \chi_0 \tilde{G}_1(p) (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad (34)$$

$$\int_{\xi_0}^1 (\bar{k}^{(m)} (\tilde{d}'_0^{(m-1)})^2 + p \bar{c}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 + 2p \delta_0 \bar{\gamma}^{(m)} \left(\tilde{a}'_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{d}_0^{(m-1)} \xi d\xi = r_0 \omega_0 \tilde{G}_2(p) (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (35)$$

При $n = 1, 2, \dots$ выражения не приводятся в силу их громоздкости.

Полученные выражения представляют собой систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами относительно поправок $\bar{\lambda}^{(m)}$, $\bar{\mu}^{(m)}$, $\bar{\rho}^{(m)}$, $\bar{\gamma}^{(m)}$, $\bar{k}^{(m)}$, $\bar{c}^{(m)}$ при известных значениях трансформант функций перемещений $\tilde{a}_0^{(m-1)}$ и температуры $\tilde{d}_0^{(m-1)}$, найденных из решения прямой задачи. На их основе можно организовать итерационный процесс для определения искомых функций.

Поскольку решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода является некорректной задачей, то численные решения построены с помощью метода регуляризации Тихонова [18].

Выход из итерационного процесса осуществляется по условию достижения максимального наперед заданного количества итераций.

Дискретизация интегральных уравнений вида (34), (35) основана на методе коллокаций с применением квадратурной формулы трапеций. Для этого вводится равномерное разбиение отрезка $[\xi_0, 1]$ на N отрезков точками $\xi_i = \xi_0 + \frac{(i-1)(1-\xi_0)}{N-1}$, $i = 1..N$. Строится набор параметров $\{p_j\}_{j=1}^M$ по формуле $p_j = \frac{\kappa_j}{\sqrt{1-\kappa_j^2}}$, где $\kappa_j = \kappa_0 + j\kappa$, $j = 1..M$, $\kappa = \frac{g_2 - g_1}{m}$, $g_1 = \kappa_0$, $g_2 = 1 - \kappa_0$. В работе принято: $\kappa_0 = 0.1$, $M = 20$, $N = 20$.

Итерационный процесс стартует с выбора начального приближения, которое определяется в классе линейных функций $\bar{a}^{(0)} = k_1 \xi + k_2$, где коэффициенты k_1 и k_2 определяются исходя из измеренных значений искомых функций на границе отрезка по формулам: $k_1 = \frac{\bar{a}^- - \bar{a}^+}{\xi_0 - 1}$, $k_2 = \bar{a}^+ - \frac{\bar{a}^- - \bar{a}^+}{\xi_0 - 1}$.

В качестве примера реконструкции свойств функционально-градиентного материала рассмотрен $Ni - TiC$ со следующими законами изменения термомеханических характеристик: $\bar{\mu}(\xi) = 11.39\xi^2 - 18.3\xi + 8.14$, $\bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$, $\bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$, $\bar{\rho}(\xi) = -5.76\xi^2 + 8.37\xi - 2.12$, $\bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$, $\bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$. Значения коэффициентов этих функций находились из условия равенства значений термомеханических характеристик на внешней и внутренней границах цилиндра соответственно характеристикам Ni и TiC . В расчетах принято: $\xi_0 = 0.8$, $\delta_0 = 0.3$, $g_0 = 1$, $\beta_0 = 2$, $\chi_0 = 1$, $\omega_0 = 0.1$. На внешней



поверхности цилиндра приложены следующие типы нагрузок: а) механическая $\Omega_{rr}(1, \eta, \tau) = \chi_0 \left(1 - \left(\frac{\eta}{\beta_0}\right)^2\right) H(\tau)$; б) тепловая $Q(1, \eta, \tau) = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{\eta}{\beta_0}\right)^2\right) H(\tau)$. Здесь $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Для каждой термомеханической характеристики были найдены начальные приближения, которые имеют вид: $\bar{\mu}^{(0)}(\xi) = 2.2\xi - 0.97$, $\bar{\lambda}^{(0)}(\xi) = 3.3\xi - 1.45$, $\bar{\gamma}^{(0)}(\xi) = -1.85\xi + 4.22$, $\bar{\rho}^{(0)}(\xi) = -2\xi + 2.49$, $\bar{k}^{(0)}(\xi) = -3.25\xi + 3.5$, $\bar{c}^{(0)}(\xi) = -1.55\xi + 1.68$.

В случае механического нагружения цилиндра для одновременной идентификации функций $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{\mu}(\xi)$, $\bar{\lambda}(\xi)$ и $\bar{\gamma}(\xi)$ необходимо решить систему четырех интегральных уравнений при $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Однако при решении системы четырех интегральных уравнений возникают большие вычислительные проблемы. Поэтому в работе решалась упрощенная задача об одновременном нахождении двух функций на примере $\bar{\lambda}(\xi)$ и $\bar{\gamma}(\xi)$ при известных остальных термомеханических характеристиках $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{\mu}(\xi)$, $\bar{k}(\xi)$ и $\bar{c}(\xi)$. В этом случае для нахождения поправок $\bar{\lambda}^{(m)}$ и $\bar{\gamma}^{(m)}$ необходимо решать систему уравнений при $n = 0$, $n = 1$. Однако практическая реализация данной процедуры реконструкции осложнена из-за структуры ядер интегральных уравнений. Проведенные расчеты показали, что значение ядра при поправке $\bar{\lambda}^{(m)}$ значительно больше, чем при $\bar{\gamma}^{(m)}$. В этом случае величина поправок $\bar{\gamma}^{(m)}$ стремится к нулю на всех итерациях. Вследствие такой особенности предложен поэтапный итерационный процесс реконструкции. На первом этапе идентификации считалось, что значение поправки $\bar{\gamma}^{(m)} = 0$, что означает равенство коэффициента температурных напряжений выбранному начальному приближению. С учетом этого допущения на каждой итерации определялись поправки $\bar{\lambda}^{(m)}$ как решение упрощенного интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{\lambda}^{(m)} \left(\tilde{a}_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right)^2 \xi d\xi = \frac{s_0 \chi_0}{p} (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty).$$

Выход из итерационного процесса был осуществлен по предельному числу итераций, равному 20.

На втором этапе фиксируется найденная функция $\bar{\lambda}(\xi)$, а соответствующие поправки $\bar{\lambda}^{(m)}$ принимаются равными нулю, и на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки $\bar{\gamma}^{(m)}$ как решение упрощенного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} & \delta_0 \int_{\xi_0}^1 \bar{\gamma}^{(m)} \left(\tilde{a}_0^{(m-1)} + \frac{\tilde{a}_0^{(m-1)}}{\xi} \right) \tilde{a}_0^{(m-1)} \xi d\xi = \\ & = -\frac{s_0 \chi_0}{p} (\tilde{f}_0^{(1)}(1, p) - \tilde{a}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (36)$$

На рис. 1 представлены результаты реконструкции функций $\bar{\lambda}(\xi)$ (рис. 1, а) и $\bar{\gamma}(\xi)$ (рис. 1, б). При этом штриховой линией показано начальное приближение, сплошной линией — точный закон, точками — восстановленный закон. При отсутствии зашумления входной информации максимальная погрешность реконструкции $\bar{\lambda}(\xi)$ не превысила 3%, а $\bar{\gamma}(\xi)$ — 6%. В случае восстановления $\bar{\gamma}(\xi)$ важно обратить внимание на ядро интегрального уравнения (36). Оно обращается в нуль при $\xi = \xi_0$ в соответ-

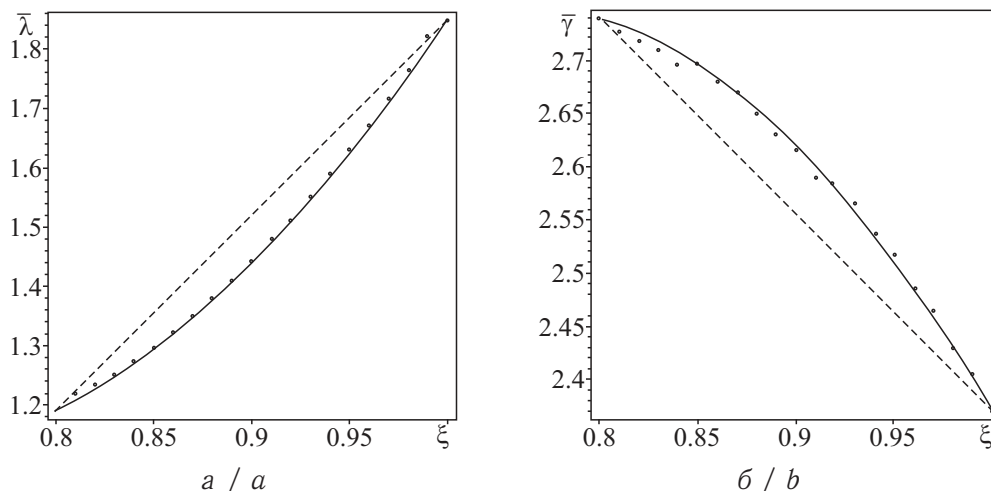


Рис. 1. Результаты реконструкции механических характеристик:
 $a - \bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$; $b - \bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$
 Fig. 1. Results of reconstruction of mechanical characteristics:
 $a - \bar{\lambda}(\xi) = 7.84\xi^2 - 10.81\xi + 4.82$; $b - \bar{\gamma}(\xi) = -6.6\xi^2 + 10.03\xi - 1.06$

ствии с граничными условиями (19), поэтому наибольшая погрешность реконструкции возникает в окрестности $\xi = \xi_0$.

Во второй серии экспериментов использовалось тепловое нагружение цилиндра. Для упрощения считаем, что коэффициенты $\bar{\rho}(\xi)$, $\bar{\mu}(\xi)$, $\bar{\lambda}(\xi)$ и $\bar{\gamma}(\xi)$ известны. Однако проведенные расчеты показали, что значение ядра при поправке $\bar{k}^{(m)}$ значительно больше, чем при $\bar{c}^{(m)}$. Поэтому, как при механическом нагружении, использован поэтапный итерационный процесс реконструкции искомым законов. На первом этапе идентификации считалось, что значение поправки $\bar{c}^{(m)} = 0$. С учетом этого допущения на каждой итерации определялись поправки $\bar{k}^{(m)}$ как решение интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{k}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 \xi d\xi = \frac{r_0 \omega_0}{p} (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty).$$

На втором этапе фиксируется найденная функция $\bar{k}(\xi)$, и на каждой последующей итерации аналогично определяются поправки $\bar{c}^{(m)}$ как решение интегрального уравнения:

$$\int_{\xi_0}^1 \bar{c}^{(m)} (\tilde{d}_0^{(m-1)})^2 \xi d\xi = \frac{r_0 \omega_0}{p} (\tilde{f}_0^{(2)}(1, p) - \tilde{d}_0^{(m-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (37)$$

На рис. 2 представлены результаты восстановления функций $\bar{k}(\xi)$ (рис. 2, а) и $\bar{c}(\xi)$ (рис. 2, б). При отсутствии зашумления входной информации максимальная погрешность реконструкции $\bar{k}(\xi)$ не превысила 2%, а $\bar{c}(\xi)$ — 7%. При этом наибольшая погрешность реконструкции $\bar{c}(\xi)$ возникает в окрестности $\xi = \xi_0$, это связано с тем, что ядро интегрального уравнения (37) обращается в нуль при $\xi = \xi_0$.

Процедура реконструкции термомеханических характеристик оказалась устойчива к 1%-му шуму. Максимальная погрешность реконструкции не превысила 13%.

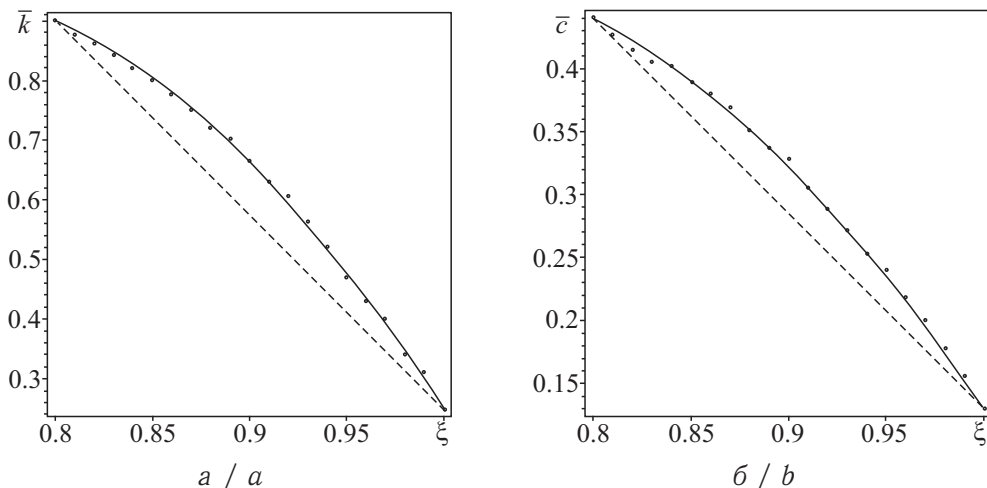


Рис. 2. Результаты реконструкции теплофизических характеристик:
 $a - \bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$; $b - \bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$
 Fig. 2. Results of reconstruction of thermophysical characteristics:
 $a - \bar{k}(\xi) = -8.83\xi^2 + 12.64\xi - 3.56$; $b - \bar{c}(\xi) = -3.64\xi^2 + 5\xi - 1.23$

ВЫВОДЫ

Приведена постановка новой обратной задачи об идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра. Прямая задача для цилиндра решена на основе комбинации метода разделения переменных и пристрелки в трансформантах Лапласа. Для решения нелинейной обратной задачи в трансформантах Лапласа получены линеаризованные операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые в эксперименте функции. Решение обратной задачи построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Вычислительные эксперименты показали: 1) монотонные законы изменения термомеханических характеристик восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 7%; 2) процедура реконструкции устойчива к зашумлению входной информации.

Список литературы

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60, iss. 5. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation // Composites Science and Technology. 1996. Vol. 56, № 9. P. 1099–1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел : Издательство ОрелГТУ, 2002. 168 с.
4. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности для двусоставного слоя // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 409–423. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>
5. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1988. 288 с.
6. Hao D. N. Methods for Inverse Heat Conduction Problems. Frankfurt a/M : Peter Lang Pub. Inc., 1998. 249 p.
7. Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem // Numerical Analysis and Applications. 2008. Vol. 1, iss. 1. P. 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>



8. Yeung W. K., Lam T. T. Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1996. Vol. 39, iss. 17. P. 3685–3693. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
9. Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Nedin R. D., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder // *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2016. Vol. 97, iss. 3. P. 358–364. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600179>
10. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, iss. 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
11. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // *Meccanica*. 2003. Vol. 38. P. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
12. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Great Britain : Wiley-ISTE. 2013. 485 p.
13. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, iss. 14–15. P. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
14. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов н/Д ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2019. 146 с.
15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder // *Applied Mathematical Modeling*. 2016. Vol. 40, iss. 4. P. 2711–2719. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
16. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 329–335. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335>
17. Ватульян А. О., Нестеров С. А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88, №. 4. P. 951–959.
18. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1990. 230 с.

References

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Composites Science and Technology*, 1996, vol. 56, no. 9, pp. 1099–1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Diagnostics Problems for Inhomogeneous Thermoelastic Media]. Orel, Izdatel'stvo OrelGTU, 2002. 168 p. (in Russian).
4. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the peculiarities of solving the coefficient inverse problem of heat conduction for a two-part layer. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 409–423 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-409-423>
5. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russian).



6. Hao D. N. *Methods for Inverse Heat Conduction Problems*. Frankfurt a/M., Peter Lang Pub. Inc., 1998. 249 p.
7. Kabanikhin S. I., Hasanov A., Penenko A. V. A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat conduction problem. *Numerical Analysis and Applications*, 2008, vol. 1, iss. 1, pp. 34–45. <https://doi.org/10.1134/S1995423908010047>
8. Yeung W. K., Lam T. T. Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1996, vol. 39, iss. 17, pp. 3685–3693. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00028-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00028-2)
9. Vatulyan A. O., Bogachev I. V., Nedin R. D., Yavruyan O. V. Identification of inhomogeneous elastic properties of isotropic cylinder. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2016, vol. 97, iss. 3, pp. 358–364. <https://doi.org/10.1002/zamm.201600179>
10. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
11. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach. *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
12. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Great Britain, Wiley-ISTE, 2013. 485 p.
13. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, iss. 14–15, pp. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
14. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. *Koeffitsiyentnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics]. Rostov-on-Don, Taganrog, Izdatel'stvo Yuzhnogo Federal'nogo Universieta, 2019. 146 p. (in Russian).
15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On reconstruction of thermalphysic characteristics of functionally graded hollow cylinder. *Applied Mathematical Modeling*, 2016, vol. 40, iss. 4, pp. 2711–2719. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.078>
16. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. About the Specifics of Identification Thermomechanical Characteristics of Functionally Graded Materials. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 329–335 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335>
17. Vatul'yan A. O., Nesterov S. A. On determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of a pipe. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015, vol. 88, no. 4, pp. 984–993. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1274-7>
18. Tikhonov A. N., Goncharskiy A. V., Stepanov V V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.06.2020

Принята к публикации / Accepted 17.08.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей

Е. Ю. Крылова^{1✉}, И. В. Папкина², О. А. Салтыкова², В. А. Крысько²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>

Папкина Ирина Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования, ikravzova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>

Салтыкова Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования, olga_a_saltykova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3880-6662>

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и моделирования, tak@sun.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Аннотация. В работе построена математическая модель сложных колебаний гибкой микрополярной цилиндрической панели сетчатой структуры. Уравнения записаны в перемещениях. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Рассматривается неклассическая континуальная модель панели на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. В рассмотрение вводится дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиентом вращения. Уравнения движения элемента панели, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона на основании кинематических гипотез Кирхгофа – Лява. Предполагается, что цилиндрическая панель состоит из n семейств ребер одного материала, каждое из которых характеризуется углом наклона относительно положительного направления оси, направленной по длине панели, и расстоянием между соседними ребрами. Материал изотропный, упругий и подчиняется закону Гука. Для гомогенизации системы ребер по поверхности панели применяется континуальная модель Г. И. Пшеничного. Рассматривается диссипативная механическая система. Дифференциальная задача в частных производных сводится к обыкновенной дифференциальной задаче по пространственным координатам методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях. Задача Коши решается методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Используя метод установления, в качестве примера проведено исследование влияния геометрии сетки и учета микрополярной теории на поведение сетчатой панели, состоящей из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер.



Ключевые слова: цилиндрическая панель, микрополярная теория, сетчатая структура, модель Кирхгофа – Лява, метод Бубнова – Галеркина, метод установления, континуальная модель Г. И. Пшеничнова

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00351а).

Для цитирования: Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels

E. Yu. Krylova^{1✉}, I. V. Papkova², O. A. Saltykova², V. A. Krysko²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Ekaterina Yu. Krylova, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>

Irina V. Papkova, ikravzova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>

Olga A. Saltykova, olga_a_saltykova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3880-6662>

Vadim A. Krysko, tak@sun.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Abstract. In this paper, a mathematical model of complex oscillations of a flexible micropolar cylindrical mesh structure is constructed. Equations are written in displacements. Geometric nonlinearity is taken into account according to the Theodore von Karman model. A non-classical continual model of a panel based on a Cosserat medium with constrained particle rotation (pseudocontinuum) is considered. It is assumed that the fields of displacements and rotations are not independent. An additional independent material parameter of length associated with a symmetric tensor by a rotation gradient is introduced into consideration. The equations of motion of a panel element, the boundary and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky – Hamilton variational principle based on the Kirchhoff – Love’s kinematic hypotheses. It is assumed that the cylindrical panel consists of n families of edges of the same material, each of which is characterized by an inclination angle relative to the positive direction of the axis directed along the length of the panel and the distance between adjacent edges. The material is isotropic, elastic and obeys Hooke’s law. To homogenize the rib system over the panel surface, the G. I. Pshenichnov continuous model is used. The dissipative mechanical system is considered. The differential problem in partial derivatives is reduced to an ordinary differential problem with respect to spatial coordinates by the Bubnov – Galerkin method in higher approximations. The Cauchy problem is solved by the Runge – Kutta method of the 4th order of accuracy. Using the establishment method, a study of grid geometry influence and taking account of micropolar theory on the behavior of a grid plate consisting of two families of mutually perpendicular edges was conducted.

Keywords: cylindrical panel, micropolar theory, mesh structure, Kirchhoff – Love model, Bubnov – Galerkin method, establishment method, G. I. Pshenichnov continuous model

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00351A).



For citation: Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Пластины, панели, оболочки являются элементами инженерных конструкций во всех областях жизнедеятельности человека. Поэтому интерес к математическому моделированию влияния различных факторов на сложные колебания указанных механических объектов не ослабевает [1–4]. Быстрое развитие микроэлектро-механических технологий в приборостроении, робототехнике, медицине и других передовых отраслях привело к широкому использованию в качестве элементов конструкций микро- и наноразмерных панелей и оболочек. Этот факт обуславливает необходимость создания надежных математических моделей для анализа их динамического поведения и НДС. Классическая механика твердого тела не в состоянии учитывать масштабные эффекты. Поэтому при построении математических моделей микро- и наноразмерных механических объектов необходимо опираться на теории, позволяющие моделировать размерно-зависимое поведение, одно из ведущих мест среди которых занимает микрополярная (моментная, несимметричная) теория [5–10]. В работах [11–15] построены общие прикладные теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Для численного анализа в большинстве публикаций по данной тематике используются линейные модели [16–19]. Однако существуют экспериментальные данные, подтверждающие необходимость учета нелинейности при моделировании поведения рассматриваемых объектов [20]. Микро- и наноразмерные сетчатые панели и оболочки широко используются в электромеханических системах, в медицине для изготовления биологически совместимых имплантов, венозных шунтов. Исследований, посвященных анализу НДС и динамики сетчатых конструкций с учетом их размерно-зависимого поведения, очень мало [19, 21, 22]. В настоящей работе построена математическая модель сложных колебаний гибкой микрополярной сетчатой цилиндрической панели, состоящей из двух взаимно перпендикулярных систем ребер, находящейся под действием нормальной распределенной нагрузки. На основании полученной математической модели методом установления проведен анализ влияния геометрии сетки на поведение цилиндрической панели. Материал панели — псевдоконтинуум Коссера со стесненным движением частиц [23]. Сетчатая структура учитывается по феноменологической континуальной модели Г. И. Пшеничнова [24].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является цилиндрическая панель, занимающая в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \{0 \leq x \leq c; 0 \leq y \leq b; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$. Панель состоит из n семейств густо расположенных ребер одного материала, что позволяет использовать континуальную модель. С учетом гипотез Кирхгофа – Лява и геометрической нелинейности в форме Т. фон Кармана компоненты тензора деформаций запишутся



в виде:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_y w - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — осевые смещения срединной поверхности панели в направлениях x, y соответственно, w — прогиб, k_y — геометрический параметр кривизны панели.

В работе рассматривается неклассическая континуальная модель на основе среды Коссера, где наряду с обычным полем напряжений учитываются также и моментные напряжения. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [23]. В таком случае компоненты симметричного тензора изгиба-кручения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{xz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для материала панели определяющие соотношения примем в виде [25]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], \quad x \leftrightarrow y, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \quad m_{ij} = \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, \quad i, j = x, y, z,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, m_{ij} — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона для однородного материала, l — дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с тензором изгиба-кручения χ .

Уравнения движения в смешанной форме элемента гладкой панели, эквивалентной сетчатой, граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона – Остроградского [26, 27]. Напряжения, возникающие в эквивалентной гладкой панели, связанные с напряжениями в ребрах, составляющих углы φ_j с осью абсцисс, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{yy} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yy} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{xy} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yz} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \end{aligned} \quad (3)$$

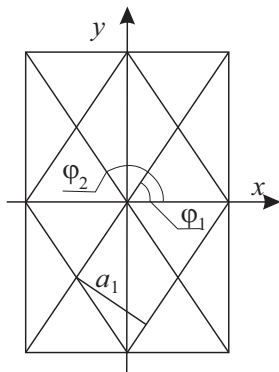
где n — количество семейств ребер, δ_j, a_j, φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью x и осью ребер j -го семейства. Напряжения с индексом j относятся к ребрам.



Физические соотношения для сетчатой панели определяются на основании метода множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \{\sigma^j, m^j\} &= \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \varphi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \varphi_j + \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \\ \{\sigma_z^j, m_z^j\} &= \{\sigma_{zx}, m_{zx}\} \cos \varphi_j + \{\sigma_{zy}, m_{zy}\} \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим, что деформация оси какого-либо ребра равна деформации линии, совпадающей с осью этого ребра в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений ребер панели совпадает с направлением нормали к срединной поверхности панели. Подставляя (3) и (4) в выражения для моментов и усилий, записанные для гладкой панели, получим выражения моментов и усилий панели с учетом сетчатой структуры. Подставляя (3) и (4) в выражения для моментов и усилий, записанные для гладкой панели, найдем выражения моментов и усилий панели с учетом сетчатой структуры. Тогда из уравнений движения гладкой панели, выведенных из вариационного принципа, получим уравнения движения микрополярной панели сетчатой структуры в смешанной форме [28]. В дальнейшем будем рассматривать панель с двумя семействами ребер $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $a_1 = a_2 = a$ (рис. 1).



С учетом безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} u &= \frac{h^2}{c} \bar{u}, & v &= \frac{h^2}{b} \bar{v}, & x &= c\bar{x}, & y &= b\bar{y}, \\ w &= h\bar{w}, & \delta &= h\bar{\delta}, & a &= h\bar{a}, & l &= h\bar{l}, \\ k_y &= \frac{h}{b^2} \bar{k}_y, & q &= \frac{Eh^4}{c^2 b^2} \bar{q}, \\ t &= b\sqrt{\frac{\rho}{E}} \bar{t}, & \varepsilon &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \bar{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5)$$

Рис. 1. Геометрия сетки
Fig. 1. The grid geometry

где ε — коэффициент диссипации среды, ρ — плотность материала панели, $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ — внешняя нормальная нагрузка, q_0 и ω_p — ее интенсивность и частота, t —

время. Уравнения движения элемента рассматриваемой микрополярной сетчатой цилиндрической панели примут вид (черта над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{aligned} l^2(\nu - 1) &\left[\frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} \right] + 2(\nu - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\ &- 2(3 + \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 4(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} \frac{\partial w}{\partial x} + 4(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ &- 8 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 4(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2 - 1)}{\delta} \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} l^2(\nu - 1) &\left[\frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right] - k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \frac{\partial w}{\partial y} - \\ &- 4(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2(3 + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ &- 8 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4(\nu - 1) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2 - 1)}{\delta} \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{c^2}{bh} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4[1 + l^2(\nu - 1)] \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + [(1 + \nu) + 6l^2(1 - \nu)] \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\
 & + 12k_y^2(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} w + 12k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \frac{\partial v}{\partial y} + 12k_y(1 + \nu) \frac{b^2}{h^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 6k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \\
 & - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 12k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} w \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\
 & - 18(1 + \nu) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 12(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 12(\nu - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} - 6k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + 6(-5 + 3\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 24 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 24 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 24(\nu - 1) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & + 24(\nu - 1) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 24(3\nu - 5) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 12(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\
 & + 12(\nu - 1) \frac{b}{c} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 12k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & + 6(3\nu - 5) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 12(1 + \nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 18(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\
 & = \frac{24a(\nu^2 - 1)}{\delta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q \right). \tag{8}
 \end{aligned}$$

К уравнениям (6)–(8) следует присоединить начальные и граничные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки панели.

В данной модели жесткость ребер на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности панели, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных панелей, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [24].

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Статические задачи в теории пластин и оболочек традиционно решались с применением различных приближенных методов, которые позволяют свести систему уравнений в частных производных к системе нелинейных алгебраических уравнений. В данной работе решение статических задач будет представлено с помощью метода установления, впервые примененного для оболочек В. И. Феодосьевым [29]. В рассматриваемом методе решение системы уравнений в частных производных сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобный подход имеет некоторые преимущества. Метод установления обладает высокой точностью, так как его можно отнести к итерационным методам, здесь каждый шаг по времени является новым приближением к точному решению задачи. Кроме того, метод установления не имеет большой чувствительности к выбору начального приближения. Простота получения неединственных решений статических задач также является серьезным плюсом метода. Решая задачу Коши при $\varepsilon = \varepsilon_{кр}$ для ряда значений параметра нормальной постоянной во времени нагрузки q_i , получаем последовательность прогибов w_i для центральной точки панели. На основе этих данных строится зависимость $w(q)$ и исследуется напряженно-деформированное состояние системы. Здесь стоит отметить, что необходимо уделять



серьезное внимание выбору $\varepsilon_{кр}$, так как в некоторых случаях при отсутствии учета рассеяния энергии значение критической динамической нагрузки может равняться приблизительно половине значения статической критической нагрузки [30]. Следуя вышеописанному методу, исследуем поведение сетчатой микрополярной цилиндрической панели, жестко заземленной по торцам с параметрами сетки $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $a_1 = a_2 = a$. Начальные условия выбраны нулевыми. Математическая модель колебаний рассматриваемой системы представляет собой дифференциальную задачу в частных производных, для сведения которой к обыкновенной дифференциальной задаче используем метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях. Для удовлетворения граничным условиям жесткой заделки компоненты перемещений возьмем в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{mn} U_{mn}(t) \sin^2\left(\frac{2m\pi x}{c}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\
 v(x, y, t) &= \sum_{mn} V_{mn}(t) \cos^2\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2c}\right) \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right), \\
 w(x, y, t) &= \sum_{mn} W_{mn}(t) \sin^2\left(\frac{m\pi x}{c}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Задача Коши решается методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности.

На рис. 2 приведена диаграмма зависимости прогиб-время для рассматриваемой задачи при $l = 0$, $k_y = 0$, $c = b = 1$, $h = 0.02$, $\delta = a = 0.02$, $q_0 = 550$.

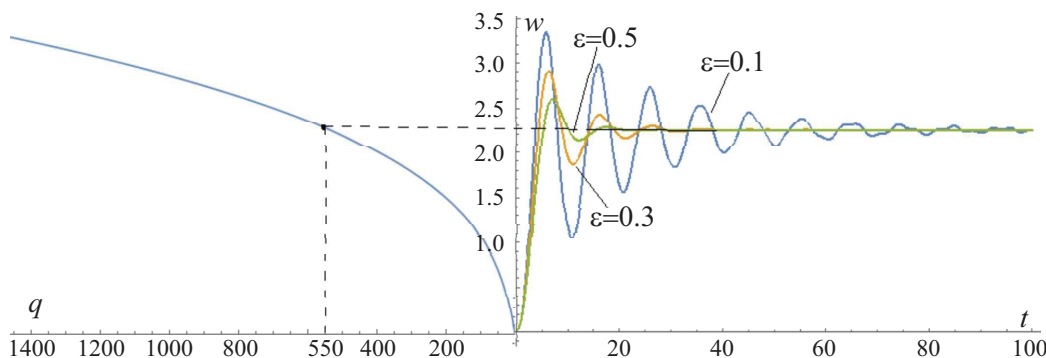


Рис. 2. Выбор коэффициента диссипации среды
 Fig. 2. The choice of the medium dissipation coefficient

В результате численного эксперимента выяснилось, что при коэффициенте диссипации $\varepsilon < 0.5$ не происходит установления колебаний довольно длительное время ($t > 40$), соответственно, количество итераций, необходимых для получения решения с абсолютной погрешностью $\bar{\varepsilon} = |w(t_i) - w(t_{i-1})| \leq 10^{-5}$, будет значительным. Для рассматриваемой задачи оптимальным является значение коэффициента диссипации $\varepsilon_{кр} = 0.5$.

На рис. 3 приведены диаграммы прогиб-нагрузка в зависимости от параметра кривизны панели k_y и дополнительного параметра длины l , связанного с учетом моментных напряжений, расстояния между ребрами семейств сетки a . Параметры эксперимента: $c = b = 1$, $h = 0.02$, $\delta = 0.02$, $\varepsilon = 0.5$, $q_0 \in [0; 1700]$, $t \in [0; 50]$.

На рис. 3, а приведены зависимости нагрузка-прогиб для сетчатой пластины $k_y = 0$ с расстоянием между ребрами $a = 0.02$. Данные на рис. 3, а показывают,



что увеличение дополнительного параметра l ($l = 0; 0.3; 1$) приводит к росту жесткости на изгиб и, как следствие, к уменьшению прогиба при одинаковых значениях нормальной нагрузки.

На рис. 3, б приведены графики нагрузка-прогиб для различных значений коэффициента кривизны сетчатой ($a = 0.02$) микрополярной ($l = 0.3$) панели $k_y = 0; 16; 24$. Графики качественно согласуются с аналогичными для гладких пластин. При $k_y = 16$ на графике наблюдается точка перегиба, при $k_y = 24$ — явление хлопка.

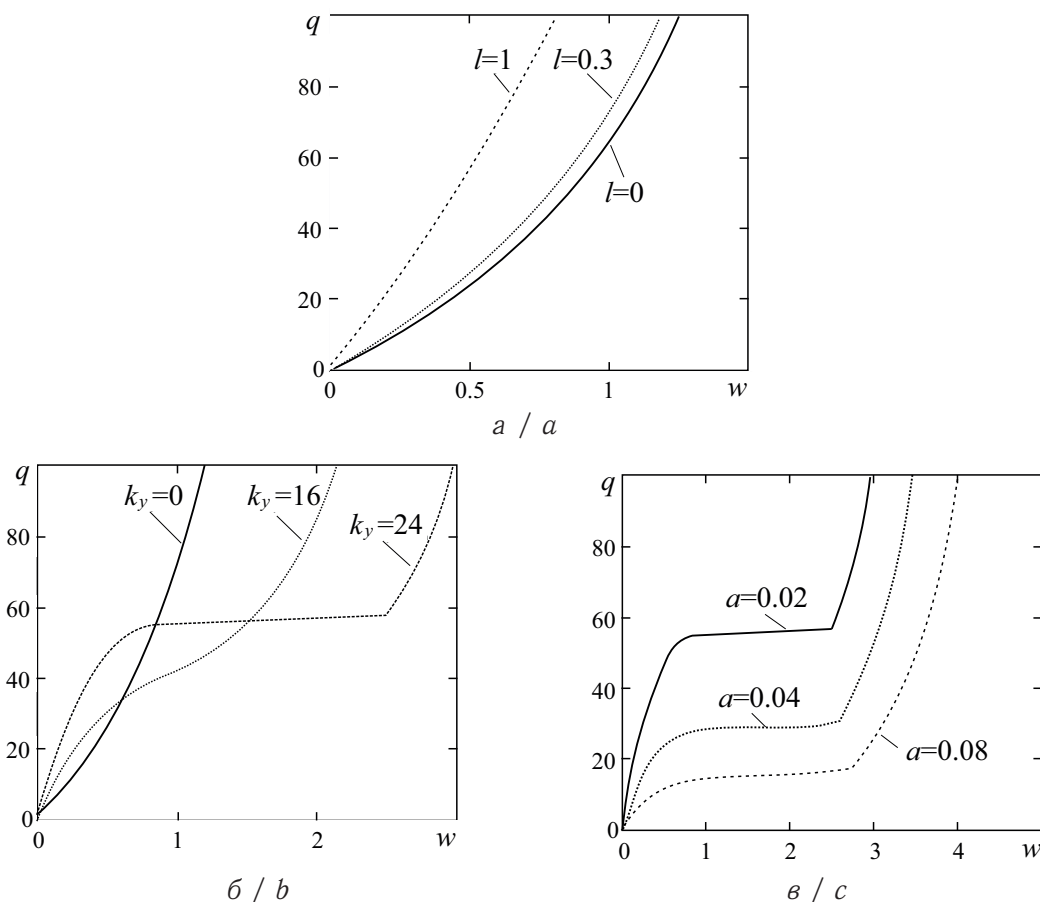


Рис. 3. График $w(q)$ в зависимости от: a — дополнительного параметра длины l ; b — параметра кривизны панели k_y ; c — расстояния между ребрами семейств сетки a

Fig. 3. The graph of $w(q)$ versus: a — additional length parameter l ; b — panel curvature parameter k_y ; c — distance between edges of a families

Графики $w(q)$, построенные для микрополярной панели с параметром кривизны $k_y = 24$ и значением дополнительного параметра длины $l = 0.3$ в зависимости от расстояния между ребрами ($a = 0.02; 0.04; 0.08$), приведены на рис. 3, в. Видно, что увеличение расстояния между ребрами решетки приводит к уменьшению жесткости панели на изгиб.

ВЫВОДЫ

На основании теории Г. И. Пшеничнова в работе построена математическая модель нелинейных колебаний сетчатых микрополярных цилиндрических панелей. Методом Феодосьева проведен анализ влияния разреженности сетки, значения дополнительного параметра длины, параметра кривизны на поведение цилиндрической



панели, состоящей из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер. Показано, что поведение сетчатой панели качественно совпадает с поведением гладкой панели. Учет теории микрополя приводит к увеличению жесткости панели, увеличение расстояния между ребрами решетки влечет уменьшение изгибной жесткости панели.

Список литературы

1. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, № 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Krysko V. A., Papkova I. V., Awrejcewicz J., Krylova E. Y., Krysko A. V. Non-symmetric forms of non-linear vibrations of flexible cylindrical panels and plates under longitudinal load and additive white noise // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 423. P. 212–229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.065>
5. Еремеев В. И., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. Москва : Наука, 2008. 280 с.
6. Rubin M. B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points. Dordrecht : Kluwer, 2000. 488 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>
7. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: Existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2007. Vol. 17, № 3. P. 363–392. <https://doi.org/10.1142/S0218202507001954>
8. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells // International Journal of Engineering Science. 2007. Vol. 45, iss. 2–8. P. 187–198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.03.003>
9. Wang F. Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of other approximate equations // International Journal of Engineering Science. 1990. Vol. 28, iss. 9. P. 919–925. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90041-G](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90041-G)
10. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2009. Vol. 89, iss. 4. P. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
11. Саркисян С. О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады Национальной академии наук Армении. 2011. Т. 111, № 2. С. 121–128.
12. Саркисян С. О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 2011. Т. 64, № 1. С. 58–67.
13. Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14, вып. 1. С. 55–66.
14. Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 2. С. 195–198.



15. Саркисян С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2010. № 1. С. 99–111.
16. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
17. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
18. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites Part B : Engineering. 2013. Vol. 51. P. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
19. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // Journal of Physics : Conference Series. 2019. Vol. 1210. P. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>
20. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route // Applied Physics Letters. 2002. Vol. 81. P. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
21. Еремеев В. А. Об одной нелинейной модели сетчатой оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 4. С. 127–133. <https://doi.org/10.31857/S057232990000704-4>
22. Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
23. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. Москва : Издательство Московского университета, 1999. 328 с.
24. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластин. Москва : Наука, 1982. 352 с.
25. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
26. Остроградский М. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1850. Vol. 8, no. 3. P. 33–48.
27. Professor Hamilton on the Application to Dynamics of a General Mathematical Method previously applied to Optics // Report of the British Association for the Advancement of Science. 4th meeting (1834). London : John Murray, Albemarle Street, 1835. P. 513–518.
28. Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Синичкина А. О., Крысько В. А. Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28. <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
29. Феодосьев В. И. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1966. С. 971–976.



30. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Издательство Саратовского университета, 1976. 216 с.

References

1. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss 4, pp. 442–451 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 750–761 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Krysko V. A., Papkova I. V., Awrejcewicz J., Krylova E. Y., Krysko A. V. Non-symmetric forms of non-linear vibrations of flexible cylindrical panels and plates under longitudinal load and additive white noise. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, vol. 423, pp. 212–229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.065>
5. Eremeev V. I., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 2008. 280 p. (in Russian).
6. Rubin M. B. *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*. Dordrecht, Kluwer, 2000. 488 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>
7. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: Existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2007, vol. 17, no. 3, pp. 363–392. <https://doi.org/10.1142/S0218202507001954>
8. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 2007, vol. 45, iss. 2–8, pp. 187–198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.03.003>
9. Wang F. Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of other approximate equations. *International Journal of Engineering Science*, 1990, vol. 28, iss. 9, pp. 919–925. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90041-G](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90041-G)
10. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2009, vol. 89, iss. 4, pp. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
11. Sargsyan S. H. Mathematical models of micropolar thin elastic bars. *Reports of NAS RA*, 2011, vol. 111, no. 2, pp. 121–128 (in Russian).
12. Sargsyan S. H. General mathematical models of micropolar thin elastic plates. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia: Mechanics*, 2011, vol. 64, no. 1, pp. 58–67 (in Russian).
13. Sargsyan S. H. General theory of micropolar elastic thin shells. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2011, vol. 14, iss. 1, pp. 55–66 (in Russian).
14. Sargsyan S. H. The general dynamic theory of micropolar elastic thin shells. *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 39–42. <https://doi.org/10.1134/S102833581090115X>
15. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar elastic thin shells with independent fields of displacements and rotations. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 99–111 (in Russian).
16. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid



- based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
17. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017. vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
 18. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
 19. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Kryskoyang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1210, pp. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>
 20. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle–Takens route. *Applied Physics Letters*, 2002, vol. 81, pp. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
 21. Eremeev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 464–469. <https://doi.org/10.3103/S002565441804012X>
 22. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
 23. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoi* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow University Press, 1999. 328 p. (in Russian).
 24. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastin* [The Theory of Thin Elastic Mesh Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
 25. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
 26. Ostrogradsky M. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg*, 1850, vol. 8, no. 3, pp. 33–48 (in Russian).
 27. Professor Hamilton on the Application to Dynamics of a General Mathematical Method previously applied to Optics. *Report of the British Association for the Advancement of Science*. 4th meeting (1834). London, John Murray, Albemarle Street, 1835, pp. 513–518.
 28. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Sinichkina A. O., Krysko V. A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff–Love hypotheses. *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2018, vol. 16, no. 4, pp. 17–28 (in Russian). <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
 29. Feodosiev V. I. Geometrically nonlinear problems in the theory of plates and shells. *Proceedings of the Sixth All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates*. Moscow, Nauka, 1966, pp. 971–976 (in Russian).
 30. Krysko V. A. *Nelineinaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Nonlinear Statics and Dynamics of Inhomogeneous Shells]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1976. 216 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 09.09.2019

Принята к публикации / Accepted 13.12.2019

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75

Научная статья

УДК 539.374

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле

Э. И. Старовойтов[✉], Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>

Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>

Аннотация. Рассмотрено осесимметричное деформирование трехслойной круговой пластины при повторном знакопеременном нагружении из пластической области локальной нагрузкой. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. В тонких упругопластических несущих слоях используются гипотезы Кирхгофа. Нелинейно упругий относительно толстый наполнитель несжимаем по толщине. Для него принимается гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Учтено воздействие теплового потока. Температурное поле в пластине рассчитывалось по формуле, полученной с помощью усреднения теплофизических параметров по толщине пакета. Система дифференциальных уравнений равновесия при нагружении пластины из естественного состояния получена вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение соответствующей краевой задачи сведено к нахождению трех искоемых функций: прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной поверхности наполнителя. Для этих функций выписана неоднородная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ее аналитическое итерационное решение получено в функциях Бесселя методом упругих решений Ильюшина. При повторном знакопеременном нагружении пластины решение краевой задачи строится с помощью теории переменного нагружения Москвитина. В этом случае используется гипотеза о подобии функций пластичности на каждом шаге нагружения. Их аналитический вид принимается не зависящим от точки разгрузки. Однако входящие в аппроксимационные формулы материальные константы будут другие. Учитывается циклическое упрочнение материала несущих слоев. Проведен параметрический анализ полученных решений при различных граничных условиях в случае локальной нагрузки, распределенной по кругу. Численно исследовано влияние температуры и нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, пластичность, повторное знакопеременное локальное нагружение, температурное поле, численный анализ НДС



Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Т20Р-047).

Для цитирования: Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Repeated alternating loading of a elastoplastic three-layer plate in a temperature field

E. I. Starovoitov[✉], D. V. Leonenko

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

Eduard I. Starovoitov, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>

Denis V. Leonenko, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>

Abstract. Axisymmetric deformation of a three-layer circular plate under repeated alternating loading from the plastic region by a local load is considered. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack is adopted the hypothesis of a broken line. In a thin elastic-plastic load-bearing layers are used the hypothesis of Kirchhoff. A non-linearly elastic relatively thick filler is incompressible in thickness. It is taken to be a hypothesis of Tymoshenko regarding the straightness and the incompressibility of the deformed normals with linear approximation of the displacements through the thickness layer. The work of the filler in the tangential direction is taken into account. The physical relations of stress-strain relations correspond to the theory of small elastic-plastic deformations. The effect of heat flow is taken into account. The temperature field in the plate was calculated by the formula obtained by averaging the thermophysical parameters over the thickness of the package. The system of differential equations of equilibrium under loading of the plate from the natural state is obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the corresponding boundary value problem is reduced to finding the three desired functions: deflection, shear and radial displacement of the shear surface of the filler. A non-uniform system of ordinary nonlinear differential equations is written for these functions. Its analytical iterative solution is obtained in Bessel functions by the method of elastic solutions of Ilyushin. In case of repeated alternating loading of the plate, the solution of the boundary value problem is constructed using the theory of variable loading of Moskvitin. In this case, the hypothesis of similarity of plasticity functions at each loading step is used. Their analytical form is taken independent of the point of unloading. However, the material constants included in the approximation formulas will be different. The cyclic hardening of the material of the bearing layers is taken into account. The parametric analysis of the obtained solutions under different boundary conditions in the case of a local load distributed in a circle is carried out. The influence of temperature and nonlinearity of layer materials on the displacements in the plate is numerically investigated.

Keywords: three-layer circular plate, plasticity, repeated alternating local loading, temperature field, numerical analysis SSS



Acknowledgements: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (projects No. T20R-047).

For citation: Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of a elasto-plastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Композитные, в том числе трехслойные элементы конструкций нашли широкое применение в ракетно- и авиастроении, транспортном машиностроении, строительстве. В связи с этим возникает необходимость создания соответствующих расчетных механико-математических моделей, учитывающих физическую нелинейность материалов слоев и воздействие внешней среды.

В работах [1–13] содержатся различные математические модели динамического деформирования многослойных и трехслойных стержней, пластин и оболочек, приведены постановки начально-краевых задач, изложены методы решения. Рассмотрены свободные, вынужденные и резонансные колебания трехслойных композитных пластин; изучено прохождение волн в слоях и нестационарные взаимодействия в контактных задачах с подвижными границами. Термосиловое деформирование тонкостенных элементов конструкций рассмотрено в статьях [14, 15], где разработаны модели геометрически нерегулярных пластин и оболочек с термочувствительной толщиной. Публикации [16–20] посвящены изучению изотермического квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин, в том числе при локальных и переменных нагрузках. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле исследован в статье [21]. Упругие и упругопластические пластины со сжимаемым наполнителем, а также взаимодействующие с упругим основанием изучались в работах [22–24].

Здесь получено аналитическое решение задачи о деформировании трехслойной круговой пластины с упругопластическими несущими слоями при повторном осесимметричном знакопеременном локальном нагружении. Учтено воздействие температурного поля. Решение получено в рамках теории переменного нагружения Москвитина [25]. Численная апробация проведена в случае металлополимерного пакета при равномерно распределенной круговой нагрузке.

1. НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина под действием локальной осесимметричной нагрузки (рис. 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость наполнителя принята за координатную, ось z направлена ей перпендикулярно вверх, к слою 1.

В тонких упругопластических несущих слоях толщиной $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине ($h_3 = 2c$) нелинейно упругом относительно толстом наполнителе выполняется гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя.

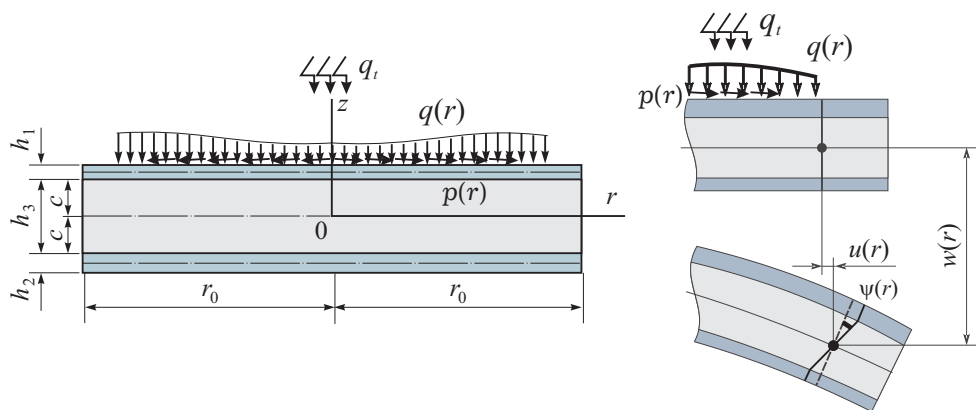


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

Fig. 1. Design scheme of a three-layer plate

К наружной поверхности первого слоя ($z = c + h_1$) подводится тепловой поток q_t . Температурное поле $T(z)$ в пластине определяется формулой, полученной ранее [21], поэтому в дальнейшем считается известным. Осесимметричная поверхностная локальная нагрузка имеет вертикальную и горизонтальную составляющие, интенсивности которых $q(r)$, $p(r)$. Тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), а прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной поверхности $u(r)$ не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти три функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w_{,r} = \psi$, после интегрирования следуют выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$, введем обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), & Q &= \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации в слоях пластины следуют из соотношений Коши и перемещений (1). Для связи напряжений и деформаций используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [26]:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T))e_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}, T))e_{rz}^{(3)} & (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$



где $s_\alpha^{(k)}$, $e_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T)$, $K_k(T)$ — температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$ — функции пластичности материалов несущих слоев, причем при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$ следует положить $\omega_k \equiv 0$; $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция физической нелинейности заполнителя, ($\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$), $\varepsilon_s^{(3)}$ — предел нелинейности; $s_{rz}^{(3)}$, $e_{rz}^{(3)}$ — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций.

В компонентах тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$, используя соотношения (3), выделим линейную и нелинейную составляющие:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}, & \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \\ \sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k e_\alpha^{(k)} + 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T), & \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} &= 2G_k \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) e_\alpha^{(k)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 e_{rz}^{(3)}, & \sigma_{rz\omega}^{(3)} &= 2G_3 \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T) e_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенные внутренние усилия и моменты также представим в виде разности линейной и нелинейной частей:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, & M_\alpha &= M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), & H_{\alpha \omega} &= M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Величины $T_{\alpha e}^{(k)}$, $T_{\alpha \omega}^{(k)}$, $M_{\alpha e}^{(k)}$, $M_{\alpha \omega}^{(k)}$, $H_{\alpha e}^{(k)}$, $H_{\alpha \omega}^{(k)}$, Q_e , Q_ω вычисляются по формулам (2), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно линейными $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{rze}^{(3)}$ или нелинейными составляющими $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$, $\sigma_{rz\omega}^{(3)}$ из соотношений (4).

Система уравнений равновесия в усилиях для упругой трехслойной пластины получена в [24] без использования соотношений связи напряжений и деформаций, поэтому она остается справедливой и в рассматриваемом случае. Подставив в нее выражения для внутренних усилий (5), приведем ее к виду

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= -p + p_\omega, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, причем индекс «e» опущен для удобства. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемые с нижним индексом « ω »:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), & h_\omega &= H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega, \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение обобщенных усилий через искомые функции $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ получим, подставив (4) в (2) и выразив деформации через перемещения. Отправив затем их и



соотношения (7)) в систему (6), имеем

$$\begin{aligned} L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) &= -p + p_\omega, \\ L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= h_\omega, \\ L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где a_i — коэффициенты, имеющие интегральный вид, так как модули упругости материалов изменяются по толщине слоев вместе с температурой ($m = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\ a_5 &= K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \\ K_{km} &= \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 1, 2, 3); \end{aligned}$$

L_2, L_3 — дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Полученная система дифференциальных уравнений (8) является нелинейной, поэтому для ее решения необходимо применять численные или приближенные методы. В дальнейшем используем метод упругих решений, сходимость которого доказана в широких пределах. В итерационном виде система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)} + a_2\psi^{(n)} - a_3w_{,r}^{(n)}) &= -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2u^{(n)} + a_4\psi^{(n)} - a_5w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3\psi^{(n)} &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3u^{(n)} + a_5\psi^{(n)} - a_6w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n — номер приближения, величины $p_\omega^{(n-1)}, h_\omega^{(n-1)}, q_\omega^{(n-1)}$ называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (7), в которых во все слагаемые необходимо добавить индекс « $n - 1$ » вверху:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_\alpha^{(k, n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_\alpha^{(k, n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3, n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1, n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2, n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ Q_\omega^{(n-1)} &= \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} e_{rz}^{(3, n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{(k, n-1)}, T_k). \end{aligned} \quad (10)$$



Линейная краевая задача определения функций $u^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $w^{(n)}$ замыкается присоединением к системе уравнений (9) граничных условий в итерациях. При $r = r_0$ должны выполняться требования:

- при заделке контура пластины

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0;$$

- при шарнирном опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{,r\omega}^{(n-1)}. \quad (11)$$

Процедура нахождения решения линейной системы (9) известна [24]. По аналогии получаем следующее рекуррентное решение задачи теории малых упруго-пластических деформаций для рассматриваемой упругопластической пластины при нагружении из естественного состояния:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) - \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi^{(n)} + C_7^{(n)} r + \frac{C_8^{(n)}}{r} \right], \\ w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[b_2 \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r^{(n)} dr \right) - \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) - L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} C_1^{(n)} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}, \right] \end{aligned} \quad (12)$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, ..., $C_8^{(n)}$ — константы интегрирования, определяемые из граничных условий; $\psi_r^{(n)}(r)$ — частное решение неоднородного модифицированного уравнения Бесселя, выделяемого из системы (9) для сдвига; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам L_2 , L_3

$$\begin{aligned} L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr, \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}. \end{aligned}$$

Все интегралы являются определенными с переменным верхним пределом и берутся от 0 до r .

2. ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим изгиб исследуемой пластины локальной нагрузкой, равномерно распределенной по кругу относительного радиуса $0 \leq b \leq r_0$. Используя функцию Хевисайда $H_0(r)$, нагрузку можно записать в виде

$$q(r) = q_0 H_0(b - r), \quad p(r) \equiv 0. \quad (13)$$



Входящее в перемещения (12) частное решение $\psi_r^{(n)}(r)$ при нагрузке (13) будет

$$\begin{aligned}
 \psi_r^{(n)}(r) = & \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2} r - \\
 & - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \right] + \\
 & + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \right]. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь использован интегральный оператор от нагрузки

$$\int L_3^{-1}(q_0 H_0(b-r)) \, dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r).$$

В случае заделки или шарнирного опирания контура пластины из части граничных условий (11) ($\psi^{(n)} = w^{(n)} = 0$ при $r = r_0$) и условий ограниченности решения в начале координат следуют константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_4^{(n)}$, $C_6^{(n)}$, $C_8^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
 C_1^{(n)} = & -\frac{q_0 b^2}{2}, \quad C_2^{(n)} = -\frac{1}{I_1(\beta)} \left(C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\
 & \times \left(-K_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \right] \right|_{r=r_0} + \\
 & + I_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \right] \Big|_{r=r_0}, \tag{15} \\
 C_3^{(n)} = & \frac{\gamma_1 \beta^2 b I_1(\beta b)}{q_0} + \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left(\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) dr \right] \Big|_{r=r_0}, \\
 C_6^{(n)} = & \frac{q_0 b^4}{16 b_3}, \quad C_8^{(n)} = 0, \\
 C_4^{(n)} = & -\frac{C_1^{(n)}}{4 b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4 b_3} - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} \, dr \Big|_{r=r_0} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + \\
 & + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0}.
 \end{aligned}$$



Константы $C_5^{(n)}$, $C_7^{(n)}$ при шарнирном опирании получим из оставшихся условий на контуре ($u^{(n)} = 0$, $M = M_r^{(n-1)}$):

$$\begin{aligned}
 C_5^{(n)} &= 2 \frac{a_7 b_1 + a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + \\
 &+ \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2 \left(L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + M_r^{(n-1)} \right) \right) + \\
 &+ \left(b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left(\frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right), \\
 C_7^{(n)} &= -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - \\
 &- 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Аналогичные константы при заземленном контуре следуют из условий $u^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0$ при $r = 1$:

$$C_5^{(n)} = -2b_3 C_6^{(n)} - \frac{C_1^{(n)}}{2}, \quad C_7^{(n)} = -\frac{2}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}. \tag{17}$$

Следовательно, полученное рекуррентное решение (12)–(17) описывает деформирование трехслойной упругопластической круговой пластины в температурном поле при нагружении из естественного состояния непрерывно распределенной по кругу локальной поверхностной нагрузкой в случае различных граничных условий.

3. ПОВТОРНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляются мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями $q''(r)$ обратного знака:

$$q''(r) = -q_0 H_0(b - r). \tag{18}$$

При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках пластины остается неизменной, совпадающей с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T_1(z) = T(z, t_1)$.

Эти усилия создадут в пластине поле перемещений u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ и напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$ ($\alpha = r, \varphi$). Повторяя методику Москвитина [25], примененную для трехслойных стержней [18], определим для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки разности ($\alpha = r, \varphi$):

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma_\alpha^{(k)'} - \sigma_\alpha^{(k)''}, & \sigma_{rz}^{(3)*} &= \sigma_{rz}^{(3)'} - \sigma_{rz}^{(3)''}, & s_\alpha^{(k)*} &= s_\alpha^{(k)'} - s_\alpha^{(k)''}, \\
 \sigma^{(k)*} &= \sigma^{(k)'} - \sigma^{(k)''}, & \varepsilon_\alpha^{(k)*} &= \varepsilon_\alpha^{(k)'} - \varepsilon_\alpha^{(k)''}, & \varepsilon_{rz}^{(3)*} &= \varepsilon_{rz}^{(3)'} - \varepsilon_{rz}^{(3)''}, \\
 e_\alpha^{(k)*} &= e_\alpha^{(k)'} - e_\alpha^{(k)''}, & \varepsilon^{(k)*} &= \varepsilon^{(k)'} - \varepsilon^{(k)''}, & u^* &= u' - u'', \quad \psi^* = \psi' - \psi'', \\
 w^* &= w' - w'', & q^*(r) &= q(r) - q''(r) = 2q_0 H_0(b - r),
 \end{aligned} \tag{19}$$

где величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в пластине перед разгрузкой (полученные ранее (12)–(17)), двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла.



В силу линейной связи деформаций с перемещениями соотношения Коши будут справедливы и для соответствующих величин со звездочками. Для напряжений и деформаций (19), отмеченных звездочкой, примем физические уравнения состояния типа (3):

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)*} &= 2G_k(1 - \omega_k^*)e_{\alpha}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k\varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3(1 - \omega_k^*)e_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (20)$$

где значения модулей упругости зафиксированы в момент разгрузки $G_k(z) = G_k(T_1(z))$, $K_k(z) = K_k(T_1(z))$, а температура в явном виде в эти соотношения не входит.

Нелинейные характеристики упругого заполнителя не изменяются при циклическом деформировании. В несущих слоях универсальные функции нелинейности ω_k^* полагаем подобными функциям пластичности при нагружении из естественного состояния [25]:

$$\omega_k^* \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{k*}, \varepsilon_y^{k*}, T_1, A_k^*, \alpha_k^*) \quad (k = 1, 2), \quad (21)$$

где A_k^* , α_k^* — экспериментально определяемые параметры материала, входящие в аппроксимационную формулу функции нелинейности для величин со звездочками [27].

Используя физические соотношения (20), в компонентах тензора напряжений $\sigma_{\alpha}^{(k)*}$, $\sigma_{rz}^{(3)*}$ выделим линейную и нелинейную составляющие. Это позволит подобную операцию провести и для величин типа внутренних усилий со звездочками. В отличие от подобных соотношений (4), (5) температура здесь в явном виде входить не будет.

Нелинейные уравнения равновесия для величин со звездочками будут иметь вид типа (8). Соответствующие итерационные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)*} + a_2\psi^{(n)*} - a_3w_{,r}^{(n)*}) &= -p^* + p_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_2(a_2u^{(n)*} + a_4\psi^{(n)*} - a_5w_{,r}^{(n)*}) - 2cG_3\psi^{(n)*} &= h_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_3(a_3u^{(n)*} + a_5\psi^{(n)*} - a_6w_{,r}^{(n)*}) &= -q^* + q_{\omega}^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (22)$$

Дополнительные «внешние нагрузки» на первом шаге ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения:

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)*} &= T_{r\omega}^{(n-1)*},r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)*} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)*}), \\ h_{\omega}^{(n-1)*} &= H_{r\omega}^{(n-1)*},r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)*} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)*}) - Q_{\omega}^{(n-1)*}, \\ q_{\omega}^{(n-1)*} &= M_{r\omega}^{(n-1)*},rr + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)*},r - M_{\varphi\omega}^{(n-1)*},r), \end{aligned} \quad (23)$$

где величины $T_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, $M_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, $H_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, Q_{ω} вычисляются по формулам (10), в которых во всех слагаемых необходимо формально добавить звездочку в верхний индекс.

Задача нахождения функций $u^{(n)*}$, $\psi^{(n)*}$, $w^{(n)*}$ замыкается присоединением к уравнениям (22) граничных условий, подобных (11). В этом случае краевая задача для величин со звездочками совпадает с краевой задачей для некоторой фиктивной трехслойной линейно-упругой пластины, которая испытывает изотермическое нагружение из естественного состояния внешними p^* , q^* и дополнительными усилиями (23) с функциями нелинейности (21). Фиктивная пластина геометрически



совпадает с рассматриваемой. Ее упругие свойства характеризуются переменными по толщине модулями упругости $G_k(z)$, $K_k(z)$ за счет зафиксированной при разгрузке температуры.

Система дифференциальных уравнений для величин со звездочками (22) с точностью до обозначений совпадает с (9) и отличается только зафиксированной при разгрузке температурой T_1 . Ее аналитическое решение следует из (12), где необходимо провести соответствующие формальные замены функций нелинейности и нагрузок на величины со звездочками:

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)*} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q^*) dr - \\ &- \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)*}) dr - \frac{C_1^{(n)*}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1 w^{(n)*} r} - \frac{a_2}{a_1 \psi^{(n)*}} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)*} &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &- K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] + \\ &+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right], \\ \int L_3^{-1}(q^*) dr &= 2q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r). \end{aligned}$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$ формально вычисляются по формулам (15)–(17), в которых нужно в соответствующие величины ввести в верхний индекс звездочку и амплитуду нагрузки q_0 заменить на $2q_0$.

Искомые параметры НДС трехслойной упругопластической пластины при повторном знакопеременном нагружении найдем из соотношений (19) с учетом решений (14), (24). Например, перемещения будут

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

Численные результаты приводятся для трехслойной несимметричной по толщине пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Все необходимые функции нелинейности и упругие параметры этих материалов содержатся в [27]. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительные толщины слоев: $h_1 = 0.02$; $h_2 = 0.06$; $h_3 = 0.4$. Интенсивность распределенной нагрузки $q_0 = 8$ МПа.



Рисунок 2 иллюстрирует зависимость максимального прогиба пластины от радиуса b пятна нагрузки при различных температурах: 1, 2 — упругий и физически нелинейный при $T_1 = 293$ К; 3, 4 — упругий и физически нелинейный при $T_2 = 323$ К. С увеличением радиуса локальной нагрузки прогиб растет нелинейно, достигая максимума при $b = 1$. В случае изотермического нагружения учет физической нелинейности материалов слоев увеличивает расчетный максимальный прогиб на 16%, при повышенной температуре — на 22%.

На рис. 3 показаны a — прогиб, b — относительный сдвиг в заполнителе трехслойной пластины при повторном знакопеременном изгибе круговой нагрузкой радиуса $b = 0.5$ (один штрих — прямое нагружение, два штриха — обратное): 1 — упругая пластина, 2 — изотермическая упругопластичность, 3 — термоупругопластичность. Прогиб и сдвиг при повторном нагружении уменьшились на 2–3%, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности, что объясняется циклическим упрочнением материала Д16Т [26].

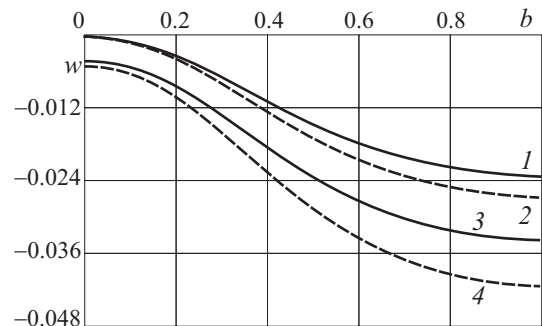


Рис. 2. Максимальный прогиб пластины в зависимости от радиуса b пятна нагрузки

Fig. 2. Maximum plate deflection depending on the radius b of the load spot

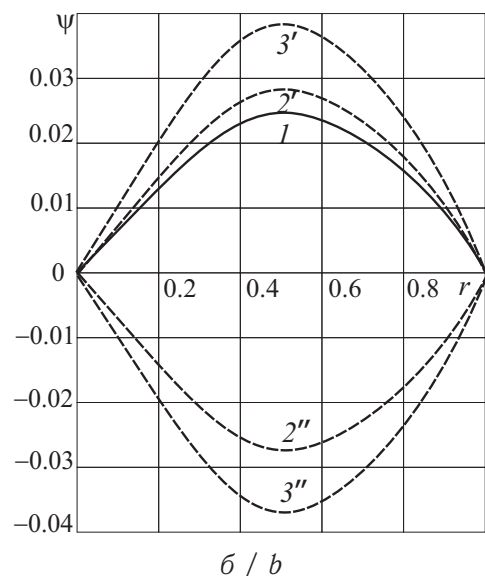
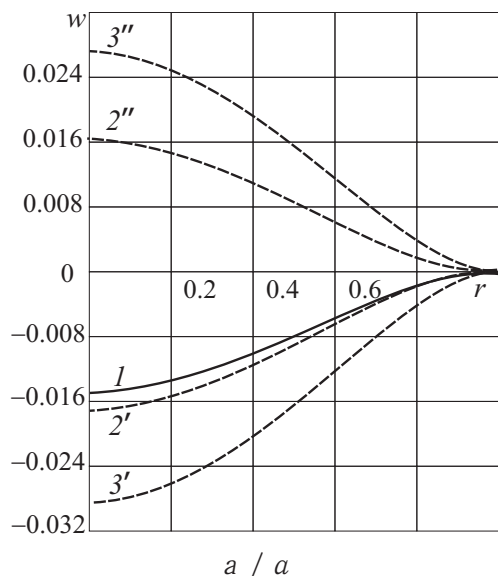


Рис. 3. Прогиб пластины (а) и относительный сдвиг в заполнителе при повторном нагружении (б)

Fig. 3. Plate deflection (a) and relative shear in a filled field under repeated loading (b)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластических трехслойных круговых пластин в температурном поле при прямых и знакопеременных непрерывных и локальных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.



Список литературы

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Ivanez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates // *Composite Structures*. 2015. № 133. P. 1127–1136. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
3. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // *Aerospace Science and Technology*. 2016. Vol. 52. P. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
4. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128.
5. Skec L., Jelenic G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mechanica*. 2014. Vol. 225, № 2. P. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43, № 2. P. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
7. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *Journal of Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 162, № 2. P. 246–253. <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4>
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46, № 5. P. 779–787. <https://doi.org/10.3103/S0025654411050128>
9. Мочалин А. А. Параметрические колебания неоднородной круговой цилиндрической оболочки переменной плотности при различных краевых условиях // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 210–214. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215>
10. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 202–209. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209>
11. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
12. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholi H. The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, № 11. P. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
13. Havaladar S., Sharma R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multilayer PU foam sandwich panels // *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*. 2013. Vol. 1, № 5. P. 201–206. <https://doi.org/10.4236/jmmce.2013.15031>
14. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // *Доклады РАЕН. Поволжское межрегиональное отделение*. 1999. № 1. С. 28–37.
15. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 2. С. 32–40.



16. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, № 8. P. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
17. Starovoitov E. I. Variable loading of three-layer shallow viscoplastic shells // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 1980. Vol. 35, № 1–2. P. 54–58.
18. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
19. Янковский А. П. Исследование установившейся ползучести металлокомпозитных балок слоисто-волокнутой структуры с учетом ослабленного сопротивления поперечным сдвигам // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки*. 2016. Т. 20, № 1. С. 85–108. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1459>
20. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2006. Vol. 1, № 1. P. 97–127. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.97>
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
22. Козел А. Г. Математическая модель деформирования круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // *Проблемы физики, математики и техники*. 2017. № 1 (30). С. 42–46.
23. Захарчук Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем // *Проблемы физики, математики и техники*. 2017. № 4 (33). С. 53–57.
24. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovski D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54, № 3. P. 299–312. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x>
25. Москвитин В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций. Москва : Наука, 1981. 344 с.
26. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. 376 с.
27. Starovoitov E. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // *Strength of Materials*. 1988. Vol. 20, № 4. P. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogoslounykh konstruktсий* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p. (in Russian).
2. Ivanez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
3. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
4. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50. no. 2, pp. 208–217. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020107>



5. Skec L., Jelenic G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
7. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253. <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4>
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787. <https://doi.org/10.3103/S0025654411050128>
9. Mochalin A. A. The parametric oscillations of heterogeneous round cylindrical shell of variable density on different boundary conditions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 210–214 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215>
10. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Impulsive action on the three-layered circular cylindrical shells in elastic media. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 202–209 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209>
11. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible Liquid. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
12. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholly H. The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 11, pp. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
13. Havaladar S., Sharma R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multilayer PU foam sandwich panels. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206. <https://doi.org/10.4236/jmmce.2013.15031>
14. Belostochny G. N., Rusina E. A. Shells and geometrically irregular plates with heat-sensitive thickness. *Dokl. Ross. Akad. Estestv. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 28–37 (in Russian).
15. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>
16. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
17. Starovoitov E. I. Variable loading of three-layer shallow viscoplastic shells. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 1980, vol. 35, no. 1–2, pp. 54–58.
18. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable bending of a three-layer rod with a compressed filler in the neutron flux. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
19. Yankovskii A. P. A Study of steady creep of layered metal-composite beams of laminated-fibrous structures with account of their weakened resistance to the transverse Shift. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 85–108 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1459>



20. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 97–127. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.97>
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
22. Kozel A. G. Mathematical model of deformation of the circular three-layer plate on the basis of Pasternak. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2017, vol. 30, pp. 42–46 (in Russian).
23. Zakharchuk Yu. V. Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2017, vol. 33, pp. 53–57 (in Russian).
24. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovski D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 299–312. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x>
25. Moskvitin V. V. *Tsiklichesкое nagruzhenie elementov konstruksii* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
26. Il'iushin A. A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Pt. 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
27. Starovoitov E. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, no. 4, pp. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

Поступила в редакцию / Received 12.09.2019

Принята к публикации / Accepted 26.11.2019

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 76–87
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 76–87

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-76-87>

Bounded finite-time stabilization of the prey – predator model via Korobov's controllability function

A. E. Choque-Rivero[✉], F. Ornelas-Tellez

Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo (UMSNH), Morelia, 58030, Michoacan, Mexico

Abdon E. Choque-Rivero, abdon.choque@umich.mx, <https://orcid.org/0000-0003-0226-9612>

Fernando Ornelas-Tellez, fornelas@umich.mx, <https://orcid.org/0000-0002-6428-8184>

Abstract. The problem of finite-time stabilization for a Leslie-Gower prey – predator system through a bounded control input is solved. We use Korobov's controllability function. The trajectory of the resulting motion is ensured for fulfilling a physical restriction that prey and predator cannot achieve negative values. For this purpose, a certain ellipse depending on given data and the equilibrium point of the considered system is constructed. Simulation results show the effectiveness of the proposed control methodology.

Keywords: finite-time stabilization, Korobov's controllability function, bounded control input, prey – predator model

Acknowledgements: The research of the first author is supported by CONACYT (project A1-S-31524) and CIC-UMSNH, Mexico. The second author is supported by CONACYT (project CB-222760), Mexico.

For citation: Choque-Rivero A. E., Ornelas-Tellez F. Bounded finite-time stabilization of the prey – predator model via Korobov's controllability function. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 76–87 (in English). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-76-87>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 539.374

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-76-87>

Стабилизация за конечное время ограниченным управлением модели хищник – жертва с помощью функции управляемости В. И. Коробова

А. Э. Чоке-Риверо[✉], Ф. Орнелас-Тельес

Мичоаканский университет Сан-Николас-де-Идальго, Мексика, 58030, штат Мичоакан, г. Морелия, университетский городок

Чоке-Риверо Абдон Эдди, кандидат физико-математических наук, ответственный в группе «Уравнения математической физики», abdon.choque@umich.mx, <https://orcid.org/0000-0003-0226-9612>



Орнелас-Тельес Фернандо, кандидат технических наук, группа «Теория управления», fornelas@umich.mx, <https://orcid.org/0000-0002-6428-8184>

Аннотация. Рассматривается управляемая модель взаимодействия двух видов жертва – хищник. Численность популяции описывается системой дифференциальных уравнений 2-го порядка, в правую часть которой входит управление, удовлетворяющее наперед заданному ограничению. Система имеет точку покоя (точку равновесия). Необходимо выбрать управление так, чтобы перевести произвольное начальное состояние из некоторой окрестности точки равновесия по траектории системы в точку равновесия за конечное время. Строится семейство позиционных управлений, которое решает эту задачу. Находится окрестность точки покоя, являющаяся эллипсом с центром в этой точке. Причем все траектории, отвечающие этим управлениям и начинающиеся в произвольной точке эллипса, заканчиваются в точке равновесия и находятся внутри эллипса.

Ключевые слова: стабилизация за конечное время, функция управляемости В. И. Коробова, ограниченное управление, модель хищник – жертва

Благодарности: Работа первого автора выполнена при поддержке Мексиканского научного фонда CONACYT (проект A1-S-31524) и CIC-UMSNH, Мексика. Работа второго автора выполнена при поддержке Мексиканского научного фонда CONACYT (проект CB-222760).

Для цитирования: *Choque-Rivero A. E., Ornelas-Tellez F.* Bounded finite-time stabilization of the prey – predator model via Korobov’s controllability function [*Чоке-Риверо А. Э., Орнелас-Тельес Ф.* Стабилизация за конечное время ограниченным управлением модели хищник – жертва с помощью функции управляемости В. И. Коробова] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 76–87. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-76-87>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

INTRODUCTION

An interesting system exhibiting oscillations and chaotic behavior is the prey – predator model [1–3], which because of its complex dynamic characteristics results in a challenging system to be controlled [4]. This model has been used to study biological phenomena and the equilibrium of the species. The earliest ratio-dependent model was given by Leslie and Gower [5]. In this model, the predator is also assumed to be growing logistically with a carrying capacity that depends on the availability of a variable resource (prey). This formulation is based on the assumption that a reduction in a predator population has a reciprocal relationship with the per capita availability of its preferred food. This interesting formulation for the predator dynamics has been discussed by Leslie and Gower in [5] and by Pielou in [6].

From a control view point, it is desirable to reach an equilibrium point for the system, particularly in finite time and by a bounded control input, as considered in this work. We will crucially employ V. I. Korobov’s method consisting of the use of the controllability function (CF), which is a Lyapunov-type function. The main differences between the CF and the Lyapunov functions are the following.

The use of the CF (resp. Lyapunov function) allows stabilizing the control system in finite (resp. in infinite time) [7, 8].

The CF (resp. Lyapunov function) is applied to equilibrium or nonequilibrium points (resp. only for equilibrium points [9]).

The CF (resp. Lyapunov function) is an implicit function (resp. explicit function) [10]. See also [11] and [12].



In comparison with previous works on the stabilization of the prey and predator model [3, 13], in this current work we present a family of bounded controls that stabilize the aforementioned system in finite time. See Theorem 2. Furthermore, for the equilibrium point of the system, an admissible neighborhood in terms of the interior of an ellipse is given. See Lemma 3 and Remark 3.

Notation 1. Let \mathbb{R} denote the set of real numbers. Let S be an $m \times n$ matrix. By S^T we denote the transpose matrix of S . Let $x \in \mathbb{R}^n$. By $\|x\|$ we denote the euclidian norm of $x := (x_1, \dots, x_n)$, i.e., $\|x\| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. The norm of an $n \times n$ matrix S is defined by $\|S\| := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |s_{ij}|$.

1. THE PREY – PREDATOR MODEL

Consider the nonlinear control system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \alpha}, \\ \dot{x}_2 &= \gamma \left(1 - \frac{x_2}{\beta x_1}\right) x_2 + u, \quad |u| \leq u_1 \end{aligned} \tag{1}$$

defined in set $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0\}$ with the initial condition (x_1^0, x_2^0) and $x_1^0 > 0, x_2^0 > 0$, with u being a control input for achieving stabilization of the system at the equilibrium point. Let $(\xi, \eta) \in D$ be the equilibrium point of the system (1) with $u = 0$. In system (1), $x_1 = X/K, x_2 = mY/rK^2, t = rT, \alpha = a/K^2, \beta = mn/Kr$ and $\gamma = s/r$, where X and Y represent the prey and predator population, respectively. The parameter r is the intrinsic growth of prey species with carrying capacity K . Furthermore, T is a scaled time variable, m denotes the per capita consumption rate of the predator. Parameter a denotes the number of prey required to halve the maximum rate, just half, while s is the growth rate of the logistically growing population Y , and finally n is a magnitude of the food quality that the prey provides for conversion into predator population [4, 13]. All the parameters are assumed to be positive.

The statement of the problem we consider is the following: find a *bounded* positional $u = u(x)$ with $|u(x)| \leq u_1$ and such that the trajectory $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ starting at the initial point $x_0 := (x_1^0, x_2^0)$ and belonging to a certain neighborhood of the point $\bar{x} := (\xi, \eta)$ terminates at \bar{x} at *finite* time $T(x, \bar{x})$. This problem is called *the synthesis problem*.

System translated to the origin

Recall that the state (x_1, x_2) of the system (1) belongs to the open first quadrant, when $x_1 > 0$ and $x_2 \geq 0$. The following remark is valid.

Remark 1. The abscissa and ordinate of the equilibrium point (ξ, η) of the system (1) satisfy the following inequalities:

$$0 < \xi < 1, \quad \text{and} \quad 0 < \eta < \beta.$$

Proof. From the right hand side of (1) with $u = 0$, we have that the abscissa of an equilibrium point belonging to Q_1 satisfies

$$x^3 - x^2 + x(\alpha + \beta) - \alpha = 0. \tag{2}$$



Denote by f the left hand side of (2). Note that the coefficients of f alternate in sign, which implies that (2) has three positive solutions or one positive solution. By analyzing the derivative f' , we find that (2) has one positive root and that $0 < \xi < 1$. Consequently, from the second equality of (1) we have that $0 < \eta < \beta$. \square

By translating the equilibrium point (ξ, η) to the origin, we have

$$\dot{y} = Ay + bu + g(y), \tag{3}$$

where

$$A := \begin{pmatrix} \frac{2\xi(1-\xi)^2}{\beta} - \xi & -\frac{1-\xi}{\beta} \\ \beta\gamma & -\gamma \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$g(y) := \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$g_1(y_1, y_2) := -\frac{d_4^2 y_1^4 + d_3 y_1^3 + d_2 y_1^2 + d_1 y_2 y_1}{d_4^2 (2y_1 \xi + y_1^2 + \alpha + \xi^2)}, \quad g_2(y_1, y_2) := -\frac{\gamma (y_2 - \beta y_1)^2}{\beta (\xi + y_1)},$$

and

$$d_1 := (\alpha - \xi^2) (\alpha + \xi^2), \quad d_2 := (\alpha + \xi^2) (-w\xi + \alpha^2 + \alpha(5\xi - 3)\xi + \xi^3), \\ d_3 := (\alpha + \xi^2) (3\alpha\xi - \alpha + \xi^3 + \xi^2), \quad d_4 := \alpha + \xi^2.$$

We assume that the parameters α and β are positive. Consequently, the function g appearing in (5) and the system (3) is well-defined in the region:

$$D_0 := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + \xi > 0, y_2 + \eta > 0\}.$$

The linear part of (3) is completely controllable if and only if $\text{rank}(b, Ab) = 2$, i.e., if and only if

$$\frac{1 - \xi}{\beta} \neq 0.$$

In the sequel, we will study the control system in a certain neighborhood of the origin

$$D_1 := \{y \in D_0 : \|g(y)\| \leq C_1 \|y\|\} \tag{6}$$

for some $C_1 > 0$.

2. FINITE-TIME STABILIZATION

It seems that [14] was the first to use the term *finite-time stability* (FTS). Further developments in FTS were made by a number of researchers: [15–18] and references therein. See also [19] and [20].

In this work, we employ the theorem appearing in [7, p. 552], where the synthesis of bounded controls in the first approximation of a certain general nonlinear system is treated. Our work differs from [7] mainly because we construct a specific control that depends on the equilibrium point \bar{x} , which in turn depends on the parameters of the system α, β and γ . We also describe a certain ellipse “centered” at the equilibrium point \bar{x} , so from every inner point x_0 of this ellipse it is possible to arrive at \bar{x} in finite time $T(x, \bar{x})$. Another important novelty is the fact that in the construction of the bounded control $u(x)$ we use the method proposed in [21]. See also [22] and [23]. The controls



appearing in [21] depend on a parameter (as in (12)) that in turn enables having a family of controls that could solve the synthesis problem.

By Remark 1, $\xi - 1 \neq 0$. Let

$$F := \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi-1} & 0 \\ \frac{(2(\xi-1)^2-\beta)\xi}{\xi-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Clearly, we see that $\det F \neq 0$.

Remark 2. The matrix F can be written as $F = \begin{pmatrix} c^\top \\ c^\top A \end{pmatrix}$, where c is a vector satisfying $(c, b) = 0$ and $(c, Ab) = 1$.

Furthermore, we use the transformation

$$z = Fy \tag{8}$$

to rewrite Eq. (3) in the canonical form

$$\dot{z} = A_0 z + bw + Fg(F^{-1}z) \quad |w| \leq w_1, \tag{9}$$

where

$$p = (p_1, p_2)^\top \tag{10}$$

with $p_1 := -\frac{\gamma(\eta-2(\xi-1)^2\xi^2)}{\eta}$ and $p_2 := \frac{\xi(2(\xi-1)^2\xi-\eta)}{\eta} - \gamma$ and $A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. The new control w has the following form:

$$w := p^\top z + u \tag{11}$$

with the restriction $w \leq w_1$, where

$$w_1 := u_1 - u_2 \sum_{j=1}^2 |p_j|. \tag{12}$$

We assume that $u_2 < \frac{u_1}{\sum_{j=1}^2 |p_j|}$. As in [7], we require that system (9) is considered in the neighborhood

$$Q := \{z : |z_j| \leq u_2\}. \tag{13}$$

Our next step is to construct a positional control $w(z)$ such that $|w| \leq w_1$ and that the trajectory of any initial point $z_0 := (z_1^0, z_2^0)$ belonging to a certain neighborhood of the origin arrives to the origin at finite time $T(z_0)$. To this end, we will use V. I. Korobov's method, which consists of a Lyapunov-type function $\theta(z)$, that is the only positive solution of the following equation:

$$2a_0\theta = (K(\theta)z, z), \tag{14}$$

where

$$K(\theta) := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\theta^3} & -\frac{2}{\theta^2} \\ -\frac{2}{\theta^2} & -\frac{1}{\theta} \end{pmatrix}$$



is a positive matrix for $\theta > 0$. The number a_1 is a negative number such that the matrices K and $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ are both positive definite matrices. In terms of the parameter a_1 , this condition is equivalent to the following inequality:

$$a_1 < -\frac{9}{2}. \tag{15}$$

The number a_0 satisfies the inequality

$$a_0 \leq \frac{w_1^2}{2a_1(a_1 + 3)}. \tag{16}$$

In the frame of Korobov’s method, the positional control $w(z)$ has the form

$$w(z) := \frac{a_1 z_1}{\theta^2(z_1, z_2)} - \frac{3z_2}{\theta(z_1, z_2)}. \tag{17}$$

Recall that in [21] for the linear system $\dot{z} = A_0 z + b w$, a family of bounded positional controls was proposed that exactly stabilized this system at time $T(z_0) = \theta_0$, where θ_0 is the root of Eq. (14) for z_0 .

Let us now rewrite the matrices K and $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ in a more convenient form.

Let $D(\theta) := \begin{pmatrix} \theta^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \theta^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$. Thus, the matrices $K = K(\theta)$ and $\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K$ can be written as follows:

$$D(\theta)K_1D(\theta) = K, \quad \frac{1}{\theta}D(\theta)K_2D(\theta) = \frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K,$$

where

$$K_1 := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} a_1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad K_2 := \frac{1}{4 + a_1} \begin{pmatrix} 4a_1 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

In the sequel, we assume that θ satisfies the inequality $\theta \leq 1$.

Lemma 1. *Let λ_{\min, K_2} be the minimal eigenvalue of the matrix K_2 and C_1 the constant appearing in (6). Thus, the following is valid:*

$$\frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} \leq \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}.$$

Proof. Denote

$$q := D(\theta)z. \tag{19}$$

By using (18) and (19), we then have

$$\begin{aligned} \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} &= \frac{(DK_1Dz, Fg(F^{-1}z))}{\frac{1}{\theta}(DK_2Dz, z)} = \frac{(K_1q, DFg(F^{-1}D^{-1}q))}{\frac{1}{\theta}(K_2q, q)} \leq \\ &\leq \theta C_1 \frac{\|K_1\| \|q\| \|D\| \|F\| \|F^{-1}\| \|D^{-1}\| \|q\|}{\lambda_{\min, K_2} \|q\|^2} = \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \quad \square \end{aligned}$$

The following result gives an estimation of the derivative of the controllability function θ with respect to the system (9).



Theorem 1. Let C_1 , K_1 and λ_{\min, K_2} be as in (6), (18) and the minimal eigenvalues of K_2 , respectively. The following inequality is valid:

$$\dot{\theta} \leq -1 + \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}}. \quad (20)$$

Proof. Let $a := (\frac{a_1}{\theta^2}, \frac{-3}{\theta})^\top$. We take the derivative of Eq. (14) with respect to system (9), and we have

$$\dot{\theta} = \frac{((KA_0 + A_0^\top K + ab^\top K + Kba^\top)z, z)}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)} + 2 \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)}, \quad (21)$$

$$= -1 + 2 \frac{(Kz, Fg(F^{-1}z))}{((\frac{1}{\theta}K - \frac{d}{d\theta}K)z, z)}. \quad (22)$$

The first term of the right side of (21) is equal to -1 because of [21, Equation (2.9)]. Finally, inequality (20) readily follows from (22) and Lemma 1. \square

Notation 2. Let $\hat{\theta} > 0$, $C_2 > 0$ such that for $\theta \leq \hat{\theta}$

$$-1 + \theta \frac{C_1 \|K_1\|}{\lambda_{\min, K_2}} \leq -C_2. \quad (23)$$

Let

$$D_2 := \{z : 0 < \theta(z) < \hat{\theta}\}. \quad (24)$$

Lemma 2. Let inequality (23) holds. Thus, the following inequality is valid:

$$\dot{\theta} \leq -C_2. \quad (25)$$

Moreover, for $z \in D_2$, the time in reaching from z to the origin is estimated by the following inequality:

$$T(z) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \quad (26)$$

Proof. By taking into account (20) and (23), inequality (25) readily follows. To prove (26), one integrates (25) on the trajectory $z = z(t)$ and attains $\theta(z(t)) - \theta_0 \leq -C_2 t$. By using [7, p. 552], we have that $z(T) = 0$, which implies $\theta(z(T)) = 0$. Thus, we obtain (26). \square

Next, to guarantee that the trajectory $x(t)$ starting near the equilibrium point (ξ, η) will not abandon the first quadrant, we rewrite equality (14) in a more convenient form:

$$2a_0\theta^4 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{a_1}{4+a_1} & -\frac{2\theta}{4+a_1} \\ -\frac{2\theta}{4+a_1} & -\frac{\theta^2}{4+a_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

In terms of the variable $y = (y_1, y_2)^\top$, equality (27) is written as $2a_0\theta^4 = (K_3(\theta)y, y)$, where

$$K_3(\theta) := F^\top \begin{pmatrix} \frac{a_1}{4+a_1} & -\frac{2\theta}{4+a_1} \\ -\frac{2\theta}{4+a_1} & -\frac{\theta^2}{4+a_1} \end{pmatrix} F$$

and F as in (7). Let $\lambda_{K_3}^1(\theta)$ and $\lambda_{K_3}^2(\theta)$ be the eigenvalues of $K_3(\theta)$. Note that for fixed positive θ these eigenvalues are positive numbers. Recall from (15) that $a_1 < -\frac{9}{2}$.

The following lemma can be verified by using facts concerning the transformation of the quadratic to a canonical form [24].



Lemma 3. With $\xi > 0, \eta > 0$, let $\bar{x} = (\xi, \eta)$ be an equilibrium point of the system (1), and let K_1 be as in (18). Furthermore, let $(k_{j,\ell})_{j,\ell=1}^2 := K_1$, and the parameter a_0 satisfies (16). Let $\tilde{\theta}$ be the smallest positive value for which the following inequality holds:

$$\max \left\{ \frac{2a_0\theta^4}{\lambda_{K_3}^1(\theta)}, \frac{2a_0\theta^4}{\lambda_{K_3}^2(\theta)} \right\} \leq \min\{\xi, \eta\}.$$

Thus, the interior of the ellipse

$$D_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}(x, \tilde{\theta}, \bar{x}) = 0 \tag{28}$$

belongs to the first quadrant. Here

$$\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) := 2a_0\theta^4 - \sum_{j,\ell=1}^2 k_{j,\ell}\theta^{j+\ell-2}(c, A^{j-1}(x - \bar{x}))(c, A^{\ell-1}(x - \bar{x})). \tag{29}$$

Notation 3. Let Q, D_2 and $D_{\mathcal{E}}$ be as in (13), (24) and (28), respectively. Let

$$D_3 := Q \cap D_2 \cap D_{\mathcal{E}}. \tag{30}$$

Here Q and D_2 are understood in terms of the variable x .

Now we present the main result of our work.

Theorem 2. Let $\bar{x} = (\xi, \eta)$ and $D_{\mathcal{E}}$ be as in Lemma 3. Let A be as in (4), c be as in Remark 2 and $a_1 < -\frac{9}{2}, a_2 = -3$. Furthermore, let p_j for $j = 1, 2$ be as in (10) and suppose that (x_1^0, x_2^0) belongs to the region D_3 . Thus, the control

$$u(x, \bar{x}) = \sum_{j=1}^2 a_j \theta^{j-3}(x - \bar{x})(c, A^{j-1}(x - \bar{x})) - \sum_{j=1}^2 p_j(x - \bar{x})(c, A^{j-1}(x - \bar{x})) \tag{31}$$

satisfies the condition $|u(x)| \leq u_1$ and solves the synthesis problem. The time of motion from $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ to the origin satisfies the following inequality

$$T(x_0, \bar{x}) \leq \frac{\theta_0}{C_2}. \tag{32}$$

Proof. The restriction $|u(x)| \leq u_1$ is verified by employing (11), (12) and the inequality $|w| \leq w_1$. This last inequality is proved in [21, Theorem 3.1]. Inequality (32) follows from Theorem 1 and Lemma 2. \square

Remark 3. For fixed θ , the equation $\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0$ represents an ellipse. Since the control (31) stabilizes the system (1), the trajectory of the system (1) will not leave the ellipse (28) calculated at $\theta = \theta_0$. In turn, θ_0 is the solution of the equation $\mathcal{E}(x, \theta, \bar{x}) = 0$ for $x = x_0$.

Remark 4. We emphasize that the trajectory $x(t)$ under the influence of control $u(x, \bar{x})$ approaches the equilibrium point \bar{x} for $t \rightarrow T = T(x_0, \bar{x})$. For $t > T$, the trajectory stays at the equilibrium point \bar{x} .



3. GRAPH OF THE TRAJECTORY AND CONTROL

To plot the graph of the trajectory $x(t)$ from a given initial point (x_1^0, x_2^0) , as well as the control $u(x(t))$ and the controllability function $\theta(x(t))$, we have added a differential equation for the variable θ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + \alpha}, \\ \dot{x}_2 &= \gamma \left(1 - \frac{x_2}{\beta x_1} x_2 \right) + u(x_1, x_2), \\ \dot{\theta} &= -1 + 2\psi(x, \theta, \bar{x}), \end{aligned} \tag{33}$$

with initial conditions $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ and $\theta(0) = \theta_0$. Here θ_0 is the root of (29). Moreover,

$$\psi(x, \theta, \bar{x}) := \frac{(D(\theta)K_1D(\theta)(x - \bar{x}), Fg(F^{-1}(x - \bar{x})))}{\frac{1}{\theta}(D(\theta)K_2D(\theta)(x - \bar{x}), (x - \bar{x}))}.$$

Let us remark that the initial point (x_1^0, x_2^0) should belong to the region D_3 (30).

Example

Let $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1081}{900}$, $\gamma = 1$ and $u_1 = 5$. The equilibrium point $\bar{x} = (\xi, \eta)$ is equal to $(\frac{9}{10}, \frac{1081}{1000})$. The vector p is equal to $(-\frac{5324}{5405}, -\frac{20377}{10810})$, $w_1 = 1$, $a_1 = -6$ and by (12), $2a_0 = \frac{1}{18}$. The positional control has the form

$$u(x, \bar{x}) = -\frac{\frac{3243}{50} - \frac{1081x_1}{15}}{\theta^2} - \frac{\frac{3189x_1}{100} + 3x_2 - \frac{3993}{125}}{\theta} + \frac{79841879x_1}{9729000} + \frac{31187x_2}{10810} - \frac{14084927}{1351250}$$

with $\theta = \theta(x - \bar{x})$.

The function $\psi(x, \theta, \bar{x})$ is given by $\psi(x, \theta, \bar{x}) = \frac{\text{num}(x, \bar{x})}{\text{den}(x, \bar{x})}$, where

$$\begin{aligned} \text{num}(x, \bar{x}) &:= x_3 (648600y_1 (10810y_1^3 + 18539y_1^2 + (114229 - 900y_2) y_1 + 9190y_2) x_1 \times \\ &\quad \times (y_1 (3189x_3 - 10810) + 300y_2x_3) - (1034192700y_1^5 + 2821255660y_1^4 - \\ &\quad - 9(31187000y_2 - 1414988103) y_1^3 + 4(20250000y_2^2 + 112867650y_2 + 2774668507) y_1^2 + \\ &\quad + 90y_2(1620000y_2 - 14579147) y_1 + 875610000y_2^2) x_3 (y_1 (9567x_3 - 21620) + 900y_2x_3)), \\ \text{den}(x, \bar{x}) &:= \frac{3243}{50} (100y_1^2 + 180y_1 + 1081) x_1 (46742440000y_1^2 - 1945800y_1x_3 (10630y_1 + \\ &\quad + 1000x_2 - 1081) + 27x_3^2 (10630y_1 + 1000x_2 - 1081)^2) \end{aligned}$$

with $y_1 = x_1 - \frac{9}{10}$ and $y_2 = x_2 - \frac{1081}{1000}$.

With the initial conditions $x_1^0 = 1$ and $x_2^0 = \frac{1}{2}$, the graph in Fig. 1 shows the trajectories of $x_1(t)$ and $x_2(t)$, while in Fig. 2 the system phase portrait is displayed.

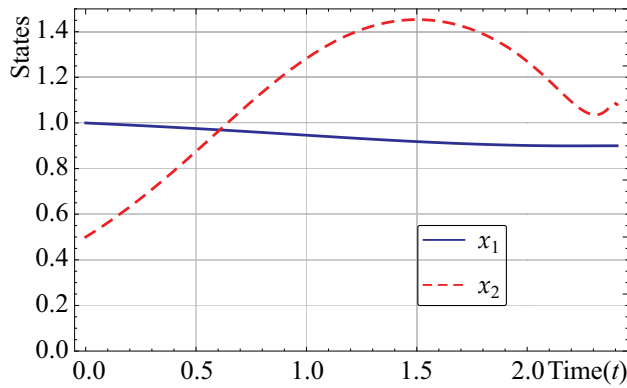


Fig. 1. Trajectories of $x_1(t)$ and $x_2(t)$

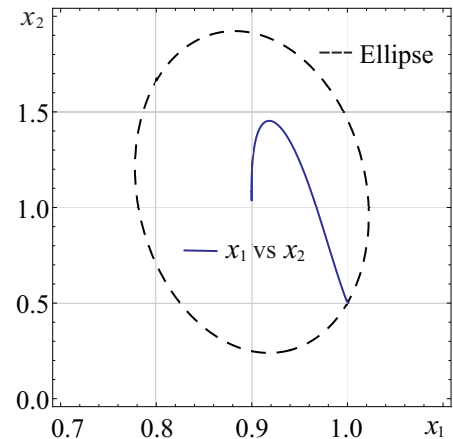


Fig. 2. System phase portrait $x_1(t)$ vs $x_2(t)$ and the corresponding ellipse

Fig. 3 shows the controllability function θ on the trajectory $x(t)$. The graph of the positional control u on the trajectory $x(t)$ is as shown in Fig. 4.

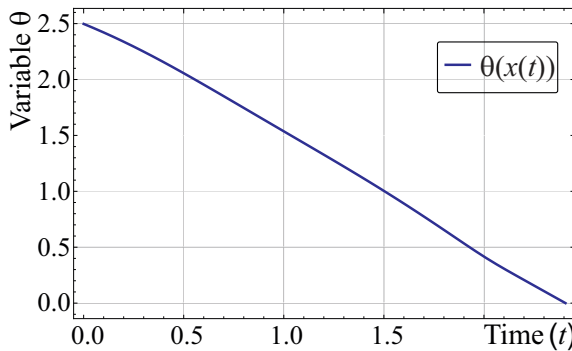


Fig. 3. The controllability function time evolution

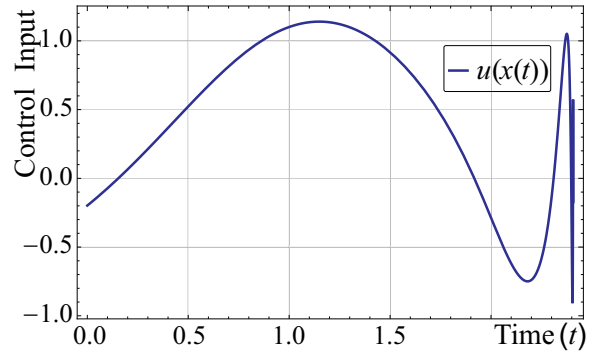


Fig. 4. The positional control input

By using Wolfram Mathematica, we have calculated that the time of arriving from x_0 to \bar{x} is $T(x_0, \bar{x}) = 2.407427$ and that $x_1(T) = \xi$ and $|x_2(T) - \eta| \leq 1.06063 \times 10^{-9}$.

The corresponding ellipse for the equilibrium point $(\frac{9}{10}, \frac{1081}{1000})$ is given by the equality

$$\frac{\theta^4}{18} - \frac{1}{2}\theta^2 y_2^2 + \left(-\frac{1129969\theta^2}{20000} + \frac{1149103\theta}{4500} - \frac{1168561}{2700} \right) y_1^2 + \left(\frac{1081\theta}{45} - \frac{1063\theta^2}{100} \right) y_1 y_2 = 0$$

for $\theta = 2.497329$ and $y_1 = x_1 - \frac{9}{10}$ and $y_2 = x_2 - \frac{1081}{1000}$.

To the best of the authors' knowledge, no control methodologies have been applied to this system, which considers two main features: achieving finite-time convergence with a bounded control input.

CONCLUSIONS

We have presented a family of explicit bounded controls that stabilize the predator – prey system (1) in finite time. An ellipse depending on the parameters of the system (1) and the equilibrium point is given. The translation of any initial point $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ to the equilibrium point \bar{x} is guaranteed if x_0 belongs to this ellipse, which in turn is located in the first quadrant of \mathbb{R}^2 : the initial point satisfies the conditions $x_1^0 > 0$ and $x_2^0 \geq 0$.



References

1. Collings J. B. The effects of the functional response on the bifurcation behavior of a mite predator – prey interaction model. *Journal of Mathematical Biology*, 1997, vol. 36, iss. 2, pp. 149–168. <https://doi.org/10.1007/s002850050095>
2. Li Y., Xiao D. Bifurcations of a predator – prey system of Holling and Leslie types. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, vol. 34, iss. 2, pp. 606–620. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.068>
3. Jiang J., Song Y. Stability and bifurcation analysis of a delayed Leslie – Gower predator – prey system with nonmonotonic functional response. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, vol. 2013, Article ID 152459. <https://doi.org/10.1155/2013/152459>
4. Gakkhar S., Singh A. Complex dynamics in a prey predator system with multiple delays. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, vol. 17, iss. 2, pp. 914–929. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.05.047>
5. Leslie P., Gower J. The properties of a stochastic model for the predator – prey type of interaction between two species. *Biometrika*, 1960, vol. 47, iss. 3–4, pp. 219–234. <https://doi.org/10.1093/biomet/47.3-4.219>
6. Pielou E. C. *An Introduction to Mathematical Ecology*. New York, Wiley-Interscience, 1969. 294 p.
7. Korobov V. I. A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem. *Matematicheskii Sbornik (N. S.)*, 1979, vol. 109, no. 4 (8), pp. 582–606 (in Russian). English transl.: *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1980, vol. 37, no. 4, pp. 535–557. <https://doi.org/10.1070/SM1980v037n04ABEH002094>
8. Korobov V. I. *Controllability Function Method*. Moscow, Izhevsk, Institut komp’uternykh issledovaniy, 2007. 576 p. (in Russian).
9. Korobov V. I., Skoryk V. O. Construction of restricted controls for a non-equilibrium point in global sense. *Vietnam Journal of Mathematics*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 459–469. <https://doi.org/10.1007/s10013-015-0132-4>
10. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, vol. 46, iss. 23, pp. 140–145. <https://doi.org/10.3182/20130904-3-FR-2041.00043>
11. Korobov V. I., Sklyar G. M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 11, pp. 1422–1431.
12. Korobov V. I., Korotyaeva Y. V. Feedback control design for systems with x -discontinuous right-hand side. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2011, vol. 149, pp. 494–512. <https://doi.org/10.1007/s10957-011-9800-z>
13. Singh A. Stabilization of prey predator model via feedback control. In: J. Cushing, M. Saleem, H. Srivastava, M. Khan, M. Merajuddin, eds. *Applied Analysis in Biological and Physical Sciences*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 186. Springer, New Delhi, 2016, pp. 177–186. https://doi.org/10.1007/978-81-322-3640-5_10
14. Kamenkov G. On stability of motion over a finite interval of time. *Akad. Nauk SSSR. Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1953, vol. 17, pp. 529–540 (in Russian).
15. Weiss L., Infante E. F. Finite time stability under perturbing forces and product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. 12, iss. 1, pp. 54–59. <https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098483>
16. LaSalle J., Letfshetz S. *Stability by Liapunov’s Direct Method with Applications*. New York, London, Academic Press, 1961. 134 p.
17. Dorato P., Weiss L., Infante E. Comment on “Finite-time stability under perturbing forces



- and on product spaces”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. 12, iss. 3, pp. 340–340. <https://doi.org/10.1109/TAC.1967.1098569>
18. Dorato P. An Overview of Finite-Time Stability. In: L. Menini, L. Zaccarian, C. T. Abdallah, eds. *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*. Systems and Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, 2006, pp. 185–194. https://doi.org/10.1007/0-8176-4470-9_10
 19. Bath S. P., Berstein D. S. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. *Proceedings of 1995 American Control Conference – ACC’95*. Seattle, WA, USA, 1995, vol. 3, pp. 1831–1832. <https://doi.org/10.1109/ACC.1995.531201>
 20. Poznyak A. S., Polyakov A. Y., Strygin V. V. Analysis of finite-time convergence by the method of Lyapunov functions in systems with second-order sliding modes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 75, iss. 3, pp. 289–303. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.07.006>
 21. Choque Rivero A. E., Korobov V. I., Skoryk V. O. The controllability function as the time of motion. I. *Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry], 2004, vol. 11, no. 2, pp. 208–225 (in Russian). English transl.: <https://arxiv.org/abs/1509.05127>
 22. Choque Rivero A. E., Korobov V. I., Skoryk V. O. The controllability function as the time of motion. II. *Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry], 2004, vol. 11, no. 3, pp. 341–354 (in Russian).
 23. Choque Rivero A. E. The controllability function method for the synthesis problem of a nonlinear control system. *International Review of Automatic Control*, 2008, vol. 1, no. 4, pp. 441–445.
 24. Yefimov N. A. *Quadratic Forms and Matrices: An Introduction Approach*. New York, London, Academic Press, 1964. 164 p.

Поступила в редакцию / Received 02.03.2020

Принята к публикации / Accepted 05.05.2020

Опубликована / Published 01.03.2021

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 88–99
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 88–99

Научная статья

УДК 519.862.6

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-88-99>

Многокритериальный подход к построению моделей парно-множественной линейной регрессии

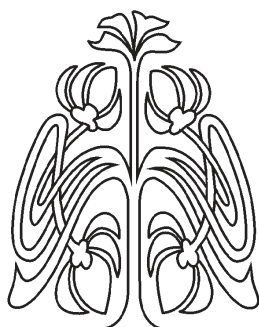
М. П. Базилевский

Иркутский государственный университет путей сообщения, Россия, 664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, д. 15

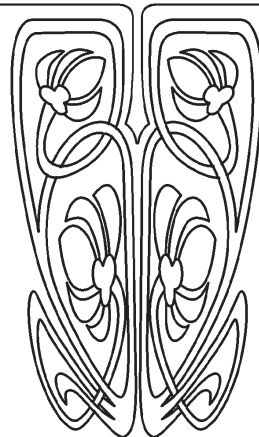
Базилевский Михаил Павлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, mik2178@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

Аннотация. Рассматривается модель парно-множественной линейной регрессии, представляющая собой синтез регрессии Деминга и модели множественной линейной регрессии. Показано, что с изменением типа минимизируемого расстояния модель парно-множественной регрессии плавно «трансформируется» из модели парной в модель множественной линейной регрессии. При этом модели парно-множественной регрессии сохраняют возможности интерпретации коэффициентов и прогнозирования значений объясняемой переменной. Предложен агрегированный критерий качества регрессионных моделей, основанный на четырех известных показателях: коэффициенте детерминации, коэффициенте Дарбина – Уотсона, согласованности поведения и средней относительной ошибки аппроксимации. С помощью этого критерия задача многокритериального построения модели парно-множественной линейной регрессии формализована в виде задачи нелинейного программирования. Разработан алгоритм ее приближенного решения. Результаты данной работы могут быть использованы для улучшения суммарных качественных характеристик моделей множественной линейной регрессии.

Ключевые слова: регрессия Деминга, модель парно-множественной линейной регрессии, многокритериальный подход, агрегированный критерий, нелинейное программирование



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Для цитирования: Базилевский М. П. Многокритериальный подход к построению моделей парно-множественной линейной регрессии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 88–99. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-88-99>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-88-99>

Multi-criteria approach to pair-multiple linear regression models constructing

M. P. Bazilevskiy

Irkutsk State Transport University, 15 Chernyshevskogo St., Irkutsk 664074, Russia

Mikhail P. Bazilevskiy, mik2178@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

Abstract. A pair-multiple linear regression model which is a synthesis of Deming regression and multiple linear regression model is considered. It is shown that with a change in the type of minimized distance, the pair-multiple regression model transforms smoothly from the pair model into the multiple linear regression model. In this case, pair-multiple regression models retain the ability to interpret the coefficients and predict the values of the explained variable. An aggregated quality criterion of regression models based on four well-known indicators: the coefficient of determination, Darbin – Watson, the consistency of behaviour and the average relative error of approximation is proposed. Using this criterion, the problem of multi-criteria construction of a pair-multiple linear regression model is formalized as a nonlinear programming problem. An algorithm for its approximate solution is developed. The results of this work can be used to improve the overall qualitative characteristics of multiple linear regression models.

Keywords: Deming regression, pair-multiple linear regression model, multi-criteria approach, aggregate criterion, nonlinear programming

For citation: Bazilevskiy M. P. Multi-criteria approach to pair-multiple linear regression models constructing. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 88–99 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-88-99>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Регрессионный анализ [1–4] является признанным инструментом исследования влияния одной или нескольких объясняющих переменных на объясняемую переменную. В большинстве случаев регрессионные модели оцениваются с помощью метода наименьших квадратов (МНК) в предположении, что объясняющие переменные не содержат ошибок. Если же в этих переменных содержатся ошибки, то такие модели в зарубежной литературе принято называть «Errors-In-Variables models» (EIV-модели) или «measurement error models» [5–7]. Для оценивания EIV-моделей к настоящему времени разработан весьма мощный математический аппарат [8–10]. Однако практического применения EIV-модели почти не находят, потому что они не пригодны для точечного прогнозирования и возникают проблемы с их



интерпретацией. Исключением является регрессия Деминга [11, 12], которая нашла широкое применение в клинической химии [13, 14] и связанных областях.

В работе [15] автор синтезировал регрессию Деминга и модель множественной линейной регрессии. Полученный в результате синтез моделей сохраняет способности интерпретации оценок параметров и прогнозирования значений объясняемой переменной. В работе [16] для разработанного синтеза исследованы зависимости некоторых критериев адекватности от соотношения дисперсий ошибок переменных. При этом экспериментально установлено, что применение предложенного синтеза позволяет существенно повысить некоторые важные характеристики классической модели множественной линейной регрессии за счет незначительного снижения ее аппроксимационного качества. Целью данной работы является формализация многокритериального подхода к построению разработанного синтеза моделей в виде задач нелинейного программирования и разработка приближенных методов их решения.

Стоит отметить, что работа выполнена в рамках логико-алгебраического подхода к обработке статистических данных, при котором предполагается, что никаких априорных сведений об их вероятностной природе нет, поэтому не изучаются традиционные свойства оценок параметров – несмещенность, состоятельность и эффективность.

1. МОДЕЛЬ ПАРНО-МНОЖЕСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим предложенный в работах [15, 16] синтез регрессии Деминга и модели множественной линейной регрессии.

Пусть $y_i, x_{i1}, i = \overline{1, n}$ — наблюдаемые значения объясняемой и объясняющей переменной y и x_1 , а $y_i^*, x_{i1}^*, i = \overline{1, n}$ — их неизвестные «истинные» значения. Предположим, что между переменными y^* и x_1^* имеет место линейная функциональная зависимость

$$y_i^* = \alpha + \beta x_{i1}^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где α, β — неизвестные параметры.

Наблюдаемые и «истинные» значения переменных y и x_1 связаны соотношениями

$$x_{i1} = x_{i1}^* + \varepsilon_i^{(x_1)}, \quad y_i = y_i^* + \varepsilon_i^{(y)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_i^{(y)}, \varepsilon_i^{(x_1)}, i = \overline{1, n}$ — ошибки переменных y и x_1 , которые могут быть вызваны, например, неточностями при измерении значений переменных. Никаких априорных сведений об этих ошибках нет.

Совокупность уравнений (1), (2) представляет собой простейшую EIV-модель — регрессию Деминга. Для ее оценивания будем использовать метод наименьших полных квадратов (МНПК), состоящий в минимизации функционала:

$$F(\alpha, \beta, x_{11}^*, \dots, x_{n1}^*) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_{i1}^*)^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n (x_{i1} - x_{i1}^*)^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $\lambda = \sigma_{\varepsilon^{(x_1)}}^2 / \sigma_{\varepsilon^{(y)}}^2$ — положительное число, задающее тип расстояния от точек $(x_{i1}, y_i), i = \overline{1, n}$ до линии регрессии (1) [15]. Так, при $\lambda \rightarrow 0$ будет минимизироваться сумма квадратов вертикальных расстояний, при $\lambda \rightarrow 1$ — евклидовых расстояний, а при $\lambda \rightarrow \infty$ — горизонтальных расстояний.

Задача (3) имеет следующее аналитическое решение:

$$\tilde{\beta} = \frac{D_y - \lambda^{-1} D_{x_1} + \sqrt{(D_y - \lambda^{-1} D_{x_1})^2 + 4\lambda^{-1} K_{x_1 y}^2}}{2K_{x_1 y}}, \quad \tilde{\alpha} = \bar{y} - \tilde{\beta} \bar{x}_1,$$



$$\tilde{x}_{i1}^* = \frac{-\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \tilde{\beta}y_i + \lambda^{-1}x_{i1}}{\lambda^{-1} + \tilde{\beta}^2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{x}_{i1}^* , $i = \overline{1, n}$ — оценки параметров; D_{x_1} , D_y — дисперсии переменных; K_{x_1y} — ковариация.

Тогда оценки «истинных» значений объясняемой переменной y находятся по формулам

$$\tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\tilde{x}_{i1}^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Рассмотрим, как меняются оценки (5) при варьировании параметра λ .

1. В соответствии с (4), $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{\text{МНК}}$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}}$, где $\tilde{\beta}^{\text{МНК}} = \frac{K_{x_1y}}{D_{x_1}}$, $\tilde{\alpha}^{\text{МНК}} = \bar{y} - \frac{K_{x_1y}}{D_{x_1}}\bar{x}_1$ — МНК-оценки модели парной линейной регрессии y от x_1 , а $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{x}_{i1}^* = x_{i1}$, $i = \overline{1, n}$. Тогда из (5) следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}}x_{i1}$, $i = \overline{1, n}$, т.е. оценки «истинных» значений объясняемой переменной y при $\lambda \rightarrow 0$ стремятся к ее расчетным по модели парной линейной регрессии y от x_1 значениям.

2. Аналогично пределы $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{\beta} = \frac{D_y}{K_{x_1y}}$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{\alpha} = \bar{y} - \frac{D_y}{K_{x_1y}}\bar{x}_1$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i1}^* = -\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} + \frac{1}{\tilde{\beta}}y_i$, $i = \overline{1, n}$. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{y}_i^* = y_i$, $i = \overline{1, n}$, т.е. оценки «истинных» значений объясняемой переменной y при $\lambda \rightarrow \infty$ стремятся к ее наблюдаемым значениям.

Таким образом, варьирование значений параметра λ от 0 до ∞ приводит к изменению оценок \tilde{y}_i^* от $(\tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}}x_{i1})$ до y_i , $i = \overline{1, n}$.

Дополним переменную x_1 совокупностью объясняющих переменных x_2, x_3, \dots, x_m , наблюдаемые значения которых x_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{2, m}$. Для исследования влияния переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ на переменную \tilde{y}^* введем модель множественной линейной регрессии:

$$\tilde{y}_i^* = d_0 + \sum_{j=1}^m d_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

где d_0, d_1, \dots, d_m — неизвестные параметры; ε_i , $i = \overline{1, n}$ — ошибки модели, присутствие которых в уравнениях (6) означает, что данная связь описывает процесс не точно, а с некоторой погрешностью.

Для оценивания модели (6) с помощью МНК необходимо решить оптимизационную задачу:

$$G(d_0, \dots, d_m) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (\tilde{y}_i^* - d_0 - \sum_{j=1}^m d_j x_{ij})^2 \rightarrow \min.$$

Поскольку $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}}x_{i1}$, $i = \overline{1, n}$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} G(d_0, \dots, d_m) = \sum_{i=1}^n (\tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}}x_{i1} - d_0 - \sum_{j=1}^m d_j x_{ij})^2.$$

Из этого следует, что задача $\lim_{\lambda \rightarrow 0} G(d_0, \dots, d_m) \rightarrow \min$ имеет решение: $\tilde{d}_0 = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}}$, $\tilde{d}_1 = \tilde{\beta}^{\text{МНК}}$, $\tilde{d}_j = 0$, $j = \overline{2, m}$. При этом $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 0$.



Так как $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{y}_i^* = y_i, i = \overline{1, n}$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(d_0, \dots, d_m) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - d_0 - \sum_{j=1}^m d_j x_{ij} \right)^2.$$

Отсюда следует, что задача $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(d_0, \dots, d_m) \rightarrow \min$ имеет решение при $\tilde{d}_j = \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}}, j = \overline{0, m}$, где $\tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}}, j = \overline{0, m}$ – МНК-оценки модели множественной линейной регрессии y от x_1, x_2, \dots, x_m .

Пусть оцененная с помощью МНК модель (6) имеет вид

$$\tilde{y}^* = \tilde{d}_0 + \sum_{j=1}^m \tilde{d}_j x_j, \tag{7}$$

где $\tilde{y}_i^*, i = \overline{1, n}$ – расчетные значения переменной \tilde{y}^* . Тогда с учетом вышесказанного $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}} x_{i1}$, а $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}} + \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}} x_{ij}, i = \overline{1, n}$, т.е. при $\lambda \rightarrow 0$ уравнение (7) принимает вид однофакторной, а при $\lambda \rightarrow \infty$ – многофакторной зависимости.

Используем переменную \tilde{y}^* в качестве инструмента для получения прогнозных значений объясняемой переменной y . Для этого введем модель парной линейной регрессии:

$$y_i = a + b \tilde{y}_i^* + u_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где a, b – неизвестные параметры; $u_i, i = \overline{1, n}$ – ошибки модели.

МНК-оценки модели (8) являются результатом решения оптимизационной задачи:

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \tilde{y}_i^*)^2 \rightarrow \min.$$

Рассмотрим МНК-оценки модели (8) при $\lambda \rightarrow 0$ и при $\lambda \rightarrow \infty$.

1. Если $\lambda \rightarrow 0$, то $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}} x_{i1}, i = \overline{1, n}$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b(\tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}} x_{i1}))^2.$$

Из этого следует, что задача $\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(a, b) \rightarrow \min$ имеет решение при $b(\tilde{\beta}^{\text{МНК}}) = \tilde{\beta}^{\text{МНК}}, a + b(\tilde{\alpha}^{\text{МНК}}) = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}}$, откуда $\tilde{b} = 1, \tilde{a} = 0$.

2. Если $\lambda \rightarrow \infty$, то $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}} + \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}} x_{ij}, i = \overline{1, n}$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \left(\tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}} + \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}} x_{ij} \right))^2.$$

Следовательно, задача $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Q(a, b) \rightarrow \min$ имеет решение при $b(\tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}}) = \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}}, a + b(\tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}}) = \tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}}$, поэтому $\tilde{b} = 1, \tilde{a} = 0$.



Таким образом, с увеличением параметра λ от 0 до ∞ оцениваемая с помощью МНК модель (8) плавно «трансформируется» из парной $\tilde{y} = \tilde{\alpha}^{\text{МНК}} + \tilde{\beta}^{\text{МНК}}x_1$ во множественную $\tilde{y} = \tilde{\alpha}_0^{\text{МНК}} + \sum_{j=1}^m \tilde{\alpha}_j^{\text{МНК}}x_j$ регрессию. Тогда (8) можно справедливо назвать моделью парно-множественной линейной регрессии. Варьируя значения параметра λ , для парно-множественной регрессии можно получить бесчисленное множество различных и не изучавшихся ранее оценок.

С учетом (7) модель (8) представляет собой множественную регрессию вида $y_i = a + b(\tilde{d}_0 + \sum_{j=1}^m \tilde{d}_j x_{ij}) + u_i, i = \overline{1, n}$, т.е. с ограничениями на параметры. Это

означает, что сумма квадратов ее ошибок $\sum_{i=1}^n u_i^2$ для любого значения λ не меньше, чем сумма квадратов ошибок оцененной с помощью МНК модели множественной линейной регрессии y от x_1, x_2, \dots, x_m .

Заметим, что в рассмотренном случае при построении (8) первым шагом было оценивание параметров регрессии Деминга зависимости переменной y от x_1 . Однако вместо переменной x_1 можно использовать любую другую объясняющую переменную из набора x_2, x_3, \dots, x_m . Естественно, что при этом будут получены абсолютно другие результаты оценивания парно-множественной линейной регрессии (8).

Отметим также, что модели парно-множественной регрессии для любого значения λ сохраняют возможности интерпретации коэффициентов и прогнозирования значений переменной y .

2. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Перейдем к формализации многокритериального подхода к построению моделей парно-множественной линейной регрессии (8). Для этого можно использовать, например, следующие известные критерии адекватности [17]:

R^2 — коэффициент детерминации, характеризующий аппроксимационное качество модели и принимающий значения от 0 до 1;

DW — критерий Дарбина–Уотсона, характеризующий степень автокорреляции ошибок модели, а также уровень коинтеграции во временных рядах и принимающий значения от 0 до 4;

SP — критерий согласованности поведения (СП-критерий) [17], характеризующий согласованность поведения фактических и расчетных траекторий изменения переменной y и принимающий значения от $(1 - n)$ до $(n - 1)$;

E — средняя относительная ошибка аппроксимации, так же, как и R^2 , характеризующая аппроксимационное качество модели и принимающая значения от 0 до ∞ .

Идеальными значениями для R^2, DW, SP и E являются 1, 2, $(n - 1)$ и 0 соответственно.

Понятно, что для модели (8) эти четыре критерия зависят от параметра λ , поэтому будем обозначать их $R^2(\lambda), DW(\lambda), SP(\lambda)$ и $E(\lambda)$. Введем их нормированные аналоги:

$$K_1(\lambda) = 1 - R^2(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (9)$$



$$K_2(\lambda) = 0.5|2 - DW(\lambda)| = 0.5 \left| 2 - \frac{\sum_{i=2}^n (u_i - u_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n u_i^2} \right|, \quad (10)$$

$$K_3(\lambda) = 0.5 \left(1 - \frac{SP(\lambda)}{n-1} \right) = 0.5 \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \text{sign}(y_{i+1} - y_i) \text{sign}(y_{i+1} - y_i + u_i - u_{i+1})}{n-1} \right), \quad (11)$$

$$K_4(\lambda) = 0.01E(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{u_i}{y_i} \right|, \quad (12)$$

где $u_i, i = \overline{1, n}$ — ошибки модели (8) в зависимости от λ .

Очевидно, что область значений каждого из критериев $K_1(\lambda), K_2(\lambda), K_3(\lambda)$ лежит в интервале от 0 до 1. При этом чем ближе значение $K_1(\lambda), K_2(\lambda)$ или $K_3(\lambda)$ к 0, тем выше качество модели. Для критерия $K_4(\lambda)$ наилучшим значением также является 0, однако область его возможных значений не ограничена сверху.

Тогда об общем качестве модели парно-множественной линейной регрессии (8) в зависимости от параметра λ можно судить по значению агрегированного критерия:

$$S(\lambda) = w_1 K_1(\lambda) + w_2 K_2(\lambda) + w_3 K_3(\lambda) + w_4 K_4(\lambda),$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 — некоторые положительные весовые коэффициенты, которые в случае отсутствия приоритетов критериев можно задать равными. Идеальным значением этого критерия является 0.

Задача 1. Пусть дана объясняемая переменная y и совокупность объясняющих переменных x_1, x_2, \dots, x_m . Требуется выбрать такое значение параметра λ модели парно-множественной регрессии (8), оцениваемой на основе регрессии Деминга y от $x_h, h \in \{1, 2, \dots, m\}$, для которого

$$S(\lambda) = w_1 K_1(\lambda) + w_2 K_2(\lambda) + w_3 K_3(\lambda) + w_4 K_4(\lambda) \rightarrow \min. \quad (13)$$

Формализуем поставленную задачу в виде задачи математического программирования. Первый этап оценивания парно-множественной регрессии предполагает оценивание регрессии Деминга y от x_h , поэтому по аналогии с формулами (4), (5) введем ограничения:

$$\tilde{\beta} = \frac{D_y - \lambda^{-1} D_{x_h} + \sqrt{(D_y - \lambda^{-1} D_{x_h})^2 + 4\lambda^{-1} K_{x_h y}^2}}{2K_{x_h y}}, \quad \tilde{\alpha} = \bar{y} - \tilde{\beta} \bar{x}_h, \quad (14)$$

$$\tilde{x}_{i,h}^* = \frac{-\tilde{\alpha} \tilde{\beta} + \tilde{\beta} y_i + \lambda^{-1} x_{i,h}}{\lambda^{-1} + \tilde{\beta}^2}, \quad \tilde{y}_i^* = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \tilde{x}_{i,h}^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Так как параметр $\lambda > 0$, то введем ограничение

$$Small \leq \lambda \leq Large, \quad (16)$$

где $Small, Large$ — малое и большое положительные числа.



На втором шаге с помощью МНК по формуле $(X^T X)^{-1} X^T \tilde{y}^*$, где X — матрица наблюдаемых значений объясняющих переменных, находятся оценки модели (6). Тогда справедливы ограничения

$$\sum_{j=0}^m z_{1,j+1} \tilde{d}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^*, \quad \sum_{j=0}^m z_{k,j+1} \tilde{d}_j = \sum_{i=1}^n x_{i,k-1} \tilde{y}_i^*, \quad k = \overline{2, m+1}, \quad (17)$$

где z_{ij} , $i = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1, m+1}$ — элементы матрицы $Z = X^T X$.

На третьем шаге с помощью МНК находятся оценки модели (8), удовлетворяющие условиям

$$n\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^* = \sum_{i=1}^n y_i, \quad \tilde{\alpha} \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^* + \tilde{\beta} \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^{*2} = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{y}_i^*. \quad (18)$$

Ошибки парно-множественной регрессии (8) находятся по формулам

$$u_i = y_i - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(\tilde{d}_0 + \sum_{j=1}^m \tilde{d}_j x_{ij})), \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Тогда решение задачи нелинейного программирования (13) с ограничениями (7), (9)–(12), (14)–(19) позволяет определить оптимальное по рассмотренным четырем критериям адекватности значение параметра λ модели парно-множественной линейной регрессии (8). При этом если в функционале (13) $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = w_4 = 0$, то решением данной задачи будут оценки модели множественной линейной регрессии при $\lambda = Large$.

Задача 2. Пусть исследователь не знает, какую именно переменную из набора x_1, x_2, \dots, x_m следует включить в спецификацию регрессии Деминга, чтобы обеспечить наилучшее качество модели парно-множественной регрессии по критерию (13). Тогда требуется выбрать из этого набора такую переменную для регрессии Деминга и такое значение параметра λ , чтобы минимизировать критерий (13).

Введем бинарные переменные δ_j , $j = \overline{1, m}$, по правилу

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j\text{-я переменная не входит в регрессию Деминга,} \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие ограничения:

$$\delta_j \in \{0, 1\}, \quad \sum_{j=1}^m \delta_j = 1. \quad (20)$$

При такой постановке задачи константы D_{x_h} , $K_{x_h, y}$, $\overline{x_h}$ станут переменными, для которых

$$D_{x_h} = \sum_{j=1}^m \delta_j D_{x_j}, \quad K_{x_h, y} = \sum_{j=1}^m \delta_j K_{x_j, y}, \quad \overline{x_h} = \sum_{j=1}^m \delta_j \overline{x_j}. \quad (21)$$

Тогда решение задачи (13) с ограничениями (7), (9)–(12), (14)–(21) дает ответы сразу на два вопроса: какую переменную из набора x_1, x_2, \dots, x_m нужно использовать на первом шаге построения парно-множественной регрессии, и каково при этом значение параметра λ .



3. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для точного решения задачи нелинейного программирования (13), (7), (9)–(12), (14)–(21) с булевыми переменными можно воспользоваться любым современным оптимизационным программным обеспечением, например программой ARMonitor. Вместе с тем существует возможность получения приближенного решения данной задачи. Для этого разработан алгоритм, представленный на рисунке.

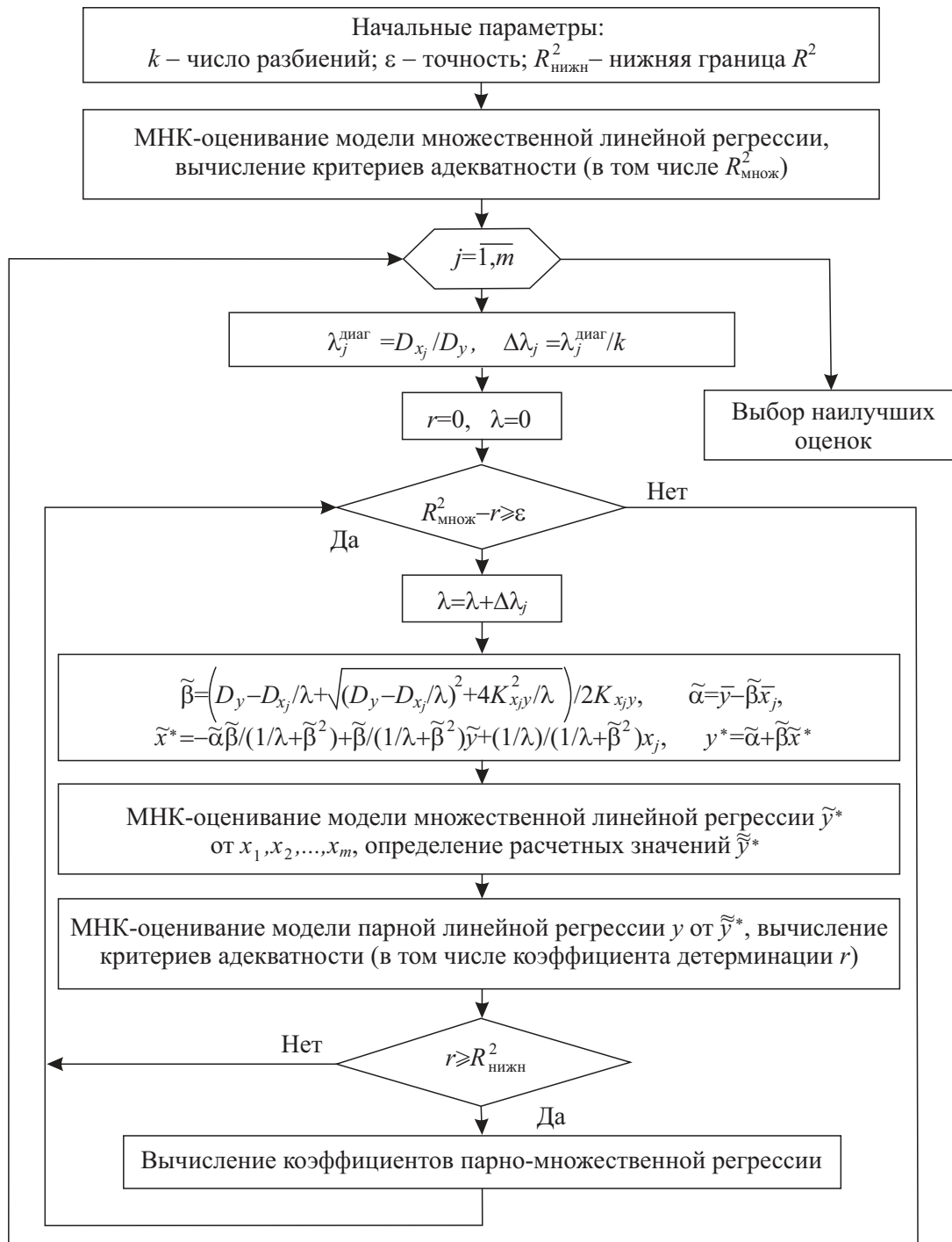


Рис. Алгоритм поиска приближенного решения задачи
Fig. Algorithm for finding an approximate solution to the problem



Суть алгоритма заключается в том, чтобы разбить интервал $\lambda \in [Small, Large]$ точками, а затем обычным перебором этих точек и переменных x_1, x_2, \dots, x_m определить наилучшее решение задачи. Главной проблемой при разработке алгоритма являлось то, что было не понятно, как нужно разбивать интервал $\lambda \in [Small, Large]$. Если это делать равномерно, то, поскольку $Large$ — большое положительное число, в полученных точках оценки парно-множественной регрессии могут быть не представительными, т.е. существенно не отличаться от оценок множественной регрессии. Для решения этой проблемы в алгоритме была реализована следующая последовательность действий. Сначала для регрессии Деминга y от $x_j, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, значение параметра λ находится по формуле $\lambda_j = \frac{D_{x_j}}{D_y}$, т.е. как для диагональной регрессии [16]. В этой точке оценки парно-множественной регрессии существенно отличаются от оценок множественной регрессии. Затем отрезок $\lambda \in [Small, \lambda_j^{diag}]$ равномерно разбивается k точками, находится шаг разбиения $\Delta\lambda_j = \frac{\lambda_j^{diag}}{k}$. После чего на отрезке $\lambda \in [\lambda_j^{diag}, Large]$ в цикле с шагом $\Delta\lambda_j$ продолжают генерироваться новые точки до тех пор, пока на очередной итерации разница между коэффициентами детерминации множественной $R_{множ}^2$ и парно-множественной регрессий r не станет меньше наперед заданной точности ε .

Стоит отметить, что в алгоритме на рисунке предусмотрено задание ограничения $R_{нижн}^2$ на коэффициент детерминации парно-множественной регрессии, т.е. при $r < R_{нижн}^2$ модель не будет принимать участия в процедуре выбора наилучших оценок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена модель парно-множественной линейной регрессии, представляющая собой синтез регрессии Деминга и модели множественной линейной регрессии. Задача многокритериального построения парно-множественной регрессии формализована в виде задачи нелинейного программирования. Разработан алгоритм для приближенного решения этой задачи.

Результаты данной работы в дальнейшем будут использованы при реализации методики многокритериального выбора регрессионных моделей, известной в отечественной литературе как «конкурс» моделей.

Список литературы

1. *Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G.* Introduction to Linear Regression Analysis. Wiley, 2012. 672 p.
2. *Kleinbaum D. G., Kupper L. L., Nizam A., Rosenberg E. S.* Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods. Cengage Learning, 2013. 1072 p.
3. *Harrell Jr., Frank E.* Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis. Springer Series in Statistics, 2015. 582 p.
4. *Kuhn M., Johnson K.* Applied Predictive Modeling. Springer, 2018. 600 p.
5. *Gillard J.* An overview of linear structural models in errors in variables regression // REVSTAT – Statistical Journal. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 57–80.
6. *Xu K., Ma Y., Wang L.* Instrument assisted regression for errors in variables models with binary response // Scandinavian Journal of Statistics. 2015. Vol. 42, iss. 1. P. 104–117. <https://doi.org/10.1111/sjos.12097>



7. Rudelson M., Zhou S. Errors-in-variables models with dependent measurements // *Electronic Journal of Statistics*. 2017. Vol. 11, № 1. P. 1699–1797. <https://doi.org/10.1214/17-EJS1234>
8. Gospodinov N., Komunjer I., Ng S. Simulated minimum distance estimation of dynamic models with errors-in-variables // *Journal of Econometrics*. 2017. Vol. 200, iss. 2. P. 181–193. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2017.06.004>
9. Soderstrom T., Soverini U. Errors-in-variables identification using maximum likelihood estimation in the frequency domain // *Automatica*. 2017. Vol. 79. P. 131–143. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.016>
10. Bianco A. M., Spano P. M. Robust estimation in partially linear errors-in-variables models // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2017. Vol. 106. P. 46–64. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.09.002>
11. Deming W. E. *Statistical Adjustment of Data*. Wiley, 1943. 273 p.
12. Wu C., Yu J. Z. Evaluation of linear regression techniques for atmospheric applications: The importance of appropriate weighting // *Atmospheric Measurement Techniques*. 2018. Vol. 11. P. 1233–1250. <https://doi.org/10.5194/amt-11-1233-2018>
13. Henderson C. M., Shulman N. J., MacLean B., MacCoss M. J., Hoofnagle A. N. Skyline performs as well as vendor software in the quantitative analysis of serum 25-hydroxy vitamin D and vitamin D binding globulin // *Clinical Chemistry*. 2018. Vol. 64, iss. 2. P. 408–410. <https://doi.org/10.1373/clinchem.2017.282293>
14. Reverter-Branchat G., Bosch J., Vall J., Farre M., Papaseit E., Pichini S., Segura J. Determination of recent growth hormone abuse using a single dried blood spot // *Clinical Chemistry*. 2016. Vol. 62, iss. 10. P. 1353–1360. <https://doi.org/10.1373/clinchem.2016.257592>
15. Базилевский М. П. Синтез модели множественной линейной регрессии и регрессии Деминга // *Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : материалы II Всероссийской научной конференции с международным участием : в 2 ч. Тольятти, 2019. Ч. 1. С. 64–69.*
16. Базилевский М. П. Синтез модели множественной линейной регрессии и регрессии Деминга: исследование зависимостей оценок параметров и критериев адекватности от соотношения дисперсий ошибок переменных // *Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами : электрон. науч. журнал*. 2019. № 2. С. 18–25. URL: <http://ismm-irgups.ru/toma/23-2019> (дата обращения: 19.06.2019).
17. Носков С. И., Базилевский М. П. Построение регрессионных моделей с использованием аппарата линейно-булевого программирования. Иркутск : ИрГУПС, 2018. 176 с.

References

1. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. *Introduction to Linear Regression Analysis*. Wiley, 2012. 672 p.
2. Kleinbaum D. G., Kupper L. L., Nizam A., Rosenberg E. S. *Applied Regression Analysis and Other Multivariable Methods*. Cengage Learning, 2013. 1072 p.
3. Harrell Jr., Frank E. *Regression Modeling Strategies: With Applications to Linear Models, Logistic and Ordinal Regression, and Survival Analysis*. Springer Series in Statistics, 2015. 582 p.
4. Kuhn M., Johnson K. *Applied Predictive Modeling*. Springer, 2018. 600 p.
5. Gillard J. An overview of linear structural models in errors in variables regression. *REVSTAT – Statistical Journal*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 57–80.
6. Xu K., Ma Y., Wang L. Instrument assisted regression for errors in variables models with binary response. *Scandinavian Journal of Statistics*, 2015, vol. 42, iss. 1, pp. 104–117. <https://doi.org/10.1111/sjos.12097>



7. Rudelson M., Zhou S. Errors-in-variables models with dependent measurements. *Electronic Journal of Statistics*, 2017, vol. 11, no. 1, pp. 1699–1797. <https://doi.org/10.1214/17-EJS1234>
8. Gospodinov N., Komunjer I., Ng S. Simulated minimum distance estimation of dynamic models with errors-in-variables. *Journal of Econometrics*, 2017, vol. 200, iss. 2, pp. 181–193. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2017.06.004>
9. Soderstrom T., Soverini U. Errors-in-variables identification using maximum likelihood estimation in the frequency domain. *Automatica*, 2017, vol. 79, pp. 131–143. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.01.016>
10. Bianco A. M., Spano P. M. Robust estimation in partially linear errors-in-variables models. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2017, vol. 106, pp. 46–64. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.09.002>
11. Deming W. E. *Statistical Adjustment of Data*. Wiley, 1943. 273 p.
12. Wu C., Yu J. Z. Evaluation of linear regression techniques for atmospheric applications: The importance of appropriate weighting. *Atmospheric Measurement Techniques*, 2018, vol. 11, pp. 1233–1250. <https://doi.org/10.5194/amt-11-1233-2018>
13. Henderson C. M., Shulman N. J., MacLean B., MacCoss M. J., Hoofnagle A. N. Skyline performs as well as vendor software in the quantitative analysis of serum 25-hydroxy vitamin D and vitamin D binding globulin. *Clinical Chemistry*, 2018, vol. 64, iss. 2, pp. 408–410. <https://doi.org/10.1373/clinchem.2017.282293>
14. Reverter-Branchat G., Bosch J., Vall J., Farre M., Papaseit E., Pichini S., Segura J. Determination of recent growth hormone abuse using a single dried blood spot. *Clinical Chemistry*, 2016, vol. 62, iss. 10, pp. 1353–1360. <https://doi.org/10.1373/clinchem.2016.257592>
15. Bazilevskiy M. P. Synthesis of the multiple linear regression and deming regression model. *Informatsionnye tekhnologii v modelirovanii i upravlenii: podkhody, metody, resheniya: materialy II Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Information Technologies in Modeling and Management: Approaches, Methods, Solutions: Materials of the II All-Russian Scientific Conference with International Participation: in 2 pt.]. Tolyatti, 2019, pt. 1, pp. 64–69 (in Russian).
16. Bazilevskiy M. P. Synthesis of multiple linear regression and Deming regression model's: investigation the dependences of parameter estimates and adequacy criteria on the ratio of variance error variables. *Informacionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnyimi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2019, no. 2, pp. 18–25 (in Russian). Available at: <http://ismm-irgups.ru/toma/23-2019> (accessed 19 June 2019).
17. Noskov S. I., Bazilevskiy M. P. *Postroyenie regressionnykh modeley s ispol'zovaniem apparata lineino-bulevogo programirovaniya* [Construction of Regression Models Using Linear Boolean Programming]. Irkutsk, IrGUPS, 2018. 176 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 11.11.2019

Принята к публикации / Accepted 07.10.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 100–110
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 100–110

Научная статья

УДК 519.872

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110>

Выходящий поток RQ-системы $M|GI|1$ асимптотически рекуррентный

И. Л. Лапатын[✉], А. А. Назаров

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Лапатын Иван Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики, ilapatin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1198-2113>

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, nazarov.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

Аннотация. Большинство работ, рассматривающих модели с повторными вызовами, посвящены исследованию (численному, имитационному, асимптотическому) числа заявок в системе или в источнике повторных вызовов. Хотя одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой. Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов. В работе рассматривается однолинейная система с повторными вызовами, на вход которой поступает простейший поток событий. Время обслуживания заявок на приборе случайное с произвольной функцией распределения $B(x)$. Если заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени. Объектом исследования является выходящий поток данной системы. Выходящий поток характеризуется распределением вероятностей числа заявок, закончивших обслуживание за некоторое время t . Исследование проводится методом асимптотического анализа при условии большой задержки заявок на орбите. В работе показано, что выходящий поток RQ-системы $M|GI|1$ является асимптотически рекуррентным. При этом длины интервалов в нем представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Результаты численного эксперимента показали, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

Ключевые слова: RQ-система, выходящий поток, рекуррентный поток, метод асимптотического анализа

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).



Для цитирования: Лапатын И. Л., Назаров А. А. Выходящий поток RQ-системы M|GI|1 асимптотически рекуррентный // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 100–110. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110>

Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process

I. L. Lapatin[✉], A. A. Nazarov

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Ivan L. Lapatin, ilapatin@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1198-2113>

Anatoly A. Nazarov, nazarov.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

Abstract. Most of the studies on models with retrials are devoted to the research of the number of applications in the system or in the source of repeated calls using asymptotic and numerical approaches or simulation. Although one of the main characteristics that determines the quality of the communication system is the number of applications served by the system per unit of time. Information on the characteristics of the output processes is of great practical interest, since the output process of one system may be incoming to another. The results of the study of the outgoing flows of queuing networks are widely used in the modeling of computer systems, in the design of data transmission networks and in the analysis of complex multi-stage production processes. In this paper, we have considered a single server system with redial, the input of which receives a stationary Poisson process. The service time in considered system is a random value with an arbitrary distribution function $B(x)$. If the customer enters the system and finds the server busy, it instantly joins the orbit and carries out a random delay there during an exponentially distributed time. The object of study is the output process of this system. The output is characterized by the probability distribution of the number of customers that have completed service for time t . We have provided the study using asymptotic analysis method under low rate of retrials limit condition. We have shown in the paper that the output of retrial queue M|GI|1 is an asymptotical renewal process. Moreover, the lengths of the intervals in output process are the sum of an exponential random value with the parameter $\lambda + \kappa$ and a random variable with the distribution function $B(x)$. The results of a numerical experiment show that the probability distributions of the number of served customers in the system are practically the same for significantly different distribution laws $B(x)$ of service time if the service times have the same first two moments.

Keywords: retrial queue, output process, renewal process, asymptotic analysis method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00277).

For citation: Lapatin I. L., Nazarov A. A. Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 100–110 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



ВВЕДЕНИЕ

Классические модели массового обслуживания [1] возникли, прежде всего, как инструмент анализа для принятия решения в управлении производством. При этом природа моделируемых процессов может быть весьма разнообразной (например, ожидания студентами консультации у своего профессора или обслуживание договоров страховой компании). При этом выделяли два основных класса моделей — системы с ожиданием и системы с потерями.

Но быстрое развитие информационных технологий привело к тому, что возникла необходимость моделировать работу телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и других, при функционировании которых используют различные модификации протоколов случайного множественного доступа. Для моделирования подобных процессов применяют еще один класс моделей массового обслуживания с повторными вызовами, или RQ-системы (Retrial Queueing System). Характерной чертой таких систем является наличие повторных обращений заявок к обслуживающему прибору (ресурсу) спустя некоторое случайное время после неудачной попытки обслуживания. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок, но некоторыми техническими причинами.

Первые работы по схожим моделям появились еще в середине XX в. [2], но основная часть работ приходится на последние десятилетия. Детальное описание RQ-систем и обзор классических результатов их исследования представлены в монографиях [3, 4]. На текущий момент существуют различные модификации дисциплин обслуживания в RQ-системах, которые позволяют более адекватно моделировать различные процессы в прикладных задачах. Например, в работах [5, 6] рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками, в которых сервер обрабатывает как входящие, так и вызываемые заявки.

Большинство работ, рассматривающих модели с повторными вызовами, посвящено исследованию (численному, имитационному, асимптотическому) числа заявок в системе или в источнике повторных вызовов. Хотя одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой. Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов.

Изучению выходящих потоков уделяется недостаточно внимания, так как на сегодняшний день не существует общих подходов к их исследованию. Характеристики выходящего потока напрямую зависят от функционирования самой системы, что увеличивает размерность решаемой задачи и усложняет аналитические исследования.

Основные результаты по аналитическому исследованию выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны в середине XX в. [7–9]. Анализ выходящего потока в системах с циклическим обслуживанием можно найти в [10], в работе [11] рассматривается выходящий поток однолинейной системы коррелированным входящим потоком. Более подробный обзор по выходящим потокам можно найти в работе [12].

В [13] получено асимптотическое распределение числа событий выходящего



потока в классической RQ-системе с простейшим входящим потоком. В данной работе предлагается исследование выходящего потока более общей модели RQ-системы с произвольным распределением времени обслуживания поступающих заявок.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ , после чего делает попытку занять прибор.

Обозначим: $i(t)$ — число заявок в системе в момент времени t ; $k(t)$ — состояние прибора: 0 — прибор свободен, 1 — прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; $z(t)$ — остаточное время обслуживания заявки на приборе, т. е. продолжительность интервала от момента времени t до окончания времени обслуживания заявки; данная компонента имеет смысл только для $k(t) = 1$; $m(t)$ — число событий в выходящем потоке, наступивших за время t .

Рассмотрим марковский процесс $\{k(t) = 0, i(t), m(t)\}$, $\{k(t) = 1, i(t), z(t), m(t)\}$ с переменным числом компонент. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = 0, i(t) = i, m(t) = m\} = P_0(i, m, t),$$

$$P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z, m(t) = m\} = P_1(i, z, m, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda + i\sigma)P_0(i, m, t) + \frac{\partial P_1(i + 1, 0, m - 1, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_1(i, z, m, t)}{\partial t} &= -\lambda P_1(i, z, m, t) + \frac{\partial P_1(i, z, m, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i, 0, m, t)}{\partial z} + \\ &+ \lambda P_0(i - 1, m, t)B(z) + \lambda P_1(i - 1, z, m, t) + i\sigma P_0(i, m, t)B(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$,

$$H_0(u_1, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{jum} P_0(i, m, t),$$

$$H_1(u_1, z, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{jum} P_1(i, z, m, t).$$

Тогда систему (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial t} &= -\lambda H_0(u_1, u, t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial u_1} + e^{-ju_1} e^{ju} \frac{\partial H_1(u_1, 0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_1(u_1, z, u, t)}{\partial t} &= \lambda e^{ju_1} H_0(u_1, u, t)B(z) - j\sigma \frac{\partial H_0(u_1, u, t)}{\partial u_1} B(z) + \\ &+ \frac{\partial H_1(u_1, z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u_1, 0, u, t)}{\partial z} + \lambda(e^{ju_1} - 1)H_1(u_1, z, u, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная система (2) полностью описывает функционирование RQ-системы M|GI|1, включая выходящий поток. Применяя условие согласованности для нахождения маргинальных распределений, из данной системы можно получать характеристики процессов $k(t)$, $i(t)$ и $m(t)$.



2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА RQ-СИСТЕМЫ M/GI/1

Систему (2) дифференциальных уравнений в частных производных будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

Для этого обозначим $\sigma = \varepsilon$ и в системе (2) сделаем замены

$$u_1 = \varepsilon w, \quad H_0(u_1, u, t) = F_0(w, u, t, \varepsilon), \quad H_1(u_1, z, u, t) = F_1(w, z, u, t, \varepsilon),$$

тогда система (2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(w, u, t, \varepsilon)}{\partial t} &= -\lambda F_0(w, u, t, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, u, t, \varepsilon)}{\partial w} + e^{-j\varepsilon w} e^{ju} \frac{\partial F_1(w, 0, u, t, \varepsilon)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(w, z, u, t, \varepsilon)}{\partial t} &= \lambda e^{j\varepsilon w} F_0(w, u, t, \varepsilon) B(z) - j \frac{\partial F_0(w, u, t, \varepsilon)}{\partial w} B(z) + \\ &+ \frac{\partial F_1(w, z, u, t, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, u, t, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) F_1(w, z, u, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3)$$

Результаты асимптотического решения полученной системы (3) сформулированы в леммах и теореме.

Лемма 1. Пусть $i(t)$ — число заявок в RQ-системе M/GI/1, функционирующей в стационарном режиме, тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F_0(w, 0, t, \varepsilon) + F_1(w, \infty, 0, t, \varepsilon)\} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i(t)} = e^{jw\kappa}, \quad (4)$$

где κ определяется формулой

$$\kappa = \frac{\lambda^2 b}{1 - \lambda b}, \quad (5)$$

в которой b имеет смысл среднего времени обслуживания заявок

$$b = \int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx.$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы необходимо в системе (3) положить $u = 0$, что уберет из рассмотрения процесс $m(t)$. Полученную систему для процессов $\{k(t) = 0, i(t)\}$, $\{k(t) = 1, i(t), z(t)\}$ необходимо рассмотреть в стационарном режиме, что позволит уйти от производных по времени.

Обозначая $F_0(w, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_0(w, 0, t, \varepsilon)$, $F_1(w, z, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_1(w, z, 0, t, \varepsilon)$, получим систему

$$\begin{aligned} -\lambda F_0(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} &= 0, \\ \lambda e^{j\varepsilon w} F_0(w, \varepsilon) B(z) - j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} B(z) + \\ + \frac{\partial F_1(w, z, \varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} + \lambda(e^{j\varepsilon w} - 1) F_1(w, z, \varepsilon) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$



Добавим в (6) еще одно уравнение. Для этого сложим два уравнения этой системы и устремим $z \rightarrow \infty$, обозначая $F_1(w, \varepsilon) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(w, z, \varepsilon)$, запишем

$$\lambda(F_0(w, \varepsilon) + F_1(w, \varepsilon)) - e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_1(w, 0, \varepsilon)}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Теперь в системе (6), (7) сделаем предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ с соответствующим переобозначением функций

$$-\lambda F_0(w) + jF_0'(w) + \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} = 0,$$

$$\lambda F_0(w)B(z) - jF_0'(w)B(z) + \frac{\partial F_1(w, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\lambda(F_0(w) + F_1(w)) - \frac{\partial F_1(w, 0)}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Решение системы (8), (9) будем искать в виде

$$F_0(w) = R_0\Phi(w), \quad F_1(w, z) = R_1(z)\Phi(w), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} F_1(w, z) = F_1(w) = R_1\Phi(w).$$

Подставляя эти равенства в (8), (9) и разделив на $\Phi(w)$, получим

$$-\lambda R_0 + jR_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + R_1'(0) = 0,$$

$$R_1'(z) - R_1'(0) - jR_0 \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} B(z) + \lambda R_0 B(z) = 0, \quad (10)$$

$$\lambda - R_1'(0) = 0. \quad (11)$$

Заметим, что $\{R_0, R_1\}$ является распределением вероятностей состояний прибора, т. е. процесса $k(t)$, а $R_1(z) = P\{k(t) = 1, z(t) < z\}$. Поскольку w содержится только в отношении $\Phi'(w)/\Phi(w)$, то оно является константой, а это означает, что сама функция $\Phi(w)$ имеет вид экспоненты:

$$\Phi(w) = e^{j\kappa w}, \quad \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = j\kappa.$$

Теперь подставим записанные равенства и (11) в систему (10), затем решим дифференциальное уравнение относительно $R_1(z)$ и устремим $z \rightarrow \infty$, тогда получим

$$-(\lambda + \kappa)R_0 - \lambda = 0, \quad R_1 = \lambda \int_0^\infty (1 - B(x))dx = \lambda b.$$

Сложим данные уравнения и, учитывая, что $R_0 + R_1 = 1$, получим явное выражение для κ :

$$\kappa = \frac{\lambda^2 b}{1 - \lambda b},$$

совпадающее с (5). Лемма доказана. □



Перед формулировкой теоремы, содержащей основные результаты работы, сформулируем и докажем еще одну лемму. Для удобства будем использовать некоторые обозначения процессов и функций, совпадающие с уже введенными в работе, хотя в общем случае они могут не совпадать.

Рассмотрим рекуррентный поток, длины интервалов между моментами наступления событий в котором являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром α и случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Функционирование такого потока можно описать марковским процессом с переменным числом компонент $\{k(t) = 0, m(t)\}$, $\{k(t) = 1, z(t), m(t)\}$. Здесь $k(t)$ — номер фазы рекуррентного потока: 0 — фаза с экспоненциальным распределением, 1 — фаза с функцией распределения $A(x)$, после окончания которой наступает событие потока; $z(t)$ — остаточное время пребывания на последней фазе, т.е. продолжительность интервала от момента времени t до наступления события потока; данная компонента имеет смысл только для $k(t) = 1$; $m(t)$ — число событий в рассматриваемом потоке, наступивших за время t .

Для описанного процесса можно записать распределения вероятностей

$$\begin{aligned} P\{k(t) = 0, m(t) = m\} &= P_0(m, t), \\ P\{k(t) = 1, z(t) < z, m(t) = m\} &= P_1(z, m, t) \end{aligned} \quad (12)$$

и ввести частичные характеристические функции

$$H_0(u, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P_0(m, t), \quad H_1(z, u, t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P_1(i, z, m, t). \quad (13)$$

Лемма 2. Пусть длины интервалов между моментами наступления событий в некотором рекуррентном потоке являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром α и случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Тогда система уравнений для частичных характеристических функций (13), описывающих распределение вероятностей числа наступивших событий в этом потоке, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t} &= -\alpha H_0(u, t) + e^{ju} \frac{\partial H_1(0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_1(z, u, t)}{\partial t} &= \alpha H_0(u, t) A(z) + \frac{\partial H_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Для распределения вероятностей (12) запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(m, t)}{\partial t} &= -\alpha P_0(m, t) + \frac{\partial P_1(0, m-1, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_1(z, m, t)}{\partial t} &= \alpha P_0(m, t) A(z) + \frac{\partial P_1(z, m, t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(0, m, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (15)$$

Домножая каждое уравнение системы (14) на e^{jum} и суммируя по m , получим систему для частичных характеристических функций (13)

$$\frac{\partial H_0(u, t)}{\partial t} = -\alpha H_0(u, t) + e^{ju} \frac{\partial H_1(0, u, t)}{\partial z},$$



$$\frac{\partial H_1(z, u, t)}{\partial t} = \alpha H_0(u, t)A(z) + \frac{\partial H_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(0, u, t)}{\partial z},$$

которая совпадает с системой (14). Лемма доказана. \square

Результаты лемм 1, 2 нам будут необходимы для доказательства основной теоремы.

Теорема. Пусть $m(t)$ — число событий в выходящем потоке, наступивших за время t в RQ-системе $M|GI|1$. Тогда в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$) асимптотическое распределение вероятностей значений процесса $m(t)$ совпадает с распределением вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Здесь λ — интенсивность входящего потока, κ — нормированное среднее число заявок в системе, которое определяется формулой (5).

Доказательство. Обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_0(w, u, t, \varepsilon) = F_0(w, u, t), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1(w, z, u, t, \varepsilon) = F_1(w, z, u, t)$$

и сделаем предельный переход в системе (3). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(w, u, t)}{\partial t} &= -\lambda F_0(w, u, t) + j \frac{\partial F_0(w, u, t)}{\partial w} + e^{ju} \frac{\partial F_1(w, 0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(w, z, u, t)}{\partial t} &= \lambda F_0(w, u, t)B(z) - j \frac{\partial F_0(w, u, t)}{\partial w} B(z) + \\ &+ \frac{\partial F_1(w, z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w, 0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение системы (16) будем искать в виде

$$F_0(w, u, t) = \Phi(w)F_0(u, t), \quad F_1(w, z, u, t) = \Phi(w)F_1(z, u, t). \quad (17)$$

Здесь функция $\Phi(w)$ имеет смысл асимптотического приближения характеристической функции числа заявок в системе в условии большой задержки на орбите. Подставляя (17) в систему (16) и разделив обе части уравнений на $\Phi(w)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(u, t)}{\partial t} &= -\lambda F_0(u, t) + j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + e^{ju} \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial t} &= \lambda F_0(u, t)B(z) - j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} B(z) + \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (18)$$

В лемме 1 доказано, что $\Phi(w) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} M e^{jw\sigma i(t)} = e^{jw\kappa}$, где κ имеет смысл нормированного среднего числа заявок в системе и определяется формулой (5). В этом случае из (18) получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(u, t)}{\partial t} &= -(\lambda + \kappa)F_0(u, t) + e^{ju} \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial t} &= (\lambda + \kappa)F_0(u, t)B(z) + \frac{\partial F_1(z, u, t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0, u, t)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (19)$$



Система (18) совпадает по виду с системой (14), где $\alpha = \lambda + \kappa$ и $A(x) = B(x)$. Соответственно, выходящий поток RQ-системы M|GI|1 в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$), определяемый функциями $F_0(u, t)$ и $F_1(z, u, t)$, является рекуррентным, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Теорема доказана. \square

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Теорема не только показывает принадлежность выходящего потока системы M|GI|1 к классу рекуррентных при выполнении асимптотического условия большой задержки заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$), но и определяет распределение длин интервалов в этом потоке через параметры системы.

Длины интервалов являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. То есть функция распределения длины интервала определяется как свертка функций $1 - e^{-(\lambda+\kappa)x}$ и $B(x)$.

Зная функцию распределения длин интервалов для рекуррентного потока, можно воспользоваться известными результатами (например [14]) для нахождения асимптотического и допредельного распределения вероятностей числа событий, наступивших в потоке за некоторое время t .

С другой стороны, поскольку в нашем случае распределение длин интервалов имеет определенную структуру, описываемую системой (18), можно с помощью интегральных преобразований решить эту систему, затем, применяя обратное преобразование Фурье, получить распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке за некоторое время t .

Распределения находились для различных параметров системы и законов распределения времени обслуживания заявок. Анализ полученных результатов численного эксперимента показал, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

В частности, пусть $B_1(x)$ — гамма-распределение с параметром формы s и параметром масштаба β , а $B_2(x) = 1 - e^{-\rho x^2}$ — распределение Релея. Возьмем $\beta = s = 3.66$ и $\rho = 0.786$, что обеспечит равенство двух первых моментов для этих распределений, при этом среднее равно 1.

В таблице приведены расстояния Колмогорова

$$\Delta(t) = \max_{0 \leq i \leq \infty} \left| \sum_{n=0}^i (P_1(n, t) - P_2(n, t)) \right|$$

между распределениями $P_1(i, t)$ и $P_2(i, t)$ числа событий рекуррентного потока, длины интервалов которого являются суммой экспоненциальной случайной величины

Таблица / Table

Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ / Kolmogorov distance $\Delta(t)$

$\gamma \backslash t$	1	5	10	20	50
0.1	0.00057	0.00003	0.00002	0.00005	0.00005
1	0.00200	0.00200	0.00100	0.00064	0.00064
10	0.01900	0.00900	0.00800	0.00500	0.00200



с параметром $\gamma = \lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ соответственно.

Из данных таблицы видно, что даже при увеличении γ , что соответствует уменьшению вклада экспоненциально распределенного первого одинакового слагаемого в общую длину интервалов в рассматриваемых потоках, расстояние Колмогорова остается незначительным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрен выходящий поток RQ-системы M|GI|1 при асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Доказано, что выходящий поток является асимптотически рекуррентным.

При этом длины интервалов его представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Результаты численного эксперимента показали, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В. Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд. Москва : ЛКИ, 2007. 400 с.
2. Wilkinson R. I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. Vol. 35, № 2. P. 421–507.
3. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer, 2008. 318 p.
4. Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London : Chapman and Hall, 1997. 320 p.
5. Artalejo J. R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, № 4. P. 1811–1822. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.022>
6. Nazarov A., Paul S., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. Budapest, Hungary : ECMS, 2017. P. 687–693. <https://dx.doi.org/10.7148/2017-0687>
7. Burke P. J. The output of queueing systems // Operations Research. 1956. Vol. 4, iss. 6. P. 629–753. <https://doi.org/10.1287/opre.4.6.699>
8. Reich E. Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics. 1957. Vol. 28, № 3. P. 768–773.
9. Finch P. D. The output process of the queueing system M|G|1 // Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological). 1959. Vol. 21, iss. 2. P. 375–380. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1959.tb00344.x>
10. Пройдакова Е. В., Федоткин М. А. Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 96–106.
11. Green D. Departure Processes from MAP/PH/1 Queues. Thesis (Ph. D.), University of Adelaide, Department of Applied Mathematics, 1999. 12 p.
12. Лапатин И. Л. Исследование выходящих потоков моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Томский государственный университет. Томск, 2012. 138 с.



13. Лapatин И. Л., Назаров А. А. Исследование выходящего потока в RQ-системе M/M/1 в асимптотическом условии большой задержки на орбите // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) : материалы XXI Международной научной конференции. Москва : Издательство РУДН, 2018. С. 246–253.
14. Лопухова С. В., Назаров А. А. Исследование рекуррентного потока // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 67–76.

References

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to Queuing Theory]. Moscow, LKI, 2007. 400 p. (in Russian).
2. Wilkinson R. I. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 1956, vol. 35, no. 2, pp. 421–507.
3. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin, Springer, 2008. 318 p.
4. Falin G., Templeton J. *Retrial Queues*. London, Chapman and Hall, 1997. 320 p.
5. Artalejo J. R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 1811–1822. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.022>
6. Nazarov A., Paul S., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. Budapest, Hungary, ECMS, 2017, pp. 687–693. <https://doi.org/10.7148/2017-0687>
7. Burke P. J. The output of queueing systems. *Operations Research*, 1956, vol. 4, iss. 6, pp. 629–753. <https://doi.org/10.1287/opre.4.6.699>
8. Reich E. Waiting times when queues are in tandem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1957, vol. 28, no. 3, pp. 768–773.
9. Finch P. D. The output process of the queueing system M|G|1. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1959, vol. 21, iss. 2, pp. 375–380. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1959.tb00344.x>
10. Projdakova E. V., Fedotkin M. A. Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 6, pp. 993–1002. <https://doi.org/10.1134/S000511790806009X>
11. Green D. *Departure processes from MAP/PH/1 queues*. Thesis (Ph. D.), University of Adelaide, Department of Applied Mathematics, 1999. 12 p.
12. Lapatin I. L. *Issledovanie vykhodiashchikh potokov modelei massovogo obsluzhivaniia s neogranichennym chislom priborov* [Investigation of output process queueing models with an unlimited number of devices]. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.), Tomsk State University. Tomsk, 2012. 138 p. (in Russian).
13. Lapatin I. L., Nazarov A. A. Investigation of output process RQ system M/M/1 in the asymptotic condition of a large delay in orbit. *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2018)*: Proceedings of the XXI International Scientific Conference. Moscow, Izdatel'stvo RUDN, 2018, pp. 246–252 (in Russian).
14. Lopuchova S. V., Nazarov A. A. Research of general independent process. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2007, no. 1, pp. 67–76 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.11.2019

Принята к публикации / Accepted 20.02.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–124
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 111–124

Научная статья

УДК 519.872

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124>

Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

А. А. Назаров, С. В. Пауль[✉], О. Д. Лизюра

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, nazarov.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

Пауль Светлана Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, paulsv82@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3681-0676>

Лизюра Ольга Дмитриевна, студент магистратуры кафедры теории вероятностей и математической статистики, oliztsu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4463-4876>

Аннотация. В работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-система) с марковски модулированным пуассоновским потоком (MMPP) на входе и разнотипными вызываемыми заявками. Заявки, поступившие в систему, занимают прибор для обслуживания, если он свободен, или отправляются на орбиту, где осуществляют случайную задержку перед следующей попыткой занять прибор. Длительность задержки имеет экспоненциальное распределение. Особенностью данной системы является наличие вызываемых заявок нескольких типов. Интенсивности вызывания заявок различны для разных типов вызываемых заявок. Длительности обслуживания вызываемых заявок также различаются в зависимости от типа и являются экспоненциальными случайными величинами, параметры которых в общем случае не совпадают. Прибор вызывает заявки извне, только когда не обслуживает поступившие из потока заявки. Работа посвящена исследованию такой системы методом асимптотического анализа в двух предельных условиях: высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок. Целью исследования является нахождение предельного стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе, поступивших из потока, без учета вызываемой заявки, если она обслуживается на приборе. Получены асимптотические характеристические функции числа поступивших заявок в системе в вышеназванных предельных условиях. В предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе с повторными вызовами и разнотипными вызываемыми заявками является характеристической функцией гауссовской случайной величины. Однозначно определен вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в исследуемой системе в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок.

Ключевые слова: RQ-система, поступающие заявки, вызываемые заявки, метод асимптотического анализа

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).



Для цитирования: Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–124. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124>

Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls

A. A. Nazarov, S. V. Paul[✉], O. D. Lizyura

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Anatoly A. Nazarov, nazarov.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2091-6011>

Svetlana V. Paul, paulsv82@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3681-0676>

Olga D. Lizyura, oliztsu@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4463-4876>

Abstract. In this paper, we consider a single server retrial queue MMPP|M|1 with two way communication and multiple types of outgoing calls. Calls received by the system occupy the device for operating, if it is free, or are sent to orbit, where they make a random delay before the next attempt to occupy the device. The duration of the delay has an exponential distribution. The main issue of this model is an existence of various types of outgoing calls in the system. The intensity of outgoing calls is different for different types of outgoing calls. The operating time of the outgoing calls also differs depending on the type and is exponential random variable, the parameters of which in the general case do not coincide. The device generates calls from the outside only when it does not operate the calls received from the flow. We use asymptotic analysis methods under two limit conditions: high rate of outgoing calls and low rate of serving outgoing calls. The aim of the current research is to derive an asymptotic stationary probability distribution of the number of incoming calls in the system that arrived from the flow, without taking into account the outgoing call if it is operated on the device. In this paper, we obtain asymptotic characteristic function under aforementioned limit conditions. In the limiting condition of high intensity of outgoing calls, the asymptotic characteristic function of the number of incoming calls in a system with repeated calls and multiple types of outgoing calls is a characteristic function of a Gaussian random variable. The type of the asymptotic characteristic function of the number of incoming calls in the system under study in the limiting condition of long-term operation of the outgoing calls is uniquely determined.

Keywords: retrial queue, Markov modulated Poisson process, incoming calls, outgoing calls, asymptotic analysis method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00277).

For citation: Nazarov A. A., Paul S. V., Lizyura O. D. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 111–124 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



ВВЕДЕНИЕ

RQ-системы (Retrial Queueing system) характеризуются следующей отличительной особенностью: заявка, заставшая прибор занятым при поступлении в систему, уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, после чего повторяет попытку занять прибор. RQ-системы являются адекватными моделями телекоммуникационных систем, компьютерных сетей и реальных объектов. В монографиях [1, 2] приводятся обширные исследования таких моделей.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров изложено в работах [3, 4].

RQ-системы с вызываемыми заявками активно изучаются в последнее время [5–7]. В упомянутых выше работах исследуются RQ-системы с вызываемыми заявками и различными их модификациями. Модель RQ-системы с несколькими типами вызываемых заявок рассмотрена в [8]. Для такой модели был получен численный алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

В данной работе в качестве метода исследования рассматриваемых моделей применяется метод асимптотического анализа. В работах [9, 10] метод асимптотического анализа предложен для исследования RQ-систем $M|M|1$ и $MMPP|M|1$ с вызываемыми заявками, тогда как в данной работе рассматривается модель с разнотипными вызываемыми заявками.

1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, т. е. систему массового обслуживания с повторными вызовами, на вход которой поступает марковски модулированный пуассоновский поток заявок (MMPP). Заявки, поступающие в систему из потока, занимают прибор для обслуживания и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1 , если прибор свободен. Если поступившая заявка застаёт прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки имеет экспоненциальное распределение с параметром σ .

Когда прибор свободен, он вызывает заявку извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n . Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n . Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до $N + 1$.

Пусть $i(t)$ — число заявок в системе в момент времени t , поступивших из потока, т. е. без учета вызванной заявки, если она обслуживается на приборе. Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, поэтому введем дополнительный процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t , принимая значения: 0, если прибор свободен; 1, если обслуживается поступившая из потока заявка; n , если обслуживается вызываемая заявка типа n . Также введем процесс $m(t)$ — цепь Маркова, управляющую MMPP-поток. Процесс $m(t)$ задается матрицей инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} . Когда $m(t) = m$, интенсивность входящего потока равна λ_m , $m = \overline{1, M}$.

Трёхмерный процесс $\{i(t), k(t), m(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим $P\{i(t) = i, k(t) = k, m(t) = m\} = P_k(i, m, t)$ — вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k , в системе находится



i заявок и управляющая ММРР-потокм цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m .

Запишем систему уравнений Колмогорова для данного процесса в стационарном режиме

$$\begin{aligned} & -\left(\lambda_m + i\sigma + \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n\right) P_0(i, m) + \mu_1 P_1(i+1, m) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n P_n(i, m) + \sum_{\nu=1}^M P_0(i, \nu) q_{\nu m} = 0, \\ & -(\lambda_m + \mu_1) P_1(i, m) + \lambda_m P_1(i-1, m) + \lambda_m P_0(i-1, m) + i\sigma P_0(i, m) + \sum_{\nu=1}^M P_1(i, \nu) q_{\nu m} = 0, \\ & -(\lambda_m + \mu_n) P_n(i, m) + \lambda_m P_n(i-1, m) + \alpha_n P_0(i, m) + \sum_{\nu=1}^M P_n(i, \nu) q_{\nu m} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям $H_k(u, m) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i, m)$, $k = \overline{0, N+1}$, где $j = \sqrt{-1}$. Домножим уравнения системы на $e^{ju i}$ и просуммируем по i , откуда с использованием обозначений

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n(u) &= \{H_n(u, 1), H_n(u, 2), \dots, H_n(u, M)\}, \\ \mathbf{H}'_n(u) &= \left\{ \frac{\partial H_n(u, 1)}{\partial u}, \frac{\partial H_n(u, 2)}{\partial u}, \dots, \frac{\partial H_n(u, M)}{\partial u} \right\}, \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{diag}[\lambda_m], \quad \mathbf{I} - \text{единичная матрица}, \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju} \mathbf{H}_1(u) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{H}_n(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u) e^{ju} \mathbf{\Lambda} - j\sigma \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_n(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{H}_0(u) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{ju} \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{H}_n(u) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Последнее уравнение системы (1) является вспомогательным и получено путем суммирования уравнений системы и домножения справа на единичный вектор \mathbf{e} .

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ ММРР|М|1 С N ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВЫЗЫВАНИЯ ЗАЯВОК

В этом разделе мы рассмотрим предложенную модель в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для удобства исследования представим параметры RQ-системы в виде $\alpha_n = \alpha \gamma_n$, где $n = \overline{2, N+1}$, и запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \alpha \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju} \mathbf{H}_1(u) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{H}_n(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u) e^{ju} \mathbf{\Lambda} - j\sigma \mathbf{H}'_0(u) &= 0, \\ \mathbf{H}_n(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I}) + \alpha \gamma_n \mathbf{H}_0(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \end{aligned}$$



$$\mathbf{H}_0(u)\mathbf{\Lambda e} + \mathbf{H}_1(u)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-ju}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{H}_n(u)\mathbf{\Lambda e} = 0. \quad (2)$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно высокой интенсивности вызывания заявок имеет вид $\alpha \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} E \exp \left\{ jw \frac{i(t)}{\alpha} \right\} = \exp \{ jw \kappa_1 \}, \quad (3)$$

где κ_1 — положительный корень уравнения

$$\begin{aligned} & \mathbf{R} \left\{ \sigma \kappa_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I})^{-1} \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \sigma \kappa_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\} \mathbf{e} = 0, \end{aligned}$$

вектор-строка \mathbf{R} — стационарное распределение состояний процесса $m(t)$, определяемого системой уравнений $\mathbf{RQ} = 0$, $\mathbf{R e} = 1$.

Доказательство. В системе уравнений (2) введем следующие замены:

$$\alpha = 1/\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon), \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{1, N+1},$$

чтобы получить систему уравнений

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \left(\varepsilon \mathbf{Q} - \varepsilon \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) = 0, \\ & \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) e^{jw\varepsilon} \mathbf{\Lambda} - j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ & \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) (\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ & \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda e} + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda e} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим систему уравнений (4) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{F}_0(w) + j\sigma \mathbf{F}'_0(w) + \mu_1 \mathbf{F}_1(w) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{F}_n(w) = 0, \\ & \mathbf{F}_1(w) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) - j\sigma \mathbf{F}'_0(w) = 0, \\ & \mathbf{F}_n(w) (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{F}_0(w) = 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ & \mathbf{F}_1(w) (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{F}_n(w) \mathbf{\Lambda e} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$



где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon) = \mathbf{F}_k(w)$. Будем искать решение системы уравнений (5) в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = \Phi(w)\mathbf{R}_k, \quad (6)$$

где \mathbf{R}_k — стационарное распределение состояний прибора. Подставим (6) в (5) и разделим уравнения на $\Phi(w)$, откуда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{R}_0 + j\sigma \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{R}_0 + \mu_1 \mathbf{R}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{R}_n &= 0, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) - j\sigma \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \mathbf{R}_0 &= 0, \\ \mathbf{R}_n(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{R}_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} &= 0. \end{aligned}$$

Так как отношение $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w , можем записать функцию $\Phi(w)$ в виде

$$\Phi(w) = \exp\{jw\kappa_1\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Отношение можем записать в виде $j \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = -\kappa_1$. С учетом полученного систему уравнений перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{R}_0 - \sigma \kappa_1 \mathbf{R}_0 + \mu_1 \mathbf{R}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{R}_n &= 0, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 \mathbf{R}_0 &= 0, \\ \mathbf{R}_n(\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{R}_0 &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{R}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из второго и третьего уравнений системы (7) получим следующие выражения:

$$\mathbf{R}_1 = \sigma \kappa_1 \mathbf{R}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_n = \gamma_n \mathbf{R}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1}. \quad (9)$$

Подставим полученные выражения в условие нормировки для \mathbf{R}_k и получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{R}_k = \sigma \kappa_1 \mathbf{R}_0 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{R}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{R}.$$

Из уравнения запишем следующее выражение:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \left\{ \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1}. \quad (10)$$



Далее подставим выражения (8), (9) и (10) в четвертое уравнение системы (7) и получим уравнение относительно искомого неизвестного параметра κ_1

$$\mathbf{R} \left\{ \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right\}^{-1} \times \\ \times \left\{ \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{\Lambda} \right\} \mathbf{e} = 0. \quad \square$$

Теорема 1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для более детального исследования случайного процесса перейдем к асимптотике второго порядка.

Теорема 2. Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M \exp \left\{ jw \frac{i(t) - \alpha \kappa_1}{\sqrt{\alpha}} \right\} = e^{\frac{(jw)^2}{2} \kappa_2}, \quad (11)$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{y}_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} - \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{y}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}}{\sigma \left[\mathbf{g}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{g}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right]}.$$

Векторы \mathbf{y}_k и \mathbf{g}_k являются решениями следующих систем уравнений:

$$\mathbf{g}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 + \mathbf{R}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \mathbf{g}_n = \gamma_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{g}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0 \mu_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{y}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \mathbf{y}_n = (\gamma_n \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}) (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{y}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ = \mu_1 \mathbf{R}_1 - \mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda} (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad \sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{y}_k \mathbf{e} = 0.$$

Доказательство. В системе уравнений (2) введем замены

$$\mathbf{H}_k(u) = e^{ju\alpha\kappa_1} \mathbf{H}_k^{(2)}(u), \quad k = \overline{0, N+1},$$

чтобы получить систему уравнений (12).

$$\mathbf{H}_0^{(2)}(u) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \alpha \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \alpha \kappa_1 \mathbf{I} \right) + j\sigma \frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} + \mu_1 e^{-ju} \mathbf{H}_1^{(2)}(u) + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{H}_n^{(2)}(u) = 0,$$



$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(2)}(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{H}_0^{(2)}(u)(e^{ju}\mathbf{\Lambda} + \sigma\alpha\kappa_1\mathbf{I}) - j\sigma\frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du} &= 0, \\ \mathbf{H}_n^{(2)}(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}) + \alpha\gamma_n\mathbf{H}_0^{(2)}(u) &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{H}_0^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{H}_1^{(2)}(u)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1e^{-ju}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{H}_n^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В системе уравнений (12) введем следующие замены:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1/\varepsilon^2, \quad u = w\varepsilon, \quad \mathbf{H}_0^{(2)}(u) = \varepsilon^2\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon), \quad \mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon), \quad n = \overline{1, N+1}, \\ \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) \left(\varepsilon^2\mathbf{Q} - \varepsilon^2\mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n\mathbf{I} - \sigma\kappa_1\mathbf{I} \right) + j\sigma\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu_1e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n\mathbf{F}_n^{(2)}(w, \varepsilon) = 0, \\ \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)(\varepsilon^2e^{jw\varepsilon}\mathbf{\Lambda} + \sigma\kappa_1\mathbf{I}) - j\sigma\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_n^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1e^{-jw\varepsilon}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{F}_n^{(2)}(w, \varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем искать решение полученной системы уравнений в виде (13)

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi_2(w)\{\mathbf{R}_k + jw\varepsilon\mathbf{f}_k\} + o(\varepsilon^2), \quad k = \overline{0, N+1}. \quad (14)$$

Подставим разложение (14) в систему уравнений (13), разложим экспоненты в ряд Тейлора и поделим уравнения системы на $jw\Phi_2(w)$, откуда с учетом полученных ранее уравнений (7) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n\mathbf{I} + \sigma\kappa_1\mathbf{I} \right) \mathbf{f}_0 + \mu_1\mathbf{f}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n\mathbf{f}_n - \mu_1\mathbf{R}_1 + \sigma\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{R}_0 &= 0, \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) + \sigma\kappa_1\mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda} - \sigma\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{R}_0 &= 0, \\ \mathbf{f}_n(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda} &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{f}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e} &= 0. \end{aligned}$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w , можем записать функцию $\Phi_2(w)$ в следующем виде:

$$\Phi_2(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Подставляя в уравнения системы



$\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} + \sigma \kappa_1 \mathbf{I} \right) \mathbf{f}_0 + \mu_1 \mathbf{f}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{f}_n = \mu_1 \mathbf{R}_1 + \sigma \kappa_2 \mathbf{R}_0, \\
 & \mathbf{f}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 \mathbf{f}_0 = -\mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} - \sigma \kappa_2 \mathbf{R}_0, \\
 & \mathbf{f}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{f}_0 = -\mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N+1}, \\
 & \mathbf{f}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{f}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = -\mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Неоднородная система уравнений (15) аналогична однородной системе уравнений (7), следовательно, решение данной системы можно записать в виде $\mathbf{f}_k = C\mathbf{R}_k + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_k + \mathbf{y}_k$, откуда получим

$$\begin{aligned}
 & - \left(\sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} + \sigma \kappa_1 \mathbf{I} \right) [C\mathbf{R}_0 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0] + \mu_1 [C\mathbf{R}_1 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1] + \\
 & \quad + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n [C\mathbf{R}_n + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_n + \mathbf{y}_n] = \mu_1 \mathbf{R}_1 + \sigma \kappa_2 \mathbf{R}_0, \\
 & [C\mathbf{R}_1 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1] (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 [C\mathbf{R}_0 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0] = -\mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} - \sigma \kappa_2 \mathbf{R}_0, \\
 & [C\mathbf{R}_n + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_n + \mathbf{y}_n] (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n [C\mathbf{R}_0 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0] = -\mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N+1}, \\
 & [C\mathbf{R}_0 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0] (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} [C\mathbf{R}_0 + \sigma \kappa_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0] \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = -\mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

В системе уравнений (16) слагаемые, содержащие константу C , уничтожаются. Из первого, второго и третьего уравнений системы соберем коэффициенты при различных степенях κ_2 в две системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{g}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \mu_1 \mathbf{g}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{g}_n = \mathbf{R}_0, \\
 & \mathbf{g}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 = -\mathbf{R}_0, \\
 & \mathbf{g}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{g}_0 = 0, \quad n = \overline{2, N+1};
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{y}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} \right) + \mu_1 \mathbf{y}_1 + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{y}_n = \mu_1 \mathbf{R}_1, \\
 & \mathbf{y}_1 (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) + \sigma \kappa_1 \mathbf{y}_0 = -\mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}, \\
 & \mathbf{y}_n (\mathbf{Q} - \mu_n \mathbf{I}) + \gamma_n \mathbf{y}_0 = -\mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}, \quad n = \overline{2, N+1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Из систем уравнений (17) и (18) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{g}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{g}_0 + \mathbf{R}_0) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \\
 & \mathbf{g}_n = \gamma_n \mathbf{g}_0 (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \quad n = \overline{2, N+1}, \\
 & \mathbf{g}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) =
 \end{aligned}$$



$$= \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0 \mu_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}; \tag{19}$$

$$\mathbf{y}_1 = (\sigma \kappa_1 \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda}) (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

$$\mathbf{y}_n = (\gamma_n \mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda}) (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, n = \overline{2, N+1},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 \left(- \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{I} - \sigma \kappa_1 \mathbf{I} + \mu_1 \sigma \kappa_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \gamma_n (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) = \\ = \mu_1 \mathbf{R}_1 - \mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{\Lambda} (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^{N+1} \mu_n \mathbf{R}_n \mathbf{\Lambda} (\mu_n \mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Наложим дополнительные условия

$$\sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{g}_k \mathbf{e} = 0, \quad \sum_{k=0}^{N+1} \mathbf{y}_k \mathbf{e} = 0,$$

что позволит однозначно найти решения систем уравнений (19) и (20).

Приводя подобные слагаемые в четвертом уравнении системы (16), получим

$$\sigma \kappa_2 \left[\mathbf{g}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{g}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right] + \left[\mathbf{y}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{y}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right] = -\mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}.$$

Отсюда получим явное выражение для κ_2

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{y}_1 (\mu_1 \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}) \mathbf{e} - \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{y}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{e}}{\sigma \left[\mathbf{g}_1 (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{g}_n \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} \right]}.$$

□

Теорема 2 показывает, что в предельном условии асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе ММРР|M|1 с N типами вызываемых заявок является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\kappa_1 \alpha$ и дисперсией $\kappa_2 \alpha$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ ММРР|M|1 С N ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ ДЛИТЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК

Представим параметры системы (1) в виде $\mu_n = \mu \gamma_n$, $n = \overline{2, N+1}$ и запишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0(u) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \mathbf{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju} \mathbf{H}_1(u) + \mu \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{H}_n(u) = 0, \\ \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u) e^{ju} \mathbf{\Lambda} - j\sigma \mathbf{H}'_0(u) = 0, \\ \mathbf{H}_n(u) (\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu \gamma_n \mathbf{I}) + \alpha_n \mathbf{H}_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \mathbf{H}_0(u) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{H}_1(u) (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-ju} \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{H}_n(u) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu \rightarrow 0$.



Теорема 3. Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} M e^{jw\mu i(t)} = \frac{1}{\nu} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n - jw\rho\mu_1} \prod_{n=2}^{N+1} \left(1 - jw \frac{\rho\mu_1}{\gamma_n} \right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}}, \quad (22)$$

где

$$\nu = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n}, \quad \rho = \frac{\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}}{\mu_1}.$$

Доказательство. В системе уравнений (21) введем замены

$$\mu = \varepsilon, \quad u = w\varepsilon, \quad \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon\mathbf{F}_0(w, \varepsilon), \quad \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad k = \overline{1, N+1},$$

чтобы получить систему уравнений (23).

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1} \alpha_n \mathbf{I} \right) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} + \mu_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{n=2}^{N+1} \gamma_n \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) &= 0, \\ \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) + \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) e^{jw\varepsilon} \mathbf{\Lambda} - j\sigma \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) (\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \varepsilon \gamma_n \mathbf{I}) + \varepsilon \alpha_n \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}, \\ \varepsilon \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{F}_n(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим первые три уравнения системы (23) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} j\sigma \mathbf{F}'_0(w) + \mu_1 \mathbf{F}_1(w) &= 0, \\ \mathbf{F}_1(w) (\mathbf{Q} - \mu_1 \mathbf{I}) - j\sigma \mathbf{F}'_0(w) &= 0, \\ \mathbf{F}_n(w) \mathbf{Q} &= 0, \quad n = \overline{2, N+1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Складывая первое и второе из полученных уравнений, получим выражения

$$\mathbf{F}_1(w) \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{F}_n(w) \mathbf{Q} = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$

с учетом которых запишем функции $F_k(w)$ в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = \Phi_k(w) \mathbf{R}, \quad k = \overline{1, N+1}. \quad (25)$$

Далее в последнем уравнении системы (23) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и подставим полученное разложение

$$\Phi_1(w) \mathbf{R} (\mathbf{\Lambda} - \mu_1 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} = 0.$$

Обозначим $\rho = \frac{\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}}{\mu_1}$, тогда уравнение примет вид

$$\Phi_1(w) (\rho - 1) + \rho \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) = 0. \quad (26)$$



Запишем искомую характеристическую функцию $\Phi(w)$ в виде $\Phi(w) = \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k(w)$. Из уравнения (26) запишем выражения

$$\Phi_1(w) = \rho\Phi(w), \quad \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) = (1 - \rho)\Phi(w).$$

В третьем уравнении системы (25) разложим экспоненты в ряд Тейлора и домножим на вектор \mathbf{e} справа, разделим уравнение на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{F}_n(w)(jw\mathbf{\Lambda} - \gamma_n\mathbf{I})\mathbf{e} + \alpha_n\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Подставим в уравнение разложение (25), обозначим $\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = \varphi(w)$ и просуммируем выражения по n , получим

$$(1 - \rho)\Phi(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n\varphi(w)}{\gamma_n - jw\rho\mu_1},$$

откуда следует

$$\Phi(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n\varphi(w)}{(1 - \rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}, \quad \Phi_1(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\rho\alpha_n\varphi(w)}{(1 - \rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}.$$

Подставим полученное выражение для $\Phi_1(w)$ в первое уравнение системы (24), домножая его справа на вектор \mathbf{e} ,

$$j\sigma\varphi'(w) + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\rho\mu_1\alpha_n\varphi(w)}{(1 - \rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)} = 0. \quad (27)$$

Запишем решение дифференциального уравнения (27)

$$\varphi(w) = C \prod_{n=2}^{N+1} \left(1 - jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}}, \quad (28)$$

где C — константа интегрирования, которая будет определена позднее.

Теперь из (28) можем записать

$$\Phi(w) = C \prod_{n=2}^{N+1} \left(1 - jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{(1 - \rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}.$$

Определим константу интегрирования из условия $\Phi(0) = 1$

$$C = (1 - \rho)\nu^{-1}, \quad \nu = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n}. \quad \square$$

Теорема 3 позволяет однозначно определить вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок. В отличие от исследования системы в предельном условии высокой интенсивности вызывания, здесь не требуется дополнительного исследования с использованием разложений более высокого порядка, так как характеристическая функция достаточно полно описывает случайный процесс.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрена RQ-система MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок. Получена асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе методом асимптотического анализа в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Асимптотическая характеристическая функция в данном условии соответствует гауссовскому закону распределения. Также получена асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе в условии длительного обслуживания вызываемых заявок.

В дальнейшем планируется исследование RQ-систем M|GI|1 и GI|M|1 с N типами вызываемых заявок методами асимптотического анализа в различных предельных условиях.

Список литературы

1. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems*. Berlin : Springer, 2008. 320 p.
2. Falin G., Templeton, J. *Retrial Queues*. London : CRC Press, 1997. 320 p.
3. Bhulai S., Koole G. A queueing model for call blending in call centers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003. Vol. 48, № 8. P. 1434–1438. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.815038>
4. Aguir S., Karaesmen F., Akşin Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance // *OR Spectrum*. 2004. Vol. 26, № 3. P. 353–376. <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0165-7>
5. Morozov E., Phung-Duc T. Regenerative Analysis of Two-Way Communication Orbit-Queue with General Service Time // *Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018. Lecture Notes in Computer Science* / eds. Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Witttevrongel, W. Yue. Vol. 10932. Springer, Cham, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93736-6_2
6. Sakurai H., Phung-Duc T. Scaling limits for single server retrial queues with two-way communication // *Annals of Operations Research*. 2016. № 247. P. 229–256. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1874-9>
7. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-Way Communication M/M/1/1 Queue with Server-Orbit Interaction and Feedback of Outgoing Retrial Calls // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017. Communications in Computer and Information Science* / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov. Vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_20
8. Sakurai H., Phung-Duc T. Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // *TOP*. 2015. Vol. 23. P. 466–492. <https://doi.org/10.1007/s11750-014-0349-5>
9. Nazarov A. A., Paul S. V., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. Netherlands, 2017*. P. 678–693.
10. Nazarov A. A., Phung-Duc T., Paul S. V. Heavy outgoing call asymptotics for MMP-P/M/1/1 retrial queue with two-way communication // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017. Communications in Computer and Information Science* / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov. Vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_3

References

1. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems*. Berlin, Springer, 2008. 320 p.
2. Falin G., Templeton, J. *Retrial Queues*. London, CRC Press, 1997. 320 p.



3. Bhulai S., Koole G. A queueing model for call blending in call centers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 8, pp. 1434–1438. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.815038>
4. Aguir S., Karaesmen F., Akşin Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance. *OR Spectrum*, 2004, vol. 26, no. 3, pp. 353–376. <https://doi.org/10.1007/s00291-004-0165-7>
5. Morozov E., Phung-Duc T. Regenerative Analysis of Two-Way Communication Orbit-Queue with General Service Time. In: Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Wittevrongel, W. Yue, eds. *Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10932. Springer, Cham, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93736-6_2
6. Sakurai H., Phung-Duc T. Scaling limits for single server retrial queues with two-way communication. *Annals of Operations Research*, 2016, no. 247, pp. 229–256. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1874-9>
7. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-way communication M/M/1/1 queue with server-orbit interaction and feedback of outgoing retrial calls. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017*. Communications in Computer and Information Science, vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_20
8. Sakurai H., Phung-Duc T. Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls. *TOP*, 2015, vol. 23, pp. 466–492. <https://doi.org/10.1007/s11750-014-0349-5>
9. Nazarov A. A., Paul S. V., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. Netherlands, 2017, pp. 678–693.
10. Nazarov A. A., Phung-Duc T., Paul S. V. Heavy Outgoing Call Asymptotics for MMP-P/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017*. Communications in Computer and Information Science, vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_3

Поступила в редакцию / Received 11.11.2019

Принята к публикации / Accepted 20.02.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 125–137
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 125–137

Научная статья

УДК 519.872

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137>

Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$

М. А. Шкленник[✉], А. Н. Моисеев

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Шкленник Мария Александровна, аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики, Shklennikm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0993-8006>

Моисеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, moiseev.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2369-452X>

Аннотация. В работе представлена математическая модель двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов с обратной связью. Время обслуживания заявок, поступивших в систему, является случайной величиной, заданной функцией распределения $B_1(x)$. Время обслуживания заявок, обратившихся к системе для повторного обслуживания, задано функцией распределения $B_2(x)$. Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий в потоке повторных обращений (r -потоке) в системе с момента начала ее функционирования при нестационарном режиме работы. Для решения поставленной задачи был использован метод марковского суммирования, в основе которого лежит рассмотрение марковских процессов и решение уравнения Колмогорова. В ходе решения был исследован так называемый локальный r -поток — число событий r -потока, сформированных одной заявкой входящего потока, поступившей в систему. В результате получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа событий в локальном r -потоке, которое может быть использовано для исследования систем массового обслуживания с аналогичной дисциплиной обслуживания и немарковскими входящими потоками. В результате исследования получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа повторных обращений к системе на заданном интервале времени при нестационарном режиме работы, которое позволяет указать распределение вероятностей числа событий в исследуемом потоке, а также его основные вероятностные характеристики.

Ключевые слова: система массового обслуживания, повторные обращения, обратная связь, неограниченное число приборов, метод марковского суммирования

Для цитирования: Шкленник М. А., Моисеев А. Н. Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 125–137. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137>
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137>

Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$

M. A. Shklennik[✉], A. N. Moiseev

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Maria A. Shklennik, Shklennikm@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0993-8006>

Alexander N. Moiseev, moiseev.tsu@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2369-452X>

Abstract. The paper presents a mathematical model of queueing tandem $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$ with feedback. The service times at the first stage are independent and identically distributed (i.i.d.) with an arbitrary distribution function $B_1(x)$. Service times at the second stage are i.i.d. with an arbitrary distribution function $B_2(x)$. The problem is to determine the probability distribution of the number of repeated customers (r -flow) during fixed time period. To solve this problem, the Markov summation method was used, which is based on the consideration of Markov processes and the solution of the Kolmogorov equation. In the course of the solution, the so-called local r -flow was studied — the number of r -flow calls generated by one incoming customer received by the system. As a result, an expression is obtained for the characteristic probability distribution function of the number of calls in the local r -flow, which can be used to study queueing systems with a similar service discipline and non-Markov incoming flows. As a result of the study, an expression is obtained for the characteristic probability distribution function of the number of repeated calls to the system at a given time interval during non-stationary regime, which allows one to obtain the probability distribution of the number of calls in the flow under study, as well as its main probability characteristics.

Keywords: queueing tandem, repeated flow, feedback, unlimited number of servers, method of Markovian summation

For citation: Shklennik M. A., Moiseev A. N. Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $M|GI|_{\infty} \rightarrow GI|_{\infty}$. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 125–137 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием (с обратной связью) являются математическими моделями инфокоммуникационных систем, в частности, систем с дообслуживанием, а также различных социально-экономических систем [1–5]. Исследованию характеристик потоков в такого рода системах посвящено достаточно много работ. Однако существующие методы, позволяющие получить аналитические выражения для исследуемых параметров потоков, позволяют это сделать при существенных ограничениях. Так, например, метод предельной декомпозиции и метод производящей функции, используемые для исследования потоков в системах с неограниченным числом приборов [6–11], можно применять лишь в том случае, если входящий поток заявок является пуассоновским, а методы асимптотического анализа [12–14] позволяют определять характеристики систем при выполнении



некоторого предельного условия. Причем, как правило, все системы исследуются при стационарном режиме работы. В данной работе предлагается использование метода марковского суммирования [15, 16] для исследования потока повторных обращений в двухфазной СМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием и возможностью повторного обращения ко второй фазе при нестационарном режиме работы системы.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе и возможностью повторного обращения на второй фазе (рисунок).

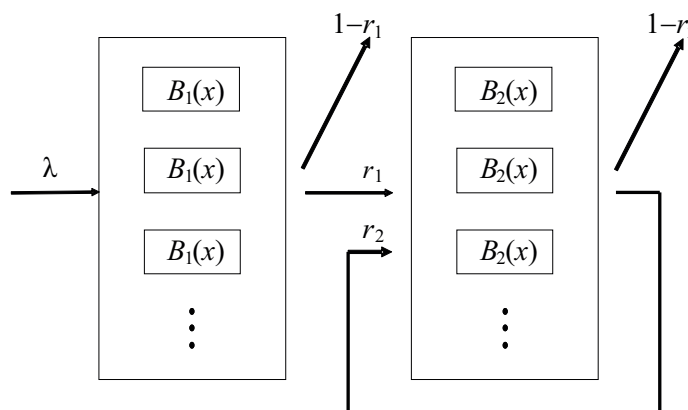


Рис. Двухфазная СМО с повторными обращениями
 Fig. Two-phase QS with repeated calls

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания заявки на первой фазе системы является произвольной случайной величиной, заданной функцией распределения $B_1(x)$. Каждая заявка, завершив обслуживание на первой фазе системы, с вероятностью r_1 может перейти на вторую фазу системы или с вероятностью $(1 - r_1)$ покинуть систему. Время обслуживания заявки на второй фазе системы также является произвольной случайной величиной, имеющей функцию распределения $B_2(x)$. Завершив обслуживание на второй фазе системы, каждая заявка может с вероятностью r_2 вернуться на вторую фазу системы для следующего повторного обслуживания или с вероятностью $(1 - r_2)$ покинуть систему. Повторными обращениями к системе будем считать все обращения заявок ко второй фазе системы. Поток повторных обращений заявок будем называть r -потоком. В работе ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий в r -потоке с момента начала функционирования системы.

МЕТОД МАРКОВСКОГО СУММИРОВАНИЯ

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок. Рассмотрим одну заявку входящего потока, поступившую в систему в момент времени t . Она будет формировать события r -потока, которые наступят после момента времени t . Зафиксируем некоторый момент времени $t = T$. Обозначим $n(t)$ — число событий r -потока, т.е. число обращений ко второй фазе системы, наступивших на интервале $[0, T]$, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t], t \leq T$. Пусть

$$P(n, t) = P\{n(t) = n\},$$



тогда $P(n, T)$ есть распределение вероятностей числа событий r -потока, наступивших в системе на интервале $[0, T]$.

Обозначим $\xi(t)$ — число событий r -потока, сформированных одной заявкой, поступившей в систему в момент времени t за интервал $(T - t)$ — локальный r -поток; $g(i, t) = P\{\xi(t) = i\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени T сформирует в r -потоке i событий. По формуле полной вероятности можно записать следующее равенство:

$$P(n, t + \Delta t) = P(n, t)(1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t \sum_{i=0}^n P(n - i, t) g(i, t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим дифференциальное уравнение Колмогорова для распределения вероятностей $P(n, t)$

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = -\lambda P(n, t) + \lambda \sum_{i=0}^n P(n - i, t) g(i, t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P(n, 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Определим характеристические функции вида

$$H(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n, t), \quad G(u, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} g(i, t).$$

Тогда из уравнения (1) получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = \lambda H(u, t) (G(u, t) - 1) \tag{3}$$

с начальным условием

$$H(u, 0) \equiv 1. \tag{4}$$

Теорема. *Характеристическая функция распределения вероятностей $P(n, T)$ числа событий r -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$, имеет вид*

$$H(u, T) = \exp \left[\lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ \int_0^T B_1(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right\} \right], \tag{5}$$

где $b_k^*(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} dB_k(\tau)$ — преобразование Фурье – Стилтъяеса для функций распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1, 2$.



Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Характеристическая функция $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$ определяется выражением*

$$G(u, t) = 1 + r_1(e^{ju} - 1)B_1(T - t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi}(e^{ju} - 1)e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)(1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha))j\alpha} d\alpha. \quad (6)$$

Доказательство. Очевидно, что локальный r -поток является потоком восстановления, но в данном случае в каждый из моментов наступления очередного события потока он может «оборваться». Рассмотрим произвольный интервал времени длиной τ ($t \leq t + \tau \leq T$). Пусть $\eta(t, \tau)$ — число событий локального r -потока, т. е. число повторных обращений, сформированных заявкой, поступившей в систему в момент времени t , за интервал $[t, t + \tau]$. Тогда $\xi(t) = \eta(t, T - t)$.

Введем в рассмотрение дополнительные переменные:

$\nu(t, \tau)$ — состояние заявки, поступившей в систему в момент времени t , в момент времени $t + \tau$, т. е. если к моменту времени $t + \tau$ заявка покинула систему, то $\nu(t, \tau) = 0$; если к моменту времени $t + \tau$ заявка находится на первой фазе системы, то $\nu(t, \tau) = 1$; и если к моменту времени $t + \tau$ заявка находится на второй фазе системы, то $\nu(t, \tau) = 2$;

$z(t, \tau)$ — длина интервала времени от момента $t + \tau$ до окончания текущего обслуживания заявки (если она не покинула систему).

Случайный процесс $\{\eta(t, \tau), \nu(t, \tau), z(t, \tau)\}$ является марковским.

Введем следующие обозначения:

1) $g_0(i, t, \tau) = P\{\eta(t, \tau) = i, \nu(t, \tau) = 0\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ покинула систему и сделала i повторных обращений;

2) $g_1(t, \tau, z) = P\{\eta(t, \tau) = 0, \nu(t, \tau) = 1, z(t) < z\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ находится на первой фазе (соответственно, она не сделала ни одного повторного обращения);

3) $g_2(i, t, \tau, z) = P\{\eta(t, \tau) = i, \nu(t, \tau) = 2, z(t) < z\}$, если $i > 0$, и $g_2(i, t, \tau, z) = 0$, если $i = 0$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t , к моменту времени $t + \tau$ находится на второй фазе и сделала i повторных обращений.

Заметим, что вид выражений для вышеперечисленных вероятностей не будет зависеть от t , поэтому в дальнейшем для краткости исключим этот аргумент.

Для распределения вероятностей трехмерного марковского процесса $\{\eta(t, \tau), \nu(t, \tau), z(t, \tau)\}$ составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем следующие равенства:

$$\begin{aligned} g_0(0, \tau + \Delta\tau) &= g_0(0, \tau) + g_1(\tau, \Delta\tau)(1 - r_1) + o(\Delta\tau), \\ g_0(i, \tau + \Delta\tau) &= g_0(i, \tau) + g_2(i, \tau, \Delta\tau)(1 - r_2) + o(\Delta\tau), \quad i = 1, 2, \dots, \\ g_1(\tau + \Delta\tau, z) &= g_1(\tau, z + \Delta\tau) - g_1(\tau, \Delta\tau) + o(\Delta\tau), \\ g_2(1, \tau + \Delta\tau, z) &= g_2(1, \tau, z + \Delta\tau) - g_2(1, \tau, \Delta\tau) + g_1(\tau, \Delta\tau)r_1B_2(z) + o(\Delta\tau), \\ g_2(i, \tau + \Delta\tau, z) &= g_2(i, \tau, z + \Delta\tau) - g_2(i, \tau, \Delta\tau) + g_2(i, \tau, \Delta\tau)r_2B_2(z) + o(\Delta\tau), \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Откуда при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial g_0(0, \tau)}{\partial \tau} = (1 - r_1) \frac{\partial g_1(\tau, 0)}{\partial z}, \quad (7)$$



$$\frac{\partial g_0(i, \tau)}{\partial \tau} = (1 - r_2) \frac{\partial g_2(i, \tau, 0)}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\frac{\partial g_1(\tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial g_1(\tau, z)}{\partial z} = - \frac{\partial g_1(\tau, 0)}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial g_2(1, \tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial g_2(1, \tau, z)}{\partial z} = - \frac{\partial g_2(1, \tau, 0)}{\partial z} + r_1 B_2(z) \frac{\partial g_1(\tau, 0)}{\partial z}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2(i, \tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial g_2(i, \tau, z)}{\partial z} = & - \frac{\partial g_2(i, \tau, 0)}{\partial z} + \\ & + r_1 B_2(z) \frac{\partial g_1(\tau, 0)}{\partial z} + r_2 B_2(z) \frac{\partial g_2(i-1, \tau, 0)}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$g_0(i, 0) \equiv 0, \quad \forall i; \quad g_1(0, z) = B_1(z); \quad g_2(i, 0, z) \equiv 0, \quad i > 0.$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$G_0(u, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} g_0(i, \tau), \quad G_1(\tau, z) = g_1(\tau, z), \quad G_2(u, \tau, z) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} e^{ju_i} g_2(i, \tau, z), & i > 0, \\ 0, & i = 0 \end{cases}$$

и, подставив их в систему (7)–(11), получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial G_0(u, \tau)}{\partial \tau} = (1 - r_1) \frac{\partial G_1(\tau, 0)}{\partial z} + (1 - r_2) \frac{\partial G_2(u, \tau, 0)}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial G_1(\tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial G_1(\tau, z)}{\partial z} = - \frac{\partial G_1(\tau, 0)}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2(u, \tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial G_2(u, \tau, z)}{\partial z} = & - \frac{\partial G_2(u, \tau, 0)}{\partial z} + \\ & + r_1 B_2(z) e^{ju} \frac{\partial G_1(\tau, 0)}{\partial z} + r_2 B_2(z) e^{ju} \frac{\partial G_2(u, \tau, 0)}{\partial z} \end{aligned} \quad (14)$$

с начальными условиями

$$G_0(u, 0) = 0, \quad G_1(0, z) = B_1(z), \quad G_2(u, 0, z) = 0. \quad (15)$$

Обозначим

$$\frac{\partial G_1(\tau, 0)}{\partial z} = f_1(\tau), \quad \frac{\partial G_2(u, \tau, 0)}{\partial z} = f_2(u, \tau),$$

тогда систему уравнений (12)–(14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial G_0(u, \tau)}{\partial \tau} = (1 - r_1) f_1(\tau) + (1 - r_2) f_2(u, \tau), \quad (16)$$

$$\frac{\partial G_1(\tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial G_1(\tau, z)}{\partial z} = - f_1(\tau), \quad (17)$$

$$\frac{\partial G_2(u, \tau, z)}{\partial \tau} - \frac{\partial G_2(u, \tau, z)}{\partial z} = r_1 B_2(z) e^{ju} f_1(\tau) + (r_2 B_2(z) e^{ju} - 1) f_2(u, \tau). \quad (18)$$

Решая систему (16)–(18) с начальными условиями (15), найдем вид функций $G_0(u, \tau)$, $G_1(\tau, z)$ и $G_2(u, \tau, z)$.



Проинтегрировав по τ уравнение (16) и подставив начальное условие, находим

$$G_0(u, \tau) = \int_0^\tau [(1 - r_1)f_1(x) + (1 - r_2)f_2(u, x)] dx. \quad (19)$$

Уравнение (17) является неоднородным уравнением в частных производных. Записываем соответствующую ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dG_1(\tau, z)}{-f_1(\tau)}.$$

Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя равенство

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1},$$

получаем

$$\tau + z = C_1.$$

Равенство

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_1(\tau, z)}{-f_1(\tau)}$$

дает

$$G_1(u, \tau, z) = - \int_0^\tau f_1(u, x) dx + C_2,$$

или

$$G_1(\tau, z) + \int_0^\tau f_1(x) dx = C_2.$$

Тогда общим решением уравнения (17) будет

$$G_1(\tau, z) = \varphi(\tau + z) - \int_0^\tau f_1(x) dx.$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$G_1(0, z) = B_1(z).$$

Тогда

$$G_1(0, z) = \varphi(z) + 0 = B_1(z),$$

следовательно, искомое частное решение уравнения (17) имеет вид

$$G_1(\tau, z) = B_1(\tau + z) - \int_0^\tau f_1(x) dx. \quad (20)$$

Найдем решение уравнения (18). Это неоднородное уравнение в частных производных. Записываем соответствующую ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dG_2(u, \tau, z)}{r_1 B_2(z) e^{ju} f_1(\tau) + (r_2 B_2(z) e^{ju} - 1) f_2(u, \tau)}.$$



Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя уравнение

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1},$$

получаем

$$\tau + z = C_1.$$

Уравнение

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_2(u, \tau, z)}{r_1 B_2(z) e^{ju} f_1(\tau) + (r_2 B_2(z) e^{ju} - 1) f_2(u, \tau)}$$

с учетом найденного первого независимого интеграла примет вид

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_2(u, \tau, z)}{r_1 B_2(C_1 - \tau) e^{ju} f_1(\tau) + (r_2 B_2(C_1 - \tau) e^{ju} - 1) f_2(u, \tau)}.$$

Интегрируя его, находим второй независимый интеграл

$$G_2(u, \tau, z) - \int_0^\tau [r_1 B_2(C_1 - x) e^{ju} f_1(x) + (r_2 B_2(C_1 - x) e^{ju} - 1) f_2(u, x)] dx = C_2.$$

Общим решением уравнения (18) будет

$$G_2(u, \tau, z) = \varphi(\tau + z) + \int_0^\tau [r_1 B_2(z + \tau - x) e^{ju} f_1(x) + (r_2 B_2(z + \tau - x) e^{ju} - 1) f_2(u, x)] dx.$$

Найдем решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $G_2(u, 0, z) = 0$. Тогда

$$G_2(u, 0, z) = \varphi(z) + 0 = 0,$$

следовательно, искомое частное решение уравнения (18) имеет вид

$$G_2(u, \tau, z) = \int_0^\tau [r_1 B_2(z + \tau - x) e^{ju} f_1(x) + (r_2 B_2(z + \tau - x) e^{ju} - 1) f_2(u, x)] dx. \quad (21)$$

Характеристическая функция $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$ будет определяться выражением

$$G(u, t) = G_0(u, T - t) + G_1(T - t, \infty) + G_2(u, T - t, \infty).$$

Подставив сюда выражения (19), (20), (21) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$G(u, t) = 1 + (e^{ju} - 1) \int_0^{T-t} [r_1 f_1(x) + r_2 f_2(u, x)] dx. \quad (22)$$

Найдем вид функций $f_1(x)$ и $f_2(u, x)$. Продифференцируем равенство (20) по z и рассмотрим при $z = 0$. Получим

$$f_1(\tau) = b_1(\tau), \quad (23)$$



где $b_1(\tau)$ — плотность распределения времени обслуживания на первой фазе системы (первичных заявок).

Продифференцируем равенство (21) по z и рассмотрим его составляющие при $z = 0$. Получаем интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f_2(u, \tau)$:

$$f_2(u, \tau) = r_1 e^{ju} \int_0^\tau b_2(\tau - x) f_1(x) dx + r_2 e^{ju} \int_0^\tau b_2(\tau - x) f_2(u, x) dx.$$

Это уравнение решим, используя преобразование Фурье вида

$$f_k^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha\tau} f_k(\tau) d\tau, \quad b_k^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{j\alpha\tau} b_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Тогда, используя свойства преобразования Фурье для свертки, из интегрального уравнения для $f_2(u, \tau)$ получим алгебраическое уравнение для преобразования Фурье функции $f_2^*(u, \alpha)$, откуда

$$f_2^*(u, \alpha) = \frac{r_1 e^{ju} b_2^*(\alpha) f_1^*(\alpha)}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)}.$$

Учитывая равенство (23), можем записать

$$f_2^*(u, \alpha) = \frac{r_1 e^{ju} b_2^*(\alpha) b_1^*(\alpha)}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)}.$$

Тогда, используя формулу для обратного преобразования Фурье, получим выражение для неизвестной функции $f_2(u, \tau)$:

$$f_2(u, \tau) = \frac{r_1 e^{ju}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) e^{-j\alpha\tau}}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)} d\alpha. \quad (24)$$

Подставив найденные выражения (23), (24) для функций $f_1(x)$ и $f_2(u, x)$ в выражение (22) и выполнив несложные преобразования, получаем характеристическую функцию $G(u, t)$ процесса $\xi(t)$:

$$G(u, t) = 1 + r_1 (e^{ju} - 1) B_1(T - t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi} (e^{ju} - 1) e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} d\alpha,$$

что совпадает с выражением (6). Лемма доказана. \square

Переходим к решению уравнения (3) с начальными условиями (4). Подставим в уравнение (3) выражение (6) для характеристической функции локального r - потока. Получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$

$$\frac{dH(u, t)}{H(u, t)} = \lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ B_1(T - t) + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) (1 - e^{-j\alpha(T-t)})}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} d\alpha \right\} dt.$$



Проинтегрировав и подставив начальные условия, получим

$$H(u, t) = \exp \left[\lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ \int_0^t B_1(T-y) dy + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} \int_0^t (1 - e^{-j\alpha(T-y)}) dy d\alpha \right\} \right].$$

Проинтегрировав по y внутренний интеграл, получим

$$H(u, t) = \exp \left[\lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ \int_{T-t}^T B_1(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} \left(t - \frac{e^{-j\alpha(T-t)} - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right\} \right].$$

Тогда, положив $t = T$, получим характеристическую функцию распределения вероятностей $P(n, T)$ числа событий r -потока, наступивших за время T на интервале $[0, T]$:

$$H(u, T) = \exp \left[\lambda r_1 (e^{ju} - 1) \left\{ \int_0^T B_1(x) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha)}{(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)) j\alpha} \left(T - \frac{1 - e^{-j\alpha T}}{j\alpha} \right) d\alpha \right\} \right],$$

что совпадает с выражением (5). Теорема доказана. \square

Зная выражение для характеристической функции, распределение вероятностей числа событий r -потока, наступивших в системе на интервале $[0, T]$, можем получить с помощью обратного преобразования Фурье

$$P(n, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jun} H(u, T) du.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа повторных обращений в неоднородной системе массового обслуживания при нестационарном режиме работы. Найденная функция позволяет получить основные вероятностные характеристики исследуемого процесса. Предложенный метод исследования потока повторных обращений в системах с обратной связью существенно расширяет класс задач теории массового обслуживания, для которых можно получить аналитическое выражение без существенных ограничений. Так, например, данный метод позволяет исследовать поток повторных обращений в системах с немарковскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания. Анализ таких систем планируется выполнить в последующих исследованиях.



Список литературы

1. Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
2. Жидкова Л. А., Моисеева С. П. Математическая модель потоков покупателей двух-продуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
3. Ананина И. А. Математическая модель процесса изменения дохода торговой компании, расширяющей свое присутствие на рынке // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2. С. 5–14.
4. Назаров А. А., Ананина И. А. Математическая модель процедуры пожизненной ренты // Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 318, № 5. С. 160–165.
5. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Optimization of two-level discount values using queueing tandem model with feedback // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. Springer, Cham, 2018. Vol. 912. P. 321–332. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_25
6. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2, № 1. С. 106–116.
7. Морозова А. С., Моисеева С. П. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. 2005. № 287. С. 46–51.
8. Назаров А. А., Моисеева С. П., Морозова А. С. Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, спец. вып. 5. С. 88–92.
9. Ананина И. А., Назаров А. А., Моисеева С. П. Исследование потоков в системе $M|GI|\infty$ с повторным обращением методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–67
10. Ананина И. А. Исследование суммарного потока обращений в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. Томск : Издательство Томского университета, 2010. Ч. 1. С. 3–5.
11. Моисеева С. П., Шкленник М. А., Набокова О. О. Исследование потоков в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями методом предельной декомпозиции // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Ч. 1. Томск : НТЛ, 2017. С. 108–114.
12. Задиранова Л. А., Моисеева С. П. Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2 (31). С. 26–34. <https://doi.org/10.17223/19988605/31/3>
13. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016.



Communications in Computer and Information Science / eds. V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev. Vol. 678. Springer, Cham, 2016. P. 231–240. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51917-3_21

14. Задиранова Л. А. Исследование потока повторных обращений в системе $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Г. А. Медведева. Минск : РИВШ, 2015. С. 43–46.
15. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. Vol. 912. Springer, Cham, 2018. P. 71–82. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_6
16. Шкленник М. А., Моисеев А. Н. Математическая модель системы обработки результатов физических экспериментов с необходимостью повторной обработки данных // Известия вузов. Физика. 2019. Т. 62, № 3. С. 148–153. <https://doi.org/10.17223/00213411/62/3/148>

References

1. Morozova A. S., Moiseeva S. P., Nazarov A. A. Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading. *Tomsk State University Journal*, 2006, no. 293, pp. 49–52 (in Russian).
2. Zhidkova L. A., Moiseeva S. P. A mathematical model of customer flows of a two-product trading company in the form of a queueing system with repeated calls to blocks. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2013, vol. 322, iss. 6, pp. 5–9 (in Russian).
3. Ananina I. A. Mathematical model of the income change process of the trading company expanding the presence in the market. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, iss. 2, pp. 5–14 (in Russian).
4. Nazarov A. A., Ananina I. A. A mathematical model of a life annuity procedure. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2011, vol. 318, iss. 5, pp. 160–165 (in Russian).
5. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Optimization of two-level discount values using queueing tandem model with feedback. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol. 912. Springer, Cham, 2018, pp. 321–332. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_25
6. Sevast'yanov B. A. An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals. *Theory of Probability & Its Applications*, 1957, vol. 2, iss. 1, pp. 102–112. <https://doi.org/10.1137/1102005>
7. Morozova A. S., Moiseeva S. P. Study of repeated customers flow in the queueing system with unlimited number of servers and feedback. *Tomsk State University Journal*, 2005, no. 287, pp. 46–51 (in Russian).
8. Nazarov A. A., Moiseeva S. P., Morozova A. S. Investigation systems of service with repeated handling. Method of limit decomposition. *Computational Technologies*, 2005, vol. 13, Special iss. 5, pp. 88–92 (in Russian).
9. Ananina I. A., Nazarov A. A., Moiseeva S. P. Research of streams in system $M|GI|\infty$ with repeated references the method of limiting decomposition. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2009, iss. 3 (8), pp. 56–67 (in Russian).
10. Ananina I. A. Analysis of total flow of customers in queueing tandem system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition. *Nauchnoe tvorchestvo molodezhi: materialy XIV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Scientific creativity of youth: Materials of the XIV All-Russian Scientific and Practical

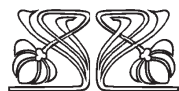
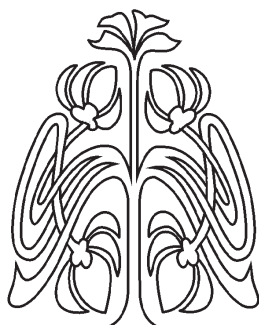


- Conference]. Tomsk, Izdatel'stvo Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2010, pt. 1, pp. 3–5 (in Russian).
11. Moiseeva S. P., Shklennik M. A., Nabokova O. O. Analysis of flows in queueing tandem with unlimited number of servers and feedback by method of limiting decomposition. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2017): materialy XVI Mezhdunarodnoi konferentsii imeni A. F. Terpugova* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2017): Materials of the XVI International Conference named after A. F. Terpugov]. Tomsk, NTL, 2017, pt. 1, pp. 108–114 (in Russian).
 12. Zadiraniva L. A., Moiseeva S. P. Asymptotic analysis of the flow of repeated requests in system $MMPP|M|\infty$ with repeated requests. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2015, iss. 2 (31), pp. 26–34 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/19988605/31/3>
 13. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. In: V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev, eds. *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science*, vol. 678. Springer, Cham, 2016, pp. 231–240. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51917-3_21
 14. Zadiranova L. A. Analysis of the flow of repeated requests in system $GI|M|\infty$ with repeated requests. In: *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya: materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, posvyashchennoy 80-letiyu professora G. A. Medvedeva* [Probability theory, random processes, mathematical statistics and applications: Materials of the International Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of prof. G. A. Medvedev]. Minsk, RIVSh, 2015, pp. 43–46.
 15. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol. 912. Springer, Cham, 2018. pp. 71–82. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_6
 16. Shklennik M. A., Moiseev A. N. Mathematical model of a system for physics experimental data processing with the need to reprocess data. *Russian Physics Journal*, 2019, vol. 62, iss. 3, pp. 553–560. <https://doi.org/10.1007/s11182-019-01746-4>

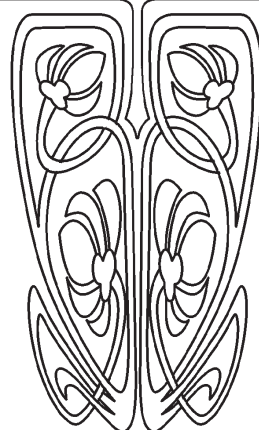
Поступила в редакцию / Received 08.11.2019

Принята к публикации / Accepted 20.02.2020

Опубликована / Published 01.03.2021



ПОДПИСКА



Подписка на 2021 год

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства (редакции):

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: izdat@sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru/>