

ОТЗЫВ

на статью Лошкаревой Е.А., Гладышева Ю.А., Малышева Е.Н. «Применение метода обобщённых степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана»

Рецензируемая работа посвящена построению решения обобщённой системы Коши-Римана в восьмимерном пространстве. Решение задачи с помощью метода обобщённых степеней сведено к кватернионным уравнениям Лапласа. В первом разделе работы приведены основные положения параметрического метода обобщённых степеней для случая одной независимой переменной; во втором – для случая многих комплексных переменных. В обоих случаях авторами получено условие гармоничности, при выполнении которого построенное ими выражение является решением уравнения Лапласа. Показано, что предлагаемый авторами метод даёт более простой вид указанного условия. Работа написана математически грамотно, выкладки и преобразования пояснены достаточно подробно. В то же время после прочтения статьи возникают следующие вопросы и замечания:

1. Во введении к статье желательно пояснить необходимость решения системы (1) относительно именно **кватернионных** функций. В каких конкретно практических задачах возникает такая система? Обзор литературы, приведённый в статье, посвящён методу решения системы Коши-Римана (метод обобщённых степеней), но не самой этой системе.

2. В статье нет ссылок на какие-либо работы (скорее всего книги), посвящённые алгебре кватернионов. Желательно их добавить.

3. В последней строке на стр. 2 не расшифрована аббревиатура ИКТ (далее она не встречается). Здесь ИКТ – это информационно-компьютерные технологии? Т.е. речь идёт об удобстве численного решения уравнения Лапласа? Тогда, может быть, так и стоило написать.

4. На стр. 5 во второй строке первого раздела сказано «Доказано, что общая константа может быть найдена...». Здесь не хватает ссылки на источник, откуда взято это утверждение. Или это было доказано в статье выше?

5. В формуле (8) на стр. 5 верхние и нижние пределы у обоих интегралов должны совпадать? (x_{i0} и x_i соответственно.) Если нет, то откуда в обратном операторе $L(i)$ взялась переменная y_i ? В операторе $D(i)$ её не было.

6. Рассмотрим формулу (9) на стр. 5 например при $d=3$. (При $d=2$ имеем $2^d = 2d$, поэтому $d=2$ нам не подойдёт.) Тогда константа C примет вид

$$C = (c_{11} + c_{21} \cdot x) \cdot (c_{12} + c_{22} \cdot x) \cdot (c_{13} + c_{23} \cdot x). \quad (*)$$

Первичных параметров c_{1i} , c_{2i} действительно шесть ($2d=2 \cdot 3=6$). Если при этом в формуле (*) перемножить все скобки и не приводить подобные слагаемые, получим

$$C = c_{11} \cdot c_{12} \cdot c_{13} + c_{11} \cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot x + c_{11} \cdot c_{13} \cdot c_{22} \cdot x + c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{23} \cdot x^2 + c_{12} \cdot c_{13} \cdot c_{21} \cdot x + \quad (**)$$

$$+ c_{12} \cdot c_{21} \cdot c_{23} \cdot x^2 + c_{13} \cdot c_{21} \cdot c_{22} \cdot x^2 + c_{21} \cdot c_{22} \cdot c_{23} \cdot x^3$$

В формуле (**) $2^3 = 8$ вторичных параметров (каждый из них представляет собой произведение трёх первичных). Тогда в развёрнутой форме (третья строка снизу на стр. 5) формулы (9) в последнем слагаемом как минимум вместо c_{2d} должно быть c_2^d (нижний индекс 2^d вместо $2d$). Более того, непонятно, откуда в развёрнутой форме появились переменные x_1, \dots, x_d . В то же время, если допустить, что формула (9) при $d=3$ на самом деле имеет вид

$$C = (c_{11} + c_{21} \cdot x_1) \cdot (c_{12} + c_{22} \cdot x_2) \cdot (c_{13} + c_{23} \cdot x_3), \quad (***)$$

тогда после перемножения скобок получим

$$C = c_{11} \cdot c_{12} \cdot c_{13} + c_{11} \cdot c_{12} \cdot c_{23} \cdot x_3 + c_{11} \cdot c_{13} \cdot c_{22} \cdot x_2 + c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + \quad (***)$$

$$+ c_{12} \cdot c_{13} \cdot c_{21} \cdot x_1 + c_{12} \cdot c_{21} \cdot c_{23} \cdot x_1 \cdot x_3 + c_{13} \cdot c_{21} \cdot c_{22} \cdot x_1 \cdot x_2 + c_{21} \cdot c_{22} \cdot c_{23} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Заметим, что (****) с точностью до порядка слагаемых совпадает по виду с развёрнутой формой выражения для константы C , приведённой в статье. Очевидно, что в общем виде (***) можно записать так

$$C = \prod_{i=1}^d (c_{1i} + c_{2i} x_i) \quad (9a)$$

При этом по-прежнему в третьей строке снизу на стр. 5 в последнем слагаемом вместо c_{2d} должно быть c_2^d (нижний индекс 2^d вместо $2d$). Слагаемых в формуле (****) также $2^d = 2^3 = 8$. Прошу авторов уточнить, какая из формул (9) и (9a) является верной, и исправить развёрнутую форму выражения для константы C .

7. На стр. 8 во второй строке после формулы (17) что-то пропущено во фразе «Из вида следует, что она представлена...» Возможно, там должно быть «Из вида константы C следует, что она представлена...» (курсив мой).

8. На стр. 8 в формуле (18) лишний знак « \Rightarrow » перед запятой в операторе D_1 .

9. На стр. 8 после формулы (20) сказано «Компонентные величины c_{1k}, c_{2k} дают в дальнейшем...» Не понимаю, имеются в виду однокомпонентные, двухкомпонентные и т.д. величины или что-то иное?

10. В работе отсутствует конкретный пример построения решения уравнения Лапласа предложенным методом. В то же время авторы предполагают провести такое построение в следующей статье. Оставляю это замечание на усмотрение редакции. Если авторы и редакция считают, что статью можно разделить на две части и привести пример уже в следующей работе, то пусть так и будет.

Считаю, что статья Лошкаревой Е.А., Гладышева Ю.А., Малышева Е.Н. «Применение метода обобщённых степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана» представляет теоретический и практический интерес и после устранения вышеуказанных замечаний может быть опубликована в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика».