



МЕХАНИКА

УДК 539.9

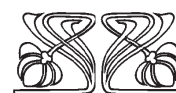
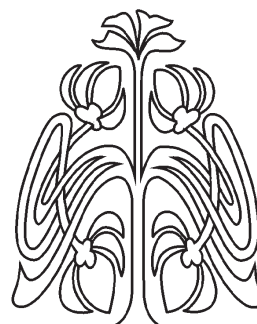
Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения в сверхзвуковом потоке газа

Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина

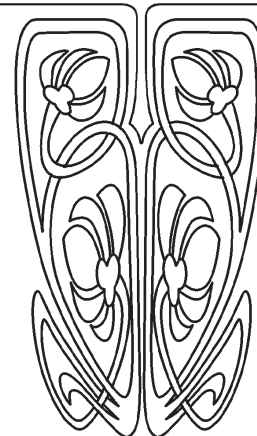
Белосточный Григорий Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, belostochny@mail.ru

Мыльцина Ольга Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, omyltsina@yandex.ru

Рассматривается нагретая до постоянной температуры геометрически нерегулярная полая оболочка (ГНО) постоянного кручения, обдуваемая сверхзвуковым потоком газа со стороны одной из основных поверхностей. За основу взята континуальная модель термоупругой системы «оболочка-ребра». Сингулярные дифференциальные уравнения динамической термоустойчивости ГНО содержат слагаемые, учитывающие «растяжение–сжатие» и «сдвиг» подкрепляющих элементов, тангенциальные усилия, вызванные нагревом оболочки, и поперечную нагрузку, стандартным образом записанную по «поршневой теории». Тангенциальные усилия предварительно определяются на основании решений сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости в перемещениях с учетом неоднородных краевых условий и содержатся в уравнениях в форме Рейсснера. Решение системы сингулярных уравнений динамической термоустойчивости разыскивается в виде двойного тригонометрического ряда, с переменными по временной координате коэффициентами, для функции прогиба и многочленов для тангенциальных компонент поля перемещений. На основании процедуры Галёркина определяется система дифференциальных уравнений для коэффициентов аппроксимирующего ряда, которая сводится к одному дифференциальному уравнению



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





четвертого порядка. Решение определяется во втором приближении, что соответствует двум полуволнам в направлении скорости потока и одной полуволне в перпендикулярном направлении. С использованием стандартных методов анализа динамической устойчивости ГНО определяются критические значения относительных скоростей потока. Количественные результаты представлены в виде таблиц, иллюстрирующих влияние геометрических параметров упругой системы и температуры на величины критических скоростей.

Ключевые слова: динамическая термоустойчивость, пологая оболочка, сверхзвуковой поток газа, сингулярность, аэродинамика, критические скорости, ребра жесткости.

Поступила в редакцию: 14.05.2019 / Принята: 30.06.2019 / Опубликовано: 02.12.2019

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408>

В современных авиационных конструкциях используются элементы в виде пологих оболочек, основные поверхности которых имеют кусочно-гладкую структуру — так называемые геометрически нерегулярные оболочки (ГНО). Общая проблема расчета таких оболочек представляет сложную математическую задачу, если речь идет о решениях в замкнутом виде или решениях на основе приближенных аналитических методов высшего анализа.

Обращение к дискретной модели в задачах статической и динамической термоупругости ГНО приводит к непреодолимым математическим трудностям по причине необходимости интегрировать совокупности систем дифференциальных уравнений, связанных между собой условиями сопряжения, где число систем дифференциальных уравнений и количество условий сопряжения зависит от числа подкрепляющих оболочку элементов [1]. Использование континуальной модели типа «конструктивная анизотропия» [2–4] малоприспособно в задачах термоупругости ГНО, так как основные положения этой модели формулируются на основе атермической теории упругости. Вторая континуальная модель, позволяющая трактовать такие оболочки как оболочки переменной толщины (на очень узких участках), основные уравнения и положения которой содержатся в работах [5–9], является чрезвычайно эффективной при решениях статических и динамических задач связанной и несвязанной термоупругости ГНО. Термоупругий анализ ГНО на основе этой модели сводится к интегрированию систем сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами в виде функций Хевисайда и их производных до второго порядка включительно. При интегрировании таких систем можно применять точные и приближенные аналитические методы высшего анализа [8–12].

В данной работе на основе континуальной модели ГНО решается задача динамической термоустойчивости полой ГНО постоянного кручения, обдуваемой со стороны одной из ее основных поверхностей сверхзвуковым потоком газа. На основании приближенного аналитического решения по пространственным координатам и точного по временной координате проводится анализ влияния геометрических параметров и температуры на величину предельной относительной скорости газового потока.

Рассмотрим изотропную пологую ГНО постоянного кручения, перекрывающую прямоугольный план в координатной плоскости xOy , со сторонами a и b . Система сингулярных дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости ГНО



в перемещениях, в которой тангенциальные усилия T_0^{11} , T_0^{12} , T_0^{22} , вызванные нагревом оболочки, содержатся в форме Рейсснера [13], запишутся

$$\begin{aligned}
 & u_{,11} + \frac{1-\nu}{2}u_{,22} + \frac{1+\nu}{2}v_{,12} - (1-\nu)k_{12}w_{,2} + \\
 & + \varepsilon_1 \frac{1-\nu}{2} \sum_i \frac{h_i}{h} a_i (u_{,22} + v_{,12} - 2k_{12}w_{,2}) \delta(x - x_i) = 0, \\
 & \frac{1+\nu}{2}u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2}v_{,11} - (1-\nu)k_{12}w_{,1} + \\
 & + \varepsilon_2 \sum_i \frac{h_i}{h} a_i (v_{,22} + \nu u_{,12}) \delta(x - x_i) = 0, \\
 & \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{2B(1-\nu)}{D} k_{12}^2 w - \frac{B(1-\nu)}{D} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) - \\
 & - \frac{1}{D} ((T^{11}w_{,1} + T^{12}w_{,2})_{,1} + (T^{22}w_{,2} + T^{12}w_{,1})_{,2}) - \\
 & - \frac{1}{D} \sum_i \frac{h_i}{h} a_i (T^{22}w_{,2})_{,2} \delta(x - x_i) + \sum_i \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,2222} \Big|_{x_i} \delta(x - x_i) + \\
 & + 2(1-\nu) \sum_i \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 a_i \Phi_{3i} w_{,122} \Big|_{x_i} \frac{d\delta}{dx} + \frac{2B(1-\nu)}{D} \sum_i \frac{h_i}{h} a_i k_{12}^2 w \delta(x - x_i) = \\
 & = -\frac{\gamma h}{gD} \left(1 + \sum_i \frac{h_i}{h} a_i \delta(x - x_i)\right) w_{,tt} - \frac{\mu h}{D} w_{,t} - p_0 \frac{\varkappa M}{D} w_{,2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь обозначено: $p_0 \frac{\varkappa M}{D} w_{,2}$ — относительная интенсивность поперечной нагрузки, вызванная прогибом оболочки, стандартным образом записана согласно «поршневой теории» [14–19]; $M = \frac{v_y}{c_0}$ — число Маха; v_y — невозмущенная скорость набегающего потока газа; c_0 — скорость звука на бесконечности; u, v, w — компоненты поля перемещений; $\frac{h_i}{h}$ — относительная высота i -го ребра, число которых n ; a_i — ширина i -го ребра; k_{12} — параметр кручения оболочки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; γ — удельный вес; g — интенсивность поля тяжести; $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$; μ — коэффициент демпфирования; $\delta(x - x_i)$ — обобщенная δ -функция Дирака; ε_j ($j = 1, 2$) — знаковые числа, равные 1 и 0; T_0^{11} , T_0^{12} , T_0^{22} — тангенциальные усилия, вызванные нагревом оболочки до постоянной температуры θ_0 , определяемые на основании решений сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости ГНО в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 & u_{,11}^0 + \frac{1-\nu}{2}u_{,22}^0 + \frac{1+\nu}{2}v_{,12}^0 - (1-\nu)k_{12}w_{,2}^0 + \\
 & + \frac{1-\nu}{2} \sum_i \frac{h_i}{h} a_i (u_{,22}^0 + v_{,12}^0 - 2k_{12}w_{,2}^0) \delta(x - x_i) = 0, \\
 & \frac{1+\nu}{2}u_{,12}^0 + v_{,22}^0 + \frac{1-\nu}{2}v_{,11}^0 - (1-\nu)k_{12}w_{,1}^0 + \sum_i \frac{h_i}{h} a_i (v_{,22}^0 + \nu u_{,12}^0) \delta(x - x_i) = 0, \\
 & v_{,1}^0 + u_{,2}^0 - 2k_{12}w^0 - 2k_{12} \sum_i \frac{h_i}{h} a_i w^0 \delta(x - x_i) = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Решения сингулярной системы (2) при неоднородных краевых условиях:



при $x = 0, x = a$: $u_{,2}^0 + v_{,1}^0 - 2k_{12}w^0 = 0, u_{,1}^0 + \nu v_{,2}^0 = \alpha(1 + \nu)\theta_0$;
 при $y = 0, y = b$: $u_{,2}^0 + v_{,1}^0 - 2k_{12}w^0 = 0, v^0 = 0$;

запишутся в элементарных функциях

$$u^0 = \alpha(1 + \nu)\theta_0, \quad v^0 = 0, \quad w^0 = 0. \quad (3)$$

На основании (3) тангенциальные усилия примут вид

$$T_0^{11} = T_0^{12} = 0, \quad T_0^{22} = -Eh\alpha\theta_0, \quad (4)$$

где α — коэффициент линейного расширения материала оболочки. Следует отметить, что эти усилия нечувствительны к параметру кручения оболочки и имеют тот же вид в случае цилиндрической оболочки или пластинки [20, 21].

Решения системы (1) (в которой отсутствуют инерционные слагаемые в тангенциальной плоскости [22]), тождественно удовлетворяющие условиям шарнирного закрепления всех сторон оболочки постоянного кручения:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = a: \quad u_{,2} + v_{,1} - 2k_{12}w = 0, \quad u_{,1} + \nu v_{,2} = 0, \quad w = 0, \quad w_{,11} = 0, \\ y = 0, \quad y = b: \quad u_{,2} + v_{,1} - 2k_{12}w = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w_{,22} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \tilde{u}(t)u_1(x)u_2(y), \quad v(x, y, t) = \tilde{v}(t)v_1(x)v_2(y); \\ w(x, y, t) &= w_{11}(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + w_{12}(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_1(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^2$, $u_2(y) = -\frac{2}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^3 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$, $v_1(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^2$, $v_2(y) = \frac{y}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right)$.

Первые два уравнения системы (1) на основании подстановок (6) с последующим применением процедуры Галёркина приводятся к виду

$$\begin{aligned} e_{11}\tilde{u}(t) + e_{12}\tilde{v} &= (1 - \nu)k_{12}a\pi (w_{11}I_4 + 2w_{12}I_5), \\ e_{21}\tilde{u} + e_{22}\tilde{v} &= (1 - \nu)k_{12}a\pi \frac{b}{a} (w_{11}I_9 + w_{12}I_{10}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{b}{a}I_1 + \frac{1 - \nu a}{2} \frac{I_2}{b} + \varepsilon_1 \frac{1 - \nu a}{2} \frac{G_1}{b} \sum_i \frac{h_i a_i}{h} \frac{a_i}{a} u_1^2 \left(\frac{x_i}{a}\right), \\ e_{12} &= \frac{1 + \nu}{2} I_3 + \varepsilon_1 \frac{1 - \nu}{2} G_2 \sum_i \frac{h_i a_i}{h} \frac{a_i}{a} v_{1,1} \left(\frac{x_i}{a}\right) u_1 \left(\frac{x_i}{a}\right), \\ e_{21} &= \frac{1 + \nu}{2} I_3 + \varepsilon_2 \nu G_3 \sum_i \frac{h_i a_i}{h} \frac{a_i}{a} u_{1,1} \left(\frac{x_i}{a}\right) v_1 \left(\frac{x_i}{a}\right), \\ e_{22} &= \frac{a}{b} I_7 + \frac{1 - \nu b}{2} \frac{I_8}{a} + \varepsilon \frac{a}{b} G_4 \sum_i \frac{h_i a_i}{h} \frac{a_i}{a} v_1^2 \left(\frac{x_i}{a}\right), \end{aligned}$$

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \quad I_1 = \int_0^1 \int_0^1 u_{1,11} u_1 u_2^2 dX dY, \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 u_1^2 u_{2,22} dX dY,$$



$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 v_{1,1} u_1 u_{2,2} u_2 dX dY, \quad I_4 = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi X) u_1 \cos(\pi Y) u_2 dX dY,$$

$$I_5 = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi X) u_1 \cos(2\pi Y) u_2 dX dY, \dots,$$

$$I_{13} = \int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\pi X) \cos(2\pi Y) \sin(\pi Y) dX dY, \quad I_{14} = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi X) u_1 \sin(2\pi Y) u_{2,2} dX dY,$$

$$I_{15} = \int_0^1 \int_0^1 \sin(\pi X) v_{1,1} \sin(2\pi Y) v_2 dX dY, \quad I_{16} = \int_0^1 \sin(2\pi Y) \cos(\pi Y) dX dY,$$

$$G_1 = \int_0^1 u_{2,22} u_2 dY, \quad G_2 = \int_0^1 v_{2,2} u_2 dY, \quad G_3 = \int_0^1 u_{2,2} v_2 dY, \quad G_4 = \int_0^1 v_{2,22} v_2 dY.$$

На основании решений алгебраической системы (7) функции $\tilde{u}(t)$, $\tilde{v}(t)$ запишутся

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \frac{(1-\nu)k_{12}a\pi}{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}} \left((e_{22}I_4 - e_{12}I_9) w_{11} + \left(e_{22}I_5 - e_{12}\frac{b}{a}I_{10} \right) w_{12} \right) u_1 u_2, \\ \tilde{v}(t) &= \frac{(1-\nu)k_{12}a\pi}{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}} \left(\left(\frac{b}{a}e_{11}I_9 - e_{21}I_4 \right) w_{11} + \left(\frac{b}{a}e_{11}I_{10} - 2e_{21}I_5 \right) w_{12} \right) v_1 v_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Из третьего уравнения системы (1) путем аналогичных преобразований получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $w_{11}(t)$ и $w_{12}(t)$:

$$\xi_{11} [w_{11}(t)] + \xi_{12} w_{12}(t) = 0, \quad \xi_{21} w_{11}(t) + \xi_{22} [w_{12}(t)] = 0, \quad (9)$$

где ξ_{11} , ξ_{22} , ξ_{12} и ξ_{21} — дифференциальные операторы и числа:

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \frac{\gamma ha^4}{gD} \left(1 + 2 \sum_i \tilde{\beta}_i^s \right) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\mu ha^4}{D} \frac{d}{dt} + f_{11} \left(k_{12}, \theta_0, \frac{a_i}{a} \right), \\ \xi_{12} &= 8 \frac{p_0 \nu Ma^3 a\pi}{D b} I_{13} - \tilde{f}_{12}(k_{12}), \quad \xi_{21} = 2 \frac{p_0 \nu Ma^3 a\pi}{D b} I_{16} - \tilde{f}_{11}(k_{12}), \\ \xi_{22} &= \frac{\gamma ha^4}{gD} \left(1 + 2 \sum_i \tilde{\beta}_i^s \right) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\mu ha^4}{D} \frac{d}{dt} + f_{12} \left(k_{12}, \theta_0, \frac{a_i}{a} \right), \end{aligned}$$

в которых обозначено:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \left(\pi^2 + \left(\frac{a\pi}{b} \right)^2 \right)^2 + 96(1-\nu) \left(\frac{a}{h} \right)^2 (k_{12}a)^2 - \\ &- 48(1-\nu)^2 (k_{12}a)^2 \frac{a}{b} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \pi \frac{L_1 I_{11} + L_2 I_{12} \frac{b}{a}}{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}} - 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{a\pi}{b} \right)^2 \alpha \theta_0 \left(1 + 2 \sum_i \tilde{\beta}_i^s \right) + \\ &+ 2 \left(\frac{a\pi}{b} \right)^4 \sum_i \beta_i^s + 4(1-\nu)\pi^2 \left(\frac{a\pi}{b} \right)^2 \sum_i \tilde{\beta}_i^c + 48(1-\nu) \left(\frac{a}{h} \right)^2 (k_{12}a)^2 \sum_i \tilde{\beta}_i^s, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{f}_{12} &= 48(1-\nu)^2(k_{12}a)\frac{a}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{L_3I_{11}+L_4I_{12}\frac{b}{a}}{e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}}, \\ f_{12} &= \left(\pi^2+\left(\frac{2a\pi}{b}\right)^2\right)^2+96(1-\nu)\left(\frac{a}{h}\right)^2(k_{12}a)^2- \\ &-48(1-\nu)^2(k_{12}a)^2\frac{a}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^2\pi\frac{L_3I_{14}+L_4I_{15}\frac{b}{a}}{e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}}-12(1-\nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\frac{2a\pi}{b}\right)^2\alpha\theta_0\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)+ \\ &+2\left(\frac{2a\pi}{b}\right)^4\sum_i\beta_i^s+4(1-\nu)\pi^2\left(\frac{2a\pi}{b}\right)^2\sum_i\tilde{\beta}_i^c+48(1-\nu)\left(\frac{a}{h}\right)^2(k_{12}a)^2\sum_i\tilde{\beta}_i^s, \\ \tilde{f}_{12} &= 48(1-\nu)^2(k_{12}a)\frac{a}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{L_1I_{14}+L_2I_{15}\frac{b}{a}}{e_{11}e_{22}-e_{12}e_{21}}. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (9) подстановкой

$$w_{11} = -\xi_{12}\Phi(t), \quad w_{12} = \xi_{11}[\Phi(t)] \tag{10}$$

сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка, которое, в случае отсутствия демпфирования ($\mu = 0$), запишется

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2\frac{d^4\Phi}{dt^4}+\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)(f_{11}+f_{12})\frac{d^2\Phi}{dt^2}+ \\ &+\left(f_{11}f_{12}-\left(\frac{p_0\kappa Ma^3}{D}8\frac{a\pi}{b}I_{13}-\tilde{f}_{12}\right)\left(\frac{p_0\kappa Ma^3}{D}2\frac{a\pi}{b}I_{16}-\tilde{f}_{11}\right)\right)\Phi=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Из условия, когда дискриминант характеристического уравнения для дифференциального уравнения (11) больше нуля, определяется предельная скорость потока, начиная с которой, прогиб ГНО неограниченно увеличивается со временем:

$$\frac{v_y}{c_0} = \frac{D}{p_0\kappa a^3}\left(\frac{p_{12}\tilde{f}_{11}+p_{11}\tilde{f}_{12}}{2p_{11}p_{12}}+\frac{\sqrt{(p_{12}\tilde{f}_{11}+p_{11}\tilde{f})^2-4p_{11}p_{12}\left(\tilde{f}_{11}\tilde{f}_{12}-f_{11}f_{12}+\frac{(f_{11}+f_{12})^2}{4}\right)}}{2p_{11}p_{12}}\right).$$

В случае когда $\mu \neq 0$, дифференциальное уравнение для функции $\Phi(t)$ примет вид

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4}+2e_1\frac{d^3\Phi}{dt^3}+e_3\frac{d^2\Phi}{dt^2}+e_4\frac{d\Phi}{dt}+e_5\Phi=0, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\mu g}{\gamma\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)}, & e_3 &= \frac{\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)(f_{11}+f_{12})+\left(\frac{\mu ha^4}{D}\right)^2}{\left(\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2}, \\ e_4 &= \frac{\frac{\gamma ha^4}{gD}(f_{11}+f_{12})}{\left(\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2}, & e_5 &= \frac{f_{11}f_{12}-\left(-\tilde{M}\frac{8\pi a}{b}I_{13}+\tilde{f}_{12}\right)\left(-\tilde{M}\frac{2\pi a}{b}I_{16}+\tilde{f}_{11}\right)}{\left(\frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1+2\sum_i\tilde{\beta}_i^s\right)\right)^2}. \end{aligned}$$



При учете демпфирования возникает вопрос об устойчивости системы (9), которая сведена к одному дифференциальному уравнению (12). В этом случае значение предельной скорости потока определяется на основании критерия Гурвица [23]:

$$\Delta_1 = 2e_1 > 0, \quad \Delta_2 = 2e_1e_3 - e_4 > 0, \quad \Delta_3 = 2e_1e_3 - e_4^2 - 4e_1^2e_5 > 0.$$

Условие, при котором хотя бы один из четырех корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения (12) будет положительным, определяет предельное значение относительной скорости потока газа v/c_0 , при котором прогиб термоупругой системы растет во времени:

$$\frac{v_y}{c_0} = \frac{D}{p_0 \alpha a^3} \left(\frac{p_{12} \tilde{f}_{11} + p_{11} \tilde{f}_{12}}{2p_{11}p_{12}} + \sqrt{\frac{(p_{12} \tilde{f}_{11} + p_{11} \tilde{f}_{12})^2 - 4p_{11}p_{12} \left(\tilde{f}_{11} \tilde{f}_{12} - f_{11} f_{12} + \left(\frac{\gamma h a^4}{g D} (1 + 2 \sum_i \tilde{\beta}_i^s) \right)^2 S \right)}{2p_{11}p_{12}}} \right).$$

Здесь обозначено $p_{11} = \frac{2a\pi}{b} I_{16}$, $p_{12} = \frac{8a\pi}{b} I_{13}$, $S = \frac{2e_1e_3e_4 - e_4^2}{4e_1^2}$.

Кривизна полой оболочки постоянного кручения задавалась в виде $k_{12} = \frac{\tilde{\delta}}{ab}$ [24], где $\tilde{\delta}$ — наибольший подъем оболочки над планом. Параметр относительной кривизны \tilde{k}_{12} запишется $\tilde{k}_{12} = k_{12}a = \frac{\tilde{\delta} a h}{h b a}$, где $\frac{\tilde{\delta}}{h} \in [0, 5]$ [25].

Количественные результаты представлены в табл. 1–4. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $h/a = 0.01$, $a_i/a = 0.01$, $\mu = 0.01$, $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} \frac{1}{град}$.

Таблица 1 / Table 1

Значения v_y/c_0 при $\theta_0 = 1$ и $a/b = 1$ [The values of v_y/c_0 for $\theta_0 = 1$ and $a/b = 1$]

h_i/h	2.5			5			2.5			5		
\tilde{k}_{12}	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
n	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$						$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$					
1	2.75	4.23	6.90	3.71	5.11	7.75	2.75	4.23	6.90	3.71	5.11	7.75
2	3.22	4.66	7.32	5.78	7.11	9.73	3.22	4.66	7.32	5.78	7.11	9.73
3	3.67	5.07	7.71	7.59	8.85	11.45	3.67	5.07	7.71	7.59	8.85	11.45

Таблица 2 / Table 2

Значения v_y/c_0 при $\theta_0 = 2$ и $a/b = 1$ [The values of v_y/c_0 for $\theta_0 = 2$ and $a/b = 1$]

h_i/h	2.5			5			2.5			5		
\tilde{k}_{12}	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
n	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$						$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$					
1	2.51	3.99	6.64	3.45	4.85	7.48	2.51	3.99	6.64	3.45	4.85	7.48
2	2.96	4.40	7.05	5.48	6.81	9.41	2.96	4.40	7.05	5.48	6.81	9.41
3	3.41	4.80	7.43	7.21	8.51	11.10	3.41	4.80	7.43	7.21	8.51	11.10



Таблица 3 / Table 3

Значения v_y/c_0 при $\theta_0 = 14$ и $a/b = 1$ [The values of v_y/c_0 for $\theta_0 = 14$ and $a/b = 1$]

h_i/h	2.5			5			2.5			5		
\tilde{k}_{12}	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
n	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$						$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$					
1	1.04	2.51	5.07	1.93	3.27	5.81	1.04	2.51	5.07	1.93	3.27	5.81
2	1.43	2.81	5.37	3.62	4.90	7.45	1.43	2.81	5.37	3.62	4.90	7.45
3	1.81	3.13	5.67	5.05	6.35	8.93	1.81	3.13	5.67	5.05	6.35	8.93

Таблица 4 / Table 4

Значения v_y/c_0 при $\theta_0 = 2$ и $a/b = 2$
The values of v_y/c_0 for $\theta_0 = 2$ and $a/b = 2$

h_i/h	2.5			5		
\tilde{k}_{12}	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
n	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$					
1	11.74	12.57	14.14	20.14	20.81	22.12
2	14.77	15.52	16.97	32.47	33.09	34.32
3	16.66	17.37	18.77	39.83	40.44	41.66
n	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$					
1	11.74	12.58	14.17	20.14	20.83	22.17
2	14.77	15.54	17.02	32.47	33.11	34.39
3	16.66	17.39	18.82	39.84	40.47	41.72

Количественный анализ обнаружил ряд закономерностей влияния геометрических параметров и температуры на величину относительной предельной скорости потока, начиная с которой, прогибы термоупругой системы «оболочка-ребра» увеличиваются со временем.

1. Существенное влияние на относительную предельную скорость потока оказывают параметры относительной высоты ребер — h_i/h , их число n и отношение сторон плана оболочки a/b . Путем подбора

этих параметров в каждом конкретном случае можно значительно увеличить предельную скорость потока (см. табл. 1–4).

2. Во всех случаях нагрев оболочки уменьшает величину предельной скорости потока, и тем сильнее, чем больше относительная высота подкрепляющих элементов — h_i/h . Этот факт объясняется тем, что прогибы тонкостенной нагретой гладкой оболочки значительно меньше прогибов подкрепленной оболочки при прочих равных условиях [24].

3. С увеличением параметра относительного кручения оболочки предельная скорость потока существенно возрастает (см. табл. 1–3). Эта закономерность зависит от отношения сторон плана оболочки. При $a/b \geq 2$ предельные скорости потока становятся малочувствительными к изменению параметра \tilde{k}_{12} . При этом их значения значительно увеличиваются — оболочка становится динамически устойчивой при весьма больших скоростях потока (см. табл. 4).

4. Удержание в первых двух дифференциальных уравнениях динамической термоустойчивости (1) слагаемых, учитывающих (на языке дискретно-континуальной модели) «растяжение – сжатие» ребер и их «сдвиг» в тангенциальной плоскости (эти слагаемые содержатся в уравнениях системы со знаковыми числами), практически не влияет на предельные скорости потока и, следовательно, учитывать их в уравнениях нет необходимости. Этот факт отмечается и в случае цилиндрической оболочки [21].

Следует отметить, что при значениях параметров $k_{12} = 0$, $a_i/a = 0$, $\theta_0 = 0$ полученные выше решения принимают вид решений, приведенных в книге [26].



Благодарности. Работа выполнена по теме государственного задания Минобрнауки России (проект № 9.8570.2017/8.9).

Библиографический список

1. *Рассудов В. М.* Деформации пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости // Учен. зап. СГУ. Вып. механический. 1956. Т. 52. С. 51–91.
2. *Ростовцев Г. Г.* Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости // Труды ЛИИГ ВФ. 1940. Вып. 20. С. 14–18.
3. *Новожилов В. В.* Расчет напряжений в конструкциях корпуса подводных лодок с учетом влияния поперечных переборок. М. : Оборонгиз, 1945. 60 с.
4. *Прокопов В.К.* Скелетный метод расчета оребренной цилиндрической оболочки // Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та. 1957. № 12. С. 18–29.
5. *Абовский Н. П.* О вариационных уравнениях для гибких ребристых и других конструктивно-анизотропных пологих оболочек // Теория пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. С. 4–7.
6. *Жилин П. А.* Общая теория ребристых оболочек // Труды ЦКТИ. Вып. 88 : Прочность гидротурбин / ред. Н. Н. Ковалев. Л. : Изд-во ЦКТИ, 1968. С. 46–70.
7. *Белосточный Г. Н., Ульянова О. И.* Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 182–192.
8. *Жилин П. А.* Линейная теория ребристых оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 150–166.
9. *Белосточный Г. Н., Рассудов В. М.* Континуальная модель термочувствительной ортотропной системы «оболочка-ребра» с учетом влияния больших прогибов // Механика деформируемых сред : сб. ст. Саратов : Изд-во Саратов. политехн. ин-та, 1983. Вып. 8. С. 10–22.
10. *Белосточный Г. Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Акад. воен. наук. 1999. № 1. С. 14–26.
11. *Карпов В. В., Сальников А. Ю.* Вариационный метод вывода нелинейных уравнений движения пологих ребристых оболочек // Вестн. гражд. инженеров. 2008. № 4 (17). С. 121–124.
12. *Михайлов Б. К.* Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 196 с.
13. *Геккелер И. В.* Статика упругого тела. Л. ; М. : ОНТИ, Гос. технико-теорет. изд-во, 1934. 287 с.
14. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. М. : Наука, 1979. 320 с.
15. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е.* Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 4. С. 91–96.
16. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Выпучивание и установившийся флайер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке // Инж. журн. 1961. № 2. С. 82–96.
17. *Мовчан А. А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20, № 2. С. 211–222.
18. *Дун Мин-дэ.* Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 4. С. 726–729.
19. *Болотин В. В.* Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Расчеты на прочность : сб. М. : Машгиз, 1960. Вып. 6. С. 190–216.
20. *Мильцина О. А., Белосточный Г. Н.* Устойчивость нагретой ортотропной геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2017. № 4. С. 109–120. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>



21. Белосточный Г. Н., Мылцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
22. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963. 419 с.
23. Егоров К. В. Основы теории автоматического регулирования. М. : Энергия, 1967. 648 с.
24. Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1973. 155 с.
25. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л. ; М. : Стройиздат, 1966. 304 с.
26. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.

Образец для цитирования:

Белосточный Г. Н., Мылцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой оболочки постоянного кручения в сверхзвуковом потоке газа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 397–408. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408>

Dynamic Stability of Heated Geometrically Irregular Shallow Shell of Constant Torsion in Supersonic Gas Flow

G. N. Belostochny, O. A. Myltcina

Grigory N. Belostochnyi, <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, belostochny@mail.ru

Olga A. Myltcina, <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, omyltcina@yandex.ru

Heated until invariable temperature, geometrically irregular shallow shell of constant torsion blown by supersonic gas flow from one side of the main surfaces was considered. As the basis, a continual model of thermoelastic system “shell-ribs” was taken. Singular differential equations of dynamical thermostability of geometrically irregular shallow shell had summands containing “stretch-compression” and “shift” of the ribs. Tangential forces caused by heating of the shell and transversal strain were recorded by “piston theory” in a standard way. Tangential forces were preliminarily defined on the basis of the solutions of singular differential equations of momentless thermoelasticity in displacements with inhomogeneous edge conditions and were contained in a Brian form. The solution of the system of dynamical equations of thermoelasticity of the shell was searched for in the form of the sum of the double trigonometric series with time coordinate variable coefficients for bending function and polynomials for the tangential components of the field of displacement. On the basis of Galerkin procedure the system of differential equations for the coefficients of approximated series was defined. Then it was reduced to one differential equation of the fourth order. The solution was obtained in the second approximation, which corresponded to two half-waves along the flow and one half-wave in perpendicular direction. Critical values of relative flow rates were defined using standard techniques of the analysis of dynamical stability of geometrically irregular shallow shell. Quantitative results were presented in the tables showing the dependence of geometrical parameters of the elastic system and temperature on the values of critical rates.



Keywords: dynamic thermal stability, shallow shell, supersonic gas flow, singularity, aerodynamics, critical velocities, stiffeners.

Received: 14.05.2019 / Accepted: 30.06.2019 / Published: 02.12.2019

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Ministry of Education and Science (project No. 9.8570.2017/8.9).

References

1. Rassudov V. M. Deformations of gently sloping shells supported by stiffeners. *Uchenye zapiski SGU. Vyp. mekhanicheskiy*, 1956, vol. 52, pp. 51–91 (in Russian).
2. Rostovtsev G. G. Calculation of thin flat skin reinforced with stiffeners. *Trudy LIIG VF*, 1940, iss. 20, pp. 14–18 (in Russian).
3. Novozhilov V. V. *Raschet napryazheniy v konstruktsiyakh korpusa podvodnykh lodok s uchetom vliyaniya poperechnykh pereborok* [Calculation of stresses in submarine hull structures taking into account the influence of transverse bulkheads]. Moscow, Oborongiz, 1945. 60 p. (in Russian).
4. Prokopov V. K. Skeletal method for calculating a finned cylindrical shell. In: *Nauchno-tekhn. inform. byul. Leningr. politekhn. in-ta*, 1957, no. 12, pp. 18–29 (in Russian).
5. Abovskii N. P. On variational equations for flexible ribbed and other structurally anisotropic flat shells. In: *Teoriya plastin i obolochek* [Theory of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1974, pp. 4–7 (in Russian).
6. Zhilin P. A. General theory of ribbed shells. In: *Trudy TsKTI. Vyp. 88: Prochnost' gidroturbin* [Proc. of the Central Turbine Boiler Institute. Iss. 88: Strength of hydraulic turbines]. Leningrad, Izd-vo TsKTI, 1968, pp. 46–70 (in Russian).
7. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 184–191. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>
8. Zhilin P. A. Linear theory of ribbed shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Tverdogo Tela* [The Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Mechanics of Solids], 1970, no. 4, pp. 150–166 (in Russian).
9. Belostochnyi G. N., Rassudov V. M. Continuum model of orthotropic heat-sensitive “shell-ribs” system taking into account the influence of large deflection. *Mekhanika deformiruemyykh sred* [Mechanics of Deformable Media. Collected of Article]. Saratov, Izd-vo Saratov. polytekhn. in-ta, 1983. Iss. 8, pp. 10–22 (in Russian).
10. Belostochnyi G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells. *Doklady Akademii voennykh nauk* [Reports of the Academy of Military Sciences], 1999, no. 1, pp. 14–26 (in Russian).
11. Karpov V. V., Sal'nikov A. Yu. Variation method of getting nonlinear equations of flat ribbed shells' movement. *Vestnik Grazhdanskikh Inzhenerov* [Bulletin of Civil Engineers], 2008, no. 4 (17), pp. 121–124 (in Russian).
12. Mikhailov B. K. *Plastiny i obolochki s razryvnymi parametrami* [Plates and shells with discontinuous parameters]. Leningrad, Leningrad Univ. Press, 1980. 196 p. (in Russian).
13. Gekker I. V. *Statika uprugogo tela* [Statics of an elastic body]. Leningrad, Moscow, ONTI, 1934. 287 p. (in Russian).
14. Vol'mir A. S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza* [The shells in flow liquid and gas]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).



15. Ambartsumyan S. A., Bagdasaryan Zh. E. Of the stability of orthotropic plates streamlined by a supersonic gas flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, OTN, Mekhanika i Mashinostroenie* [The Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Engineering, Mechanics and Engineering], 1961, no. 4, pp. 91–96 (in Russian).
16. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. Buckling and steady-state flayer thermally compressed panels in supersonic flow. *Inzhenernyi Zhurnal* [Engineering Journal], 1961, no. 2, pp. 82–96 (in Russian).
17. Movchan A. A. Oscillations of the plate moving in the gas. *Prikladnaia Matematika i Mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1956, vol. 20, no. 2, pp. 211–222 (in Russian).
18. Tung Ming-teh. The stability of an elastic plate in a supersonic flow. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* [The Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1958, vol. 120, no. 4, pp. 726–729 (in Russian).
19. Bolotin V. V. Thermal buckling of plates and shallow shells in a supersonic gas flow. *Raschety na prochnost'* [Strength Calculations]. Moscow, Mashgiz, 1960. Iss. 6, pp. 190–216 (in Russian).
20. Myltcina O. A., Belostochnyi G. N. Stability of heated orthotropic geometrically irregular plate in a supersonic gas flow. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 109–120 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>
21. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 750–761 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
22. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoichivosti obolochek* [Questions of dynamics and stability of shells]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1963. 419 p. (in Russian).
23. Egorov K. V. *Osnovy teorii avtomaticheskogo redulirovaniia* [Fundamentals of the theory of automatic control]. Moscow, Energiia, 1967. 648 p. (in Russian).
24. Rassudov V. M., Krasiukov V. P., Pankratov N. D. *Nekotorye zadachi termouprugosti platinok i pologikh obolochek* [Some problems of thermoelasticity of plates and flat covers]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 1973. 155 p. (in Russian).
25. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta pologikh obolocher* [Fundamentals of the theory and methods for designing shallow shells]. Leningrad, Moscow, Stroyizdat, 1966. 304 p. (in Russian).
26. Vol'mir A. S. *Ustoichivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).

Cite this article as:

Belostochny G. N., Myltcina O. A. Dynamic Stability of Heated Geometrically Irregular Shallow Shell of Constant Torsion in Supersonic Gas Flow. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 397–408 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-397-408>
