УДК 539.374

О волновых решениях динамических уравнений гемитропной микрополярной термоупругости

В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев

Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента и финансового права, Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, г. Москва, ул. Сретенка, д. 28, kovalev.kam@gmail.com

Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, г. Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

В работе рассматриваются связанные термические и динамические уравнения гемитропной термоупругой микрополярной среды относительно подлежащих определению полей перемещений, микровращений и температуры. Механизм теплопроводности предполагается термодиффузионным. Определяющие постоянные гемитропного термоупругого тела редуцированы к минимальному набору, обеспечивающему его термоупругую полуизотропность. Изучаются решения связанных уравнений в форме распространяющихся плоских волн. Определены их пространственные поляризации. Получено бикубическое уравнение для определения волновых чисел и установлено, что для связанной волны существует ровно три нормальных комплексных волновых числа. Найдены соотношения, связывающие комплексные амплитуды перемещений и микровращений с амплитудой температурного инкремента в термоупругой волне. Исследуется также атермическая волна. Пространственные поляризации в этом случае образуют (вместе с волновым вектором) триэдр взаимно ортогональных направлений. Для атермической волны находятся (в зависимости от случая) либо два вещественных нормальных волновых числа, либо одно.

Ключевые слова: гемитропный, микрополярный, термоупругий, плоская волна, волновое число, поляризация, атермическая волна.

Поступила в редакцию: 13.05.2019 / Принята: 10.06.2019 / Опубликована: 02.12.2019

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Механика гемитропных микрополярных сред интенсивно развивается благодаря важной теоретической значимости ее результатов и методов для всей механики деформируемого твердого тела, а также широкому кругу прикладных задач, где она выступает как основа моделирования термомеханического поведения современных материалов и конструкций. Речь идет о биологических материалах (кожа, кости, сосуды), применяемых в трансплантологии медицинских материалах, сотовых конструкциях, керамиках, пенах. Механике микрополярных сред в настоящее время отводится важное место в той части механики континуума, которая называется неклассической [1].

Теория связанной термоупругости микрополярных тел к настоящему времени носит почти завершенный характер (см., например, [2, 3], где имеются также указания на ранние работы). Слово *почти* характеризует значительные проблемы, возникающие для анизотропных микрополярных тел. Для них имеется 171 материальная постоянная, поэтому оперирование с уравнениями для анизотропных микрополярных тел представляет существенные трудности. В гемитропной теории остается всего девять определяющих констант, на три больше, чем в изотропном случае. Группа материальной симметрии гемитропного тела состоит из всех собственных ортогональных преобразований трехмерного пространства, но не включает такие ортогональные преобразования, которые изменяют ориентацию пространства, например инверсию.

2. ПЛОСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В ГЕМИТРОПНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ: ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА И ПОЛЯРИЗАЦИИ

Теория гемитропного тела, основанная на трех линейных мерах деформации, а именно симметричного тензора малой деформации, вектора относительного микровращения и пространственного градиента вектора полного микровращения (тензора изгиба – кручения), развита в [4]). Девять определяющих постоянных выбраны так, чтобы выделить характерный линейный размер микрополярной среды. Этот подход применим также и термоупругим моделям. Если воспользоваться конвенциональными обозначениями [2, 5], то динамические уравнения для перемещений и микровращений в гемитропной термоупругой микрополярной среде можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases}(\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+(\chi+\nu)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+\\ +(\chi-\nu+\kappa)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-\eta\boldsymbol{\nabla}\theta=\rho\ddot{\mathbf{u}},\\ (\chi+\nu)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+(\chi-\nu+\kappa)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}+(\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}+\\ +(\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}+4\nu\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}-4\alpha\boldsymbol{\phi}-\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta=\mathfrak{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}},\end{cases}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\boldsymbol{\phi}$ — вектор микровращений, θ — превышение температуры над отсчетной температурой θ_0, ρ — плотность, $\mathfrak{J}$ — коэффициент микроинерции, $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный оператор Гамильтона, остальные греческие символы обозначают механические и термомеханические постоянные (среди них η, ς обеспечивают термомеханическую связанность уравнений).

Распространение тепла в гемитропной среде в случае термодиффузионного механизма передачи тепла определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{c}{k}\partial_{.}\theta=\nabla^i\nabla_i\theta-\frac{\theta_0}{k}(\eta\partial_{.}\epsilon_{j\cdot}^{\cdot j}+\varsigma\partial_{.}\kappa_{j\cdot}^{\cdot j}). \tag{1}$$

Здесь $\epsilon_{ij}=\nabla_i u_j-e_{ijk}\phi^k$ — асимметричный тензор деформации (e_{ijk} — тензор перестановок); ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования; $\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}=\nabla_i\phi^s$ — тензор изгиба – кручения; $\partial_{.}$ — оператор частного дифференцирования по времени (тот же самый, что и точка сверху над символом); k — коэффициент теплопроводности; c — теплоемкость единицы объема при постоянной нулевой деформации; $\eta=2G\dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\overset{*}{\alpha}$, G — упругий модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\overset{*}{\alpha}$ — коэффициент линейного теплового расширения; $\varsigma=2GL^2\overset{*}{\beta}$, $GL^2=\gamma$, L — характерная длина микрополярной теории, $\overset{*}{\beta}$ — коэффициент теплового искажения (the thermal wryness coefficient).

Уравнение теплопроводности (1) дополняет динамические уравнения до замкнутой системы.

Заметим, что вопросам связанной термоупругости (и в том числе динамическим задачам) посвящены известные монографии [6, 7], а также книга [8].

Для оптимизации формы уравнения теплопроводности (1) введем новые постоянные $k' = k/\theta_0$, $c' = c/\theta_0$, а затем выполним переобозначения $k' \to \mathfrak{k}$, $c' \to \mathfrak{c}$ с тем, чтобы сохранить символы k, c соответственно за волновым числом и фазовой скоростью волны [9, 10] (см. также [11] по поводу обобщения на нелинейно упругие волны).

В дальнейшем рассматривается упрощенный вариант связанных уравнений термомеханики гемитропной среды, когда из полного набора гемитропных слагаемых остается только температурный градиент $\varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta$. В результате приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\mu-\alpha+\lambda)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi} - \eta\boldsymbol{\nabla}\theta = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \\ (\gamma+\varepsilon)\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi} + (\gamma-\varepsilon+\beta)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + 2\alpha\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} - 4\alpha\boldsymbol{\phi} - \varsigma\boldsymbol{\nabla}\theta = \Im\ddot{\boldsymbol{\phi}}, \\ \dfrac{c'}{k'}\dot{\theta} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - \dfrac{1}{k'}(\eta\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{u}} + \varsigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}}). \end{cases} \tag{2}$$

Исследуем решения этой системы в форме плоских волн перемещений, микровращений и температуры:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{S}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \theta = Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{3}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; $\mathbf{k}$ — (комплексный) волновой вектор; ω — циклическая частота; $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ — (комплексные) векторы пространственной поляризации волны; B — (комплексная) амплитуда температурного инкремента.

Волновой вектор $\mathbf{k}$ и векторы поляризации волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ должны удовлетворять уравнениям ($k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$)

$$\begin{aligned} &-(\mu-\alpha+\lambda)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A})\mathbf{k} - [(\mu+\alpha)k^2 - \rho\omega^2]\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{S} - \eta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ &-(\gamma-\varepsilon+\beta)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S})\mathbf{k} - [(\gamma+\varepsilon)k^2 + 4\alpha - \Im\omega^2]\mathbf{A} + 2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{A} - \varsigma i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ &-k^2B + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{k}}i\omega B - \frac{\eta}{\mathfrak{k}}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}) - \frac{\varsigma}{\mathfrak{k}}\omega(\mathbf{k}\cdot\mathbf{S}) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

которые получаются в результате подстановки вектора перемещений, вектора микровращений и температуры в плоской волне (3) в систему дифференциальных уравнений (2).

С помощью системы уравнений (4) сразу же определяются проекции векторов поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} &= \frac{\eta i k^2 B}{-(\lambda+\mu-\alpha)k^2 - (\mu+\alpha)k^2 + \rho\omega^2}, \\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{k} &= \frac{\varsigma i k^2 B}{-(\beta+\gamma-\varepsilon)k^2 - (\gamma+\varepsilon)k^2 - 4\alpha + \Im\omega^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Как показывают только что полученные формулы, в связанной термоупругой волне ($B \neq 0$) оба вектора поляризации $\mathbf{A}$ и $\mathbf{S}$ имеют ненулевые проекции на волновой вектор $\mathbf{k}$, т.е. указанная волна всегда содержит продольные составляющие перемещений и микровращений. Более того, можно показать, что она является чисто поперечной, т.е. поперечные составляющие перемещений и микровращений равны нулю. Упомянутые проекции легко исключаются из системы уравнений (4), поскольку достаточно просто выражаются через комплексную амплитуду инкремента температуры B. В частности, их исключение возможно в третьем уравнении рассматриваемой системы. Поскольку комплексная амплитуда инкремента температуры отлична от нуля в термической волне, то для квадрата волнового числа сразу же получается отдельное уравнение. Вводя безразмерное волновое число $\widetilde{k} = k/k_{\parallel}$ и опуская тильду, имеем

$$\frac{s^2}{i\omega'}k^2 + \frac{s_{\parallel}^2 k^2}{1-k^2} + \frac{{}_{\mu}s_{\parallel}^2 k^2}{1 - \dfrac{1}{\omega'^2} - d_{\parallel}^2 k^2} = 1, \tag{6}$$

где $\omega' = \dfrac{\omega}{\Omega}$, $\Omega^2 = \dfrac{4\alpha}{\mathfrak{J}}$; $s^2 = \dfrac{\Omega\mathfrak{k}}{\mathfrak{c}c_{\parallel}^2}$, $c_{\parallel}^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$; $s_{\parallel}^2 = \dfrac{\eta^2}{\rho\mathfrak{k}c_{\parallel}^2}$; ${}_{\mu}s_{\parallel}^2 = \dfrac{\varsigma^2}{\mathfrak{J}\mathfrak{k}c_{\parallel}^2}$; $d_{\parallel}^2 = \dfrac{{}_{\mu}c_{\parallel}^2}{c_{\parallel}^2}$, ${}_{\mu}c_{\parallel}^2 = \dfrac{\beta+2\gamma}{\mathfrak{J}}$.

Заметим, что уравнение (6) теряет смысл для волновых чисел

$$k^2 = 1, \qquad k^2 = d_{\parallel}^{-2}(1-\omega'^{-2}).$$

Несложно показать, что данным волновым числам могут соответствовать только холодные атермические волны, характеризующиеся условием $B = 0$.

Если вместо частоты оперировать с величиной $\tau^{-1} = i\omega'$, то для квадрата волнового числа можно получить бикубическое уравнение

$$e_0k^6 + e_1k^4 + e_2k^2 + e_3 = 0 \tag{7}$$

с коэффициентами

$$e_0 = -i(i\tau)s^2d_{\parallel}^2, \quad -e_1 = -i(i\tau)s^2(d_{\parallel}^2 + 1 - (i\tau)^2) + (1+s^2)d_{\parallel}^2 + {}_{\mu}s_{\parallel}^2,$$
$$e_2 = [1-(i\tau)^2][-i(i\tau)s^2 + s_{\parallel}^2 + 1] + {}_{\mu}s_{\parallel}^2 + d_{\parallel}^2, \quad e_3 = -[1-(i\tau)^2].$$

Корни бикубического уравнения (7) могут быть найдены формально с помощью известных формул. Все они (три из них дают нормальные волновые числа) имеют ненулевые мнимые части.

Далее рассмотрим известные из алгебры представления *формальных* корней кубического уравнения.

На комплексной плоскости рассмотрим алгебраическое кубическое уравнение[1]

$$e_0w^3 + e_1w^2 + e_2w + e_3 = 0. \tag{8}$$

Здесь w обозначает комплексную переменную; e_0, e_1, e_2, e_3 — коэффициенты (вообще говоря, комплексные) кубического уравнения.

Разделим это уравнение на коэффициент e_0 и выполним подстановку $w = w' - \frac{e_1}{3e_0}$. В результате приходим к «неполному» кубическому уравнению

$$\begin{gathered} w'^3 + e_2'w' + e_3' = 0, \\ e_2' = \frac{e_2}{e_0} - \frac{e_1^2}{3e_0^2}, \quad e_3' = \frac{2e_1^3}{27e_0^3} - \frac{e_1e_2}{3e_0^2} + \frac{e_3}{e_0}. \end{gathered} \tag{9}$$

[1]Теория кубического уравнения с необходимой полнотой изложена, например, в классическом руководстве [12, с. 211–217].

Дискриминант неполного кубического уравнения определяется согласно

$$D = -27e_3'^2 - 4e_2'^3$$

и следующим образом вычисляется в терминах коэффициентов исходного кубического уравнения (8):

$$D = E_1^2E_2^2 - 4E_1^3E_3 - 27E_3^2 - 4E_2^3 + 18E_1E_2E_3, \tag{10}$$

где

$$E_j = \frac{e_j}{e_0} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Формальные корни неполного кубического уравнения (9) находятся с помощью формулы Кардано в виде суммы двух кубических радикалов (в дальнейшем они будут обозначаться через λ и μ)

$$w' = \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} + \sqrt{-\frac{D}{4\cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{e_3'}{2} - \sqrt{-\frac{D}{4\cdot 27}}}, \tag{11}$$

подразумевая оперирование с кубическими радикалами из комплексных чисел. Кубический радикал из комплексного числа z имеет три значения; если найдено одно $\sqrt[3]{z} = \xi$, то два других будут равны $\varepsilon\xi$, $\varepsilon^2\xi$, где

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому формула Кардано (11) при всех возможных интерпретациях входящих в нее двух кубических радикалов дает девять значений, шесть из которых отбрасываются, рассматривая условие того, что произведение входящих в (11) кубических радикалов должно быть равно $-\dfrac{1}{3}e_2'$. Если в формуле (11) найдена комбинация кубических радикалов $w' = \lambda + \mu$ с $\lambda\mu = -\dfrac{1}{3}e_2'$, то сама указанная комбинация есть корень уравнения (9), а два других корня будут иметь значения $w' = \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu$, $w' = \varepsilon^2\lambda + \varepsilon\mu$. При отличном от нуля дискриминанте все три корня неполного кубического уравнения различны.

В том случае, когда все коэффициенты e_0, e_1, e_2, e_3 кубического уравнения (8) вещественны, по знаку дискриминанта уравнения (10) различаются следующие три возможные ситуации:

1) $D = 0$, все корни уравнения (9) вещественны; корнями являются отношения $\dfrac{3e_3'}{e_2'}$ и $-\dfrac{3e_3'}{2e_2'}$ (двукратный корень);

2) $D < 0$, под знаками кубических радикалов в (11) будут находиться вещественные величины, следовательно, кубические радикалы λ, μ можно взять вещественными; один корень уравнения (9) вещественный $w' = \lambda + \mu$, а два оставшихся корня

$$w' = -\frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu), \quad w' = -\frac{\lambda + \mu}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu)$$

комплексно сопряжены;

3) $D > 0$, кубические радикалы λ, μ комплексно сопряжены; пары $\varepsilon\lambda$, $\varepsilon^2\mu$ и $\varepsilon^2\lambda$, $\varepsilon\mu$ также комплексно сопряжены; все корни уравнения (9) вещественны и равны $2\operatorname{Re}\lambda$, $-\operatorname{Re}\lambda - \sqrt{3}\operatorname{Im}\lambda$, $-\operatorname{Re}\lambda + \sqrt{3}\operatorname{Im}\lambda$.

Выясним теперь соотношения амплитуд в связанной термоупругой волне. С этой целью несколько преобразуем формулы (5):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{k} &= \frac{1}{c^2 - c_\parallel^2} iB\frac{\eta}{\rho}, \\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{k} &= \frac{1}{c^2 - C^2 - c_\parallel^2 - {}_{\mu}c_\parallel^2} iB\frac{\varsigma}{\mathfrak{J}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы разделили числители и знаменатели в дробях уравнений системы (5) соответственно на ρ и $\mathfrak{J}$ и ввели фазовые скорости

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}, \quad C^2 = \frac{\Omega^2}{k^2}, \quad c_\parallel^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad {}_{\mu}c_\parallel^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}.$$

Разделим далее уравнения системы (4) соответственно на ρ и $\mathfrak{J}$ и введем в них значения (12) для проекций векторов поляризации. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &-\left[1 + \frac{c_\parallel^2 - {}^{\backprime\backprime}c_\perp^2}{c^2 - c_\parallel^2}\right] i\underline{\eta}B\mathbf{k} - [{}^{\backprime\backprime}c_\perp^2 - c^2]k^2\mathbf{A} + 2i\,{}^{\backprime}c_\perp^2\mathbf{k}\times\mathbf{S} = \mathbf{0}, \\ &-\left[1 + \frac{{}_{\mu}c_\parallel^2 - {}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_\perp^2}{c^2 - C^2 - {}_{\mu}c_\parallel^2}\right] i\underline{\varsigma}B\mathbf{k} - [{}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_\perp^2 - c^2 + C^2]k^2\mathbf{S} + 2i\underline{\alpha}\mathbf{k}\times\mathbf{A} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\underline{\eta} = \frac{\eta}{\rho}, \quad \underline{\varsigma} = \frac{\varsigma}{\mathfrak{J}}, \quad \underline{\alpha} = \frac{\alpha}{\mathfrak{J}}, \quad {}^{\backprime}c_\perp^2 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}c_\perp^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad {}^{\backprime\backprime}_{\mu}c_\perp^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{J}}.$$

Подставляя в полученную систему уравнений разложения векторов поляризации

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_\parallel\mathbf{k}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp + S_\parallel\mathbf{k},$$

нетрудно видеть, что

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_\perp = \mathbf{0}$$

и

$$A_\parallel = \frac{1}{c^2 - c_\parallel^2}\frac{i\underline{\eta}}{k^2}B, \quad S_\parallel = \frac{1}{c^2 - C^2 - {}_{\mu}c_\parallel^2}\frac{i\underline{\varsigma}}{k^2}B.$$

Последние соотношения связывают комплексные амплитуды перемещений и микровращений с амплитудой температурного инкремента в термоупругой волне.

3. ХОЛОДНАЯ (АТЕРМИЧЕСКАЯ) ПЛОСКАЯ ВОЛНА

В случае атермической волны комплексная амплитуда $B = 0$ и можно вести речь о гиперболической модели распространения волн [13]. Векторы поляризации атермической волны $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ в силу (5) имеют нулевые проекции на волновой вектор $\mathbf{k}$, поэтому рассматриваемая волна является чисто поперечной, т.е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_\perp.$$

Система уравнений (4) в случае атермической волны упрощается:

$$
\begin{aligned}
&-((\mu+\alpha)k^2-\rho\omega^2)\mathbf{A}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{S}=\mathbf{0},\\
&-((\gamma+\varepsilon)k^2+4\alpha-\mathfrak{J}\omega^2)\mathbf{S}+2\alpha i\mathbf{k}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Из второго уравнения системы (14) следует, что векторы поляризации $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ ортогональны друг другу, поскольку

$$
2\mathbf{S}=i\Omega^2\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{A}}{{}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2k^2+\Omega^2-\omega^2},
\tag{15}
$$

где

$$
{}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2=\frac{\gamma+\varepsilon}{\mathfrak{J}}.
$$

Подставляя выражение для $\mathbf{S}$ из (15) в первое уравнение системы (14), находим

$$
\left[-\rho({}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2k^2-\omega^2)+\frac{\alpha\Omega^2k^2}{{}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2k^2+\Omega^2-\omega^2}\right]\mathbf{A}=\mathbf{0},
\tag{16}
$$

откуда получаем уравнение для определения волновых чисел

$$
-\rho({}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2k^2-\omega^2)+\frac{\alpha\Omega^2k^2}{{}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2k^2+\Omega^2-\omega^2}=0,
$$

или, вводя безразмерное значение волнового числа

$$
\widetilde{k}=\frac{k}{{}^{''}k_{\perp}},
$$

где

$$
{}^{''}k_{\perp}^2=\frac{\omega^2}{{}^{''}c_{\perp}^2},\qquad {}^{''}c_{\perp}^2=\frac{\mu+\alpha}{\rho},
$$

и опуская тильду над k, в итоге приходим к следующему уравнению:

$$
[k^2-1][{}_{\mu}d_{\perp}^2k^2-(1-(i\tau)^2))]=(i\tau)^2d_{\perp}^2k^2.
\tag{17}
$$

В этом уравнении использованы новые обозначения:

$$
d_{\perp}^2=\frac{{}^{'}c_{\perp}^2}{{}^{''}c_{\perp}^2},\qquad {}^{'}c_{\perp}^2=\frac{\alpha}{\rho},\qquad {}_{\mu}d_{\perp}^2=\frac{{}^{''}c_{\perp}^2}{{}^{''}_{\mu}c_{\perp}^2}.
$$

Волновые числа k, соответствующие атермической волне, находятся как корни биквадратного уравнения (17) и могут быть представлены в форме

$$
2\,{}_{\mu}d_{\perp}^2k_{1,2}^2=(i\tau)^2d_{\perp}^2+{}_{\mu}d_{\perp}^2+1-(i\tau)^2\pm\sqrt{\mathscr{D}},
\tag{18}
$$

где для дискриминанта имеем

$$
\mathscr{D}=[(i\tau)^2d_{\perp}^2-{}_{\mu}d_{\perp}^2+(1-(i\tau)^2)]^2+4(i\tau)^2\,{}_{\mu}d_{\perp}^2d_{\perp}^2.
$$

Дискриминант $\mathscr{D}$, как нетрудно заметить, положителен:

$$
\mathscr{D}>0,
$$

поэтому оба значения для квадрата волнового числа k, данные (18), вещественны.

Поскольку

$$k_1^2 k_2^2 = \frac{1-(i\tau)^2}{{}_{\mu}d_{\perp}^2},$$

то тогда в случае $1 > (i\tau)^2$ оба значения k_1^2 and k_2^2 положительны, в противном случае (когда $1 < (i\tau)^2$) первое значение k_1^2 положительно, а второе k_2^2 отрицательно.

Рассмотрим сначала первый случай, полагая $1 > (i\tau)^2$. Возможные волновые числа атермической волны определятся четырьмя вещественными значениями

$$\sqrt{2}{}_{\mu}d_{\perp}k_{1,\,2;\,3,\,4} = \pm\sqrt{(i\tau)^2 d_{\perp}^2 + {}_{\mu}d_{\perp}^2 + 1 - (i\tau)^2 \pm \sqrt{\mathscr{D}}},$$

среди которых лишь два являются нормальными: $k_{1;\,3}$ и $k_{1;\,4}$.

Во втором случае, когда выполняется неравенство $1 < (i\tau)^2$, имеется очевидно единственное вещественное нормальное волновое число, которое может быть вычислено по формуле

$$\sqrt{2}{}_{\mu}d_{\perp}k_{1;\,3} = \sqrt{(i\tau)^2 d_{\perp}^2 + {}_{\mu}d_{\perp}^2 + 1 - (i\tau)^2 + \sqrt{\mathscr{D}}}.$$

Таким образом, приходим к выводу о том, что в случае $(i\tau)^2 < 1$ имеется два вещественных нормальных волновых числа, а в случае $(i\tau)^2 > 1$ — лишь одно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Рассмотрены связанные термические и динамические уравнения гемитропной микрополярной среды относительно полей перемещений, микровращений и температуры. Уравнение теплопроводности соответствует термодиффузионному механизму распространения тепла.

2. Определяющие постоянные гемитропного термоупругого тела редуцированы к минимальному набору, обеспечивающему его термоупругую полуизотропность.

3. Исследованы решения термоупругих уравнений в форме распространяющихся плоских волн перемещений, микровращений и температуры.

4. Плоская термоупругая волна характеризуется пространственными поляризациями, которые обладают продольными составляющими. Получено бикубическое уравнение для волнового числа. Установлено, что существует ровно три нормальных комплексных волновых числа.

5. Найдены соотношения, связывающие комплексные амплитуды перемещений и микровращений с амплитудой температурного инкремента в термоупругой волне.

6. Исследована холодная атермическая волна. Пространственные поляризации в этом случае образуют (вместе с волновым вектором) ортогональный триэдр. Волновые числа найдены из биквадратного уравнения. Для атермической волны найдены (в зависимости от значений безразмерной циклической частоты) либо два вещественных нормальных волновых числа, либо одно.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования (номер государственный регистрации АААА-А17-117021310381-8) и РФФИ (проект № 18-01-00844 «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности»).

Библиографический список

1. *Maugin G. A.* Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary. Ser. Advanced Structured Materials. Vol. 51. Singapore : Springer, 2017. 259 p.

2. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford ; New York ; Toronto ; Sydney ; Paris ; Frankfurt : Pergamon Press, 1986. 383 p.
3. *Dyszlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. Ser. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Berlin ; Heidelberg : Springer Science & Business Media, 2012. 345 p.
4. *Радаев Ю. Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 364 с.
7. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / пер. с польск. под ред. Г. С. Шапиро. М. : Мир, 1970. 256 с.
8. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
9. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны / пер. с англ. под ред. А. Б. Шабата. М. : Мир, 1977. 622 с.
10. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М. : Наука, 1982. 336 с.
11. *Весоловский З.* Динамические задачи нелинейной теории упругости. Киев : Наукова думка, 1981. 216 с.
12. *Сушкевич А. К.* Основы высшей алгебры. М. ; Л. : ОНТИ, 1937. 476 с.
13. *Радаев Ю. Н.* Гиперболические теории и задачи механики деформируемого твердого тела // Современные проблемы механики : тез. докл. междунар. конф., посв. 100-летию Л. А. Галина (20–21 сентября 2012 г., Москва). М., 2012. С. 75–76.

Образец для цитирования:

Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О волновых решениях динамических уравнений гемитропной микрополярной термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 454–463. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463

On Wave Solutions of Dynamic Equations of Hemitropic Micropolar Thermoelasticity

V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev

Vladimir A. Kovalev, https://orcid.org/0000-0003-2991-9531, Moscow City Government University of Management, 28 Sretenka St., Moscow 107045, Russia, kovalev.kam@gmail.com

Yuri N. Radayev, http://orcid.org/0000-0002-0866-2151, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101-1 Vernadskogo Ave., Moscow 119526, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Coupled equations of hemitropic thermoelastic micropolar continuum formulated in terms of displacement vector, microrotation vector and temperature increment are considered. Thermodiffusion mechanism of heat transport is assumed. Hemitropic thermoelastic constitutive constants are reduced to a minimal set retaining hemitropic constitutive behaviour. Coupled plane waves propagating in thermoelastic media are studied. Spatial polarizations of the coupled plane waves are determined. Bicubic equations for wavenumbers are obtained and then analyzed. Three normal complex wavenumbers for plane waves are found. Equations relating to the complex amplitudes of displacements, microrotations and temperature increment are obtained. Athermal plane waves propagation is also discussed. It is shown that polarization vectors and the wave vector are mutually orthogonal. Wavenumbers are found as roots of a biquadratic equation. For athermal plane wave depending on the case two or single real normal wavenumbers are obtained.

Keywords: hemitropic, micropolar, thermoelastic, plane wave, wavenumber, polarization, athermal wave.

Received: 13.05.2019 / Accepted: 10.06.2019 / Published: 02.12.2019

Acknowledgements: This work was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education (State Registration Number AAAA-A17-117021310381-8) and by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00844 "Modeling of thermomechanical processes in complex media using the principle of thermomechanical orthogonality").

References

1. Maugin G. A. *Non-Classical Continuum Mechanics. A Dictionary*. Ser. Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer, 2017. 259 p.
2. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, Pergamon Press, 1986. 383 p.
3. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Ser. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Berlin, Heidelberg, Springer Science & Business Media, 2012. 345 p.
4. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
5. Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
6. Nowacki W. *Voprosy termouprugosti* [Problems of Thermoelasticity]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publ., 1962. 364 p. (in Russian).
7. Nowacki W. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic Problems of Thermoelasticity]. Moscow, Mir, 1970. 256 p. (in Russian).
8. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polya i termomekhanika* [Waves Problem of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Izd-vo Sarat. un-ta, 2010. 328 p. (in Russian).
9. Witham J. B. *Linejnye i nelinejnye volny* [Linear and Nonlinear Waves]. Moscow, Mir, 1977. 622 p. (in Russian).
10. Brekhovskikh L. M., Goncharov V. V. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred (v prilozhenii k teorii voln)* [Introduction to Continuum Mechanics (in Application to Theory of Waves)]. Moscow, Nauka, 1982. 336 p. (in Russian).
11. Wesolowski Z. *Dinamicheskie zadachi nelinejnoj teorii uprugosti* [Dynamic Problems of Nonlinear Elasticity]. Kiev, Naukova Dumka, 1981. 216 p. (in Russian).
12. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshej algebry* [Foundations of Higher Algebra]. Moscow, Leningrad, ONTI, 1937. 476 p. (in Russian).
13. Radayev Y. N. Hyperbolic Theories and Applied Problems of Solid Mechanics. In: *Actual Problems of Mechanics* : Int. Conf., Dedicated to L. A. Galin 100th Anniversary (September, 20–21, 2012, Moscow). Theses of reports. Moscow, 2012, pp. 75–76 (in Russian).

Cite this article as:

Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On Wave Solutions of Dynamic Equations of Hemitropic Micropolar Thermoelasticity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 454–463 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463