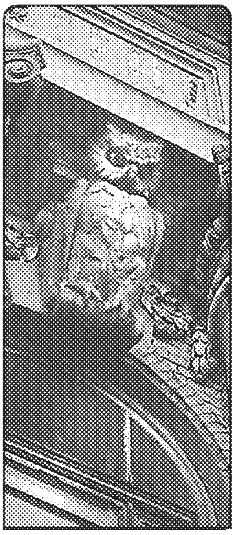
МАТЕМАТИКА



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.521.2

О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра

Р. М. Гаджимирзаев

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 45, ramis3004@gmail.com

Пусть $w(x)$ — лагерровская весовая функция, $1 \leqslant p < \infty$, L^p_w — пространство функций f, p-я степень модуля которых интегрируема с весом $w(x)$ на неотрицательной оси. Для заданного натурального числа r обозначим через $W^r_{L^p_w}$ пространство Соболева, которое состоит из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций f, для которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b]$ неотрицательной оси, а r-я производная принадлежит пространству L^p_w. В случае, когда $p = 2$, введем в пространстве $W^r_{L^2_w}$ скалярное произведение типа Соболева, которое превращает его в гильбертово пространство. Далее, через $l^\alpha_{r,n}(x)$ $(n = r, r+1, ...)$ обозначим полиномы, порожденные классическими полиномами Лагерра. Эти полиномы вместе с функциями вида $l^\alpha_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}$ $(n = 0, 1, ..., r-1)$ образуют полную и ортонормированную систему в пространстве $W^r_{L^2_w}$. В настоящей статье рассматривается задача о равномерной сходимости на любом отрезке $[0, A]$ ряда Фурье по этой системе полиномов к функциям из пространства Соболева $W^r_{L^p_w}$. Ранее равномерная сходимость была установлена для $p = 2$. В данной работе доказывается, что равномерная сходимость ряда Фурье имеет место при $p > 2$ и отсутствует при $1 \leqslant p < 2$. Доказательство равномерной сходимости ряда Фурье для случая $p > 2$ основано на вложении пространств $W^r_{L^p_w}$, $p > 2$, в $W^r_{L^2_w}$. Расходимость ряда Фурье при $1 \leqslant p < 2$ установлена на примере функции e^{cx} с помощью асимптотики полиномов Лагерра.

Ключевые слова: полиномы Лагерра, ряд Фурье, скалярное произведение типа Соболева, полиномы, ортонормированные по Соболеву.

Поступила в редакцию: 05.11.2019 / Принята: 23.12.2019 / Опубликована: 30.11.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-416-423

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha > -1$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$ — весовая функция, $1 \leqslant p < \infty$, L^p_ρ — пространство измеримых функций f, определенных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L^p_\rho} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$W^r_{L^p_\rho}$ — пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$, а $f^{(r)} \in L^p_\rho$. В пространстве $W^r_{L^2_\rho}$ определим скалярное произведение типа Соболева

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^\infty f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx, \tag{1}$$

которое превращает $W^r_{L^2_\rho}$ в гильбертово пространство. Интерес к скалярным произведениям типа (1) вызван (см. [1–6]), в частности, тем, что они включают в себя слагаемые, которые отвечают за поведение соответствующих ортогональных полиномов в окрестности точки $x = 0$. В некоторых случаях эта точка может быть нулем для полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения (1). Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ совпадали в точке $x = 0$ с ее значением $f(0)$. Заметим, что обычные ортогональные с весом полиномы этим свойством не обладают.

В работе [7] для заданного $r \in \mathbb{N}$ была введена система полиномов

$$l^\alpha_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\sqrt{h^\alpha_n}}\int\limits_0^x (x-t)^{r-1}L^\alpha_n(t)dt, \quad n = 0,1,\ldots,$$

$$l^\alpha_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0,1,\ldots,r-1,$$

ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения (1) и порожденная системой полиномов Лагерра $\{L^\alpha_n(x)\}_{n=0}^\infty$. В работах [8, 9] были исследованы свойства этой системы, такие как: полнота и ортонормированность в $W^r_{L^2_\rho}$, явное представление, рекуррентные соотношения, представление через полиномы Лагерра. Кроме того, в работе [8] было показано, что ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho}$ по системе $\{l^\alpha_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^\infty c^\alpha_{r,k}(f) l^\alpha_{r,k}(x),$$

имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^\infty c^\alpha_{r,k}(f) l^\alpha_{r,k}(x), \tag{2}$$

где

$$c_{r,k}^{\alpha}(f) = \frac{1}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha}}} \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) L_{k-r}^{\alpha}(t)\rho(t)dt, \quad k = r, r+1, \dots . \tag{3}$$

В той же работе была доказана следующая

Теорема А. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $f \in W_{L_\rho^2}^r$, $0 \leqslant A < \infty$. *Тогда для произвольного* $x \in [0, \infty)$ *имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}^{\alpha}(f) l_{r,k}^{\alpha}(x),$$

в котором ряд Фурье функции f *по полиномам* $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ *сходится равномерно относительно* $x \in [0, A]$.

Отметим, что ряд Фурье по системе $\{l_{r,n}^{\alpha}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ можно определить для любой функции $f \in W_{L_\rho^p}^r$, $p \geqslant 1$. С этой целью покажем существование коэффициентов $c_{r,k}^{\alpha}(f)$, определенных равенством (3):

$$|c_{r,k}^{\alpha}(f)| \leqslant \left(\int_0^{\infty} |f^{(r)}(t)|^p \rho(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} |l_{k-r}^{\alpha}(t)|^q \rho(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\|f^{(r)}\|_{L_\rho^p}, \ k = r, r+1, \dots ,$$

где $l_{k-r}^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha}}} L_{k-r}^{\alpha}(x)$, M — некоторое положительное число, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В связи с этим возникает вопрос о том, справедливо ли утверждение теоремы А для случая $p \neq 2$. Ответ на этот вопрос является основным результатом настоящей работы. При этом нам понадобятся некоторые сведения о классических полиномах Лагерра.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЛАГЕРРА

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра имеют место:

- формула Родрига

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \left\{x^{n+\alpha} e^{-x}\right\}^{(n)}; \tag{4}$$

- соотношение ортогональности

$$\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) x^{\alpha} e^{-x} dx = \delta_{n,m} h_n^{\alpha} \quad (\alpha > -1),$$

  где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $h_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1)$;
- асимптотическая формула [10, с. 206 (8.22.1)]

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}), \ x > 0. \tag{5}$$

  Оценка остаточного члена равномерна на отрезке $[\varepsilon, \omega]$, где ε, ω — фиксированные положительные числа.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha > -1$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$. *Тогда* $L_\rho^{p_2} \subset L_\rho^{p_1}$ *и*

$$\|f\|_{L_\rho^{p_1}} \leqslant (\Gamma(\alpha+1))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|f\|_{L_\rho^{p_2}}.$$

Доказательство. Пусть $p = \frac{p_2}{p_1}$, $p' = \frac{p_2}{p_2-p_1}$. Тогда

$$\|f\|_{L_\rho^{p_1}}^{p_1} = \int\limits_0^\infty |f(x)|^{p_1}\rho(x)dx = \int\limits_0^\infty \left|f(x)(\rho(x))^{\frac{1}{p_2}}\right|^{p_1} (\rho(x))^{1-\frac{p_1}{p_2}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^\infty \left|f(x)(\rho(x))^{\frac{1}{p_2}}\right|^{p_1 p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^\infty (\rho(x))^{(1-\frac{p_1}{p_2})p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^{p_2}\rho(x)dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\int\limits_0^\infty \rho(x)dx\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}.$$

Отсюда

$$\|f\|_{L_\rho^{p_1}} \leqslant \|f\|_{L_\rho^{p_2}} \left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} = (\Gamma(\alpha+1))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} \|f\|_{L_\rho^{p_2}}.$$ □

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p < \infty$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$. *Тогда, если* $f \in W^r_{L^p_\rho}$, *то при* $p \geqslant 2$ *ряд* (2) *сходится равномерно к* f *на любом отрезке* $[0, A]$. *Если же* $1 \leqslant p < 2$, *то существует функция* $f \in W^r_{L^p_\rho}$, *ряд Фурье которой расходится в точке* $x = \pi^2$.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant p < 2$, $f(x) = e^{cx}$, $\frac{1}{2} < c < \frac{1}{p}$. Нетрудно проверить, что $f \in W^r_{L^p_\rho}$. В самом деле, функция $f(x) = e^{cx}$ непрерывно дифференцируема $r-1$ раз, $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на любом сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$ и, поскольку

$$\int\limits_0^\infty |f^{(r)}(x)|^p\rho(x) = c^{rp}\int\limits_0^\infty e^{cpx}e^{-x}x^{\alpha}\,dx = c^{rp}\int\limits_0^\infty e^{(cp-1)x}x^{\alpha}\,dx < \infty \text{ при } c < \frac{1}{p},$$

то $f^{(r)}(x) \in L^p_\rho$.

Далее найдем явный вид коэффициентов (3) для $f(x) = e^{cx}$:

$$c^{\alpha}_{r,k+r}(f) = \frac{c^r}{\sqrt{h^{\alpha}_k}}\int\limits_0^\infty e^{ct}L^{\alpha}_k(t)e^{-t}t^{\alpha}\,dt.$$

Подставим вместо $L^{\alpha}_k(t)$ формулу Родрига (4) и получим (попутно воспользуемся формулой Лейбница для n-й производной)

$$c^{\alpha}_{r,k+r}(f) = \frac{c^r}{\sqrt{h^{\alpha}_k}k!}\int\limits_0^\infty e^{ct}\left(e^{-t}t^{k+\alpha}\right)^{(k)}\,dt =$$

$$= \frac{c^r}{\sqrt{h_k^\alpha}k!}\int\limits_0^\infty e^{ct}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (e^{-t})^{(k-j)}(t^{k+\alpha})^{(j)}\,dt =$$

$$= \frac{c^r}{\sqrt{h_k^\alpha}k!}\sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^{k-j}(k+\alpha)(k+\alpha-1)\cdots(k+\alpha-j+1)\int\limits_0^\infty e^{-(1-c)t}t^{k+\alpha-j}\,dt =$$

$$= \frac{c^r}{(1-c)^{\alpha+1}}(-1)^k\left(\frac{c}{1-c}\right)^k\sqrt{\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}}.$$

Таким образом, общий член ряда Фурье (2) функции e^{cx} имеет вид

$$c_{r,k}^\alpha(f)l_{r,k}^\alpha(x) = \frac{c^r}{(1-c)^{\alpha+1}}(-1)^{k-r}\left(\frac{c}{1-c}\right)^{k-r}\sqrt{\frac{\Gamma(k-r+\alpha+1)}{\Gamma(k-r+1)}}l_{r,k}^\alpha(x), \quad k\geqslant r. \quad (6)$$

Подставим в (6) вместо $l_{r,k}^\alpha(x)$ следующее равенство [8, теорема 3.2]:

$$l_{r,k}^\alpha(x) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{h_{k-r}^\alpha}}\left[L_k^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^\nu\Gamma(k-r+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k-\nu)!}\frac{x^\nu}{\nu!}\right], \quad \alpha>-1, \quad k\geqslant r,$$

и получим

$$c_{r,k}^\alpha(f)l_{r,k}^\alpha(x) = \frac{c^r}{(1-c)^{\alpha+1}}(-1)^k\left(\frac{c}{1-c}\right)^{k-r}\left[L_k^{\alpha-r}(x) - \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^\nu\Gamma(k-r+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k-\nu)!}\frac{x^\nu}{\nu!}\right].$$

Преобразуем слагаемые в скобках:

$$\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{(-1)^\nu\Gamma(k-r+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)(k-\nu)!}\frac{x^\nu}{\nu!} =$$

$$= \frac{\Gamma(k-r+\alpha+1)}{(k-r+1)!}\left[\frac{1}{\Gamma(-r+\alpha+1)k(k-1)\cdots(k-r+2)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(2-r+\alpha)(k-1)\cdots(k-r+2)}\frac{x}{1} + \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\right] \asymp$$

$$\asymp c(\alpha,r)k^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(-r+\alpha+1)k(k-1)\cdots(k-r+2)} - \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\right];$$

$$L_k^{\alpha-r}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}k^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\cos\left(2\sqrt{kx}-\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + O(k^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac34}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}k^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac14}\left[\cos(2\sqrt{kx})\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) +\right.$$

$$\left. + \sin(2\sqrt{kx})\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] + O(k^{\frac{\alpha-r}{2}-\frac34}).$$

Положим $k=m^2$ и $x=\pi^2$. Тогда

$$c_{r,m^2}^\alpha(f)l_{r,m^2}^\alpha(\pi^2) = \frac{c^r}{(1-c)^{\alpha+1}}(-1)^{m^2}\left(\frac{c}{1-c}\right)^{m^2-r}m^{2\alpha-2}\times$$

$$\times\left\{e^{\frac{\pi^2}{2}}\pi^{r-\alpha-1}m^{-\alpha-r+\frac32}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + O(m^{-\alpha-r+\frac12}) - c(\alpha,r)\left[\cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\right]\right\}.$$

Поскольку $\frac{c}{1-c} > 1$ при $\frac{1}{2} < c < \frac{1}{p}$, то $\lim_{m\to\infty} c^{\alpha}_{r,m^2}(f) l^{\alpha}_{r,m^2}(\pi^2) = \infty$. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x) = e^{cx}$ расходится в точке $x = \pi^2$.

Пусть теперь $p > 2$. Из определения пространства $W^r_{L^p_\rho}$ и вложения $L^p_\rho \subset L^2_\rho$ (см. лемму 1) имеем $W^r_{L^p_\rho} \subset W^r_{L^2_\rho}$. Отсюда и из теоремы A следует, что ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^p_\rho}$ сходится к f равномерно на любом отрезке $[0, A]$. $\square$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00477мол_а).

Библиографический список

1. *Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y.* Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 171. P. 84–104. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.03.004
2. *Marcellán F., Xu Y.* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Math. 2015. Vol. 33, iss. 3. P. 308–352. DOI: https://doi.org/10.1016/j.exmath.2014.10.002
3. *Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y.* Sobolev orthogonal polynomials on product domains // J. Comput. and Appl. Math. 2015. Vol. 284. P. 202–215. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.09.015
4. *Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A.* Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives // J. Math. Anal. and Appl. 2016. Vol. 440, iss. 2. P. 716–740. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.041
5. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82, вып. 1. С. 225–258. DOI: https://doi.org/10.4213/im8536
6. *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 105, вып. 4. С. 545–552. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12069
7. *Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д., Гаджимирзаев Р. М.* Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электронные математические известия. 2016. Вып. 6. С. 31–60. DOI: https://doi.org/10.31029/demr.6.3
8. *Шарапудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68. DOI: https://doi.org/10.1134/ S0374064118010065
9. *Гаджимирзаев Р. М.* Рекуррентные соотношения для полиномов, ортонормированных по Соболеву, порожденных полиномами Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 17–24. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24
10. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.

Образец для цитирования:
Гаджимирзаев Р. М. О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 416–423. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-416-423

On the Uniform Convergence of the Fourier Series by the System of Polynomials Generated by the System of Laguerre Polynomials

R. M. Gadzhimirzaev

Ramis M. Gadzhimirzaev, https://orcid.org/0000-0002-6686-881X, Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 45 Gadjieva St., Makhachkala 367000, Russia, ramis3004@gmail.com

Let $w(x)$ be the Laguerre weight function, $1 \leqslant p < \infty$, and L^p_w be the space of functions f, p-th power of which is integrable with the weight function $w(x)$ on the non-negative axis. For a given positive integer r, let denote by $W^r_{L^p_w}$ the Sobolev space, which consists of $r-1$ times continuously differentiable functions f, for which the $(r-1)$-st derivative is absolutely continuous on an arbitrary segment $[a, b]$ of non-negative axis, and the r-th derivative belongs to the space L^p_w. In the case when $p = 2$ we introduce in the space $W^r_{L^2_w}$ an inner product of Sobolev-type, which makes it a Hilbert space. Further, by $l^\alpha_{r,n}(x)$, where $n = r, r+1, ...$, we denote the polynomials generated by the classical Laguerre polynomials. These polynomials together with functions $l^\alpha_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}$, where $n = 0, 1, r-1$, form a complete and orthonormal system in the space $W^r_{L^2_w}$. In this paper, the problem of uniform convergence on any segment $[0, A]$ of the Fourier series by this system of polynomials to functions from the Sobolev space $W^r_{L^p_w}$ is considered. Earlier, uniform convergence was established for the case $p = 2$. In this paper, it is proved that uniform convergence of the Fourier series takes place for $p > 2$ and does not occur for $1 \leqslant p < 2$. The proof of convergence is based on the fact that $W^r_{L^p_w} \subset W^r_{L^2_w}$ for $p > 2$. The divergence of the Fourier series by the example of the function e^{cx} using the asymptotic behavior of the Laguerre polynomials is established.

Keywords: Laguerre polynomials, Fourier series, Sobolev-type inner product, Sobolev orthonormal polynomials.

Received: 05.11.2019 / Accepted: 23.12.2019 / Published: 30.11.2020

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-31-00477mol_a).

References

1. Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 171, pp. 84–104. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jat.2013.03.004
2. Marcellán F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials. *Expositiones Math.*, 2015, vol. 33, iss. 3, pp. 308–352. DOI: https://doi.org/10.1016/j.exmath.2014.10.002
3. Fernández L., Marcellán F., Pérez T. E., Piñar M. A., Xu Y. Sobolev orthogonal polynomials on product domains. *J. Comput. and Appl. Math.*, 2015, vol. 284, pp. 202–215. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.09.015
4. Delgado A. M., Fernandez L., Lubinsky D. S., Pérez T. E., Piñar M. A. Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball via outward normal derivatives. *J. Math. Anal. and Appl.*, 2016, vol. 440, iss. 2, pp. 716–740. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.041
5. Sharapudinov I. I. Sobolev-orthogonal systems of functions associated with an orthogonal system. *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, iss. 1, pp. 212–244. DOI: https://doi.org/10.1070/IM8536
6. Magomed-Kasumov M. G. A Sobolev orthogonal system of functions generated by a Walsh system. *Math Notes*, 2019, vol. 105, iss. 3–4, pp. 543–549. DOI: 10.1134/S0001434619030271

7. Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D., Gadzhimirzaev R. M. Systems of functions orthogonal with respect to scalar products of Sobolev type with discrete masses generated by classical orthogonal systems. *Daghestan Electronic Mathematical Reports*, 2016, iss. 6, pp. 31–60 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.31029/demr.6.3
8. Sharapudinov I. I., Magomed-Kasumov M. G. On representation of a solution to the Cauchy problem by a Fourier series in Sobolev-orthogonal polynomials generated by Laguerre polynomials. *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 49–66. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118010068
9. Gadzhimirzaev R. M. Recurrence relations for polynomials orthonormal on Sobolev, generated by Laguerre polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 17–24 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-17-24
10. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ., 1939, vol. 23. 440 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1962. 500 p.)

Cite this article as:
Gadzhimirzaev R. M. On the Uniform Convergence of the Fourier Series by the System of Polynomials Generated by the System of Laguerre Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 416–423 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-416-423