УДК 519.633

Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов, В. А. Халова

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, Kurdyumov47@yandex.ru

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, KhromovAP@sgu.ru

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, KhalovaVA@gmail.com

Для смешанной задачи, определяемой волновым уравнением с суммируемым потенциалом, однопорядковыми граничными условиями с производной и нулевым начальным положением, исследуются свойства формального решения по методу Фурье в зависимости от гладкости начальной скорости $u'_t(x,0)=\psi(x)$. В основе исследования — идея А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и метод контурного интегрирования резольвенты оператора соответствующей спектральной задачи. Получено классическое решение при $\psi(x)\in W_p^1$ $(1<p\leqslant 2)$, а также показано, что если $\psi(x)\in L_p[0,1]$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, формальное решение является обобщенным решением смешанной задачи.

Ключевые слова: метод Фурье, формальное решение, волновое уравнение, резольвента.

Поступила в редакцию: 11.06.2019 / Принята: 28.06.2019 / Опубликована: 30.11.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-q(x)u(x,t),\quad x\in[0,1],\quad t\in[0,\infty), \tag{1}$$

при условиях

$$u(x,0)=0,\quad u'_t(x,0)=\psi(x), \tag{2}$$

$$u'_x(0,t)+\alpha_1u(0,t)+\beta_1u(1,t)=u'_x(1,t)+\alpha_2u(0,t)+\beta_2u(1,t)=0, \tag{3}$$

где $q(x)\in L[0,1]$, $q(x)$ и $\psi(x)$ — комплекснозначные, α_i, β_i $(i=1,2)$ — комплексные числа.

В работе используется резольвентный подход с применением приема А. Н. Крылова [1] ускорения сходимости рядов Фурье, который, в отличие от традиционных методов исследования, а также исследований В. А. Чернятина [2], позволяет исследовать поведение формального решения для различных краевых условий. Впервые этот подход при $q(x) \in C[0,1]$ был применен в [3] для нахождения классического решения задачи, определяемой уравнением (1), начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{5}$$

при минимальных требованиях на $\varphi(x)$. В дальнейшем этот результат ($q(x) \in C[0,1]$) был перенесен для задачи (1), (4) с другими двухточечными краевыми условиями, а в [4] проведено исследование формального решения при понижении требований гладкости на $\varphi(x)$ вплоть до $\varphi(x) \in L_2[0,1]$. Новые трудности возникают для смешанной задачи с начальными условиями (2) вместо (4), но в этом случае резольвентный подход позволяет их преодолевать. Так, в [5,6] получены результаты, аналогичные вышеприведенным ($q(x) \in C[0,1]$), для начальных условий (2). В частности, в [6] получено классическое решение задачи (1)–(3) при $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Кроме того, показано, что в случае $\psi(x) \in L_2[0,1]$ ряд формального решения сходится равномерно в любой ограниченной области и его сумма почти всюду (п.в.) удовлетворяет условиям (2), (3), а в случае, когда $\psi(x) \in L[0,1]$, он сходится всюду, и в обоих случаях является обобщенным решением в равномерной метрике. Для наиболее трудного случая, когда $q(x) \in L[0,1]$, исследование формального решения смешанной задачи значительно усложняется. В [7] для задачи (1), (2), (5) с $q(x) \in L[0,1]$ получено классическое решение при минимальных требованиях на $\psi(x)$ и обобщенное решение для $\psi(x) \in L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Аналогичные результаты мы здесь получим и для задачи (1)–(3) с $q(x) \in L[0,1]$, исследование которой, по сравнению с задачей (1), (2), (5), становится сложнее: формальный ряд приходится разбивать на девять рядов (в отличие от [7], где их было шесть) и точно вычислять три из них. Мы получим классическое решение задачи при $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ (теорема 4) и покажем, что в случае $\psi(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p \leqslant 2$ ряд формального решения сходится абсолютно и равномерно и его сумма п.в. удовлетворяет условиям (2), (3), а для $\psi(x) \in L[0,1]$ он сходится всюду, являясь в обоих случаях обобщенным решением в равномерной метрике (теоремы 5, 6). Схожие результаты для смешанной задачи с начальными условиями (4) получены в [8,9] (см. также библиографию в них).

1. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

1.1. Так как $q(x) \in L[0,1]$, то классическим решением называем функцию $u(x,t)$, абсолютно непрерывную вместе с первой производной по x и t, для которой выполняются условия (2), (3), а уравнение (1) выполняется п.в.

Предполагаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$. Введем оператор Штурма – Лиувилля: $Ly = -y'' + q(x)y$, $U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0$, $U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0$, связанный по методу Фурье с задачей (1)–(3). Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них имеют место асимптотические формулы [10, с. 74, 75]: $\lambda_n = \rho_n^2$ ($\operatorname{Re}\rho_n \geqslant 0$), $\rho_n = n\pi + o(1)$. Обозначим $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \,|\, |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \geqslant n_0$ и n_0 таково, что при

$n \geqslant n_0$ внутрь $\tilde{\gamma}_n$ попадает лишь по одному ρ_n. Пусть γ_n — образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$). Формальное решение задачи (1)–(3) возьмем в виде [11, 12]

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{6}$$

где $r > 0$ таково, что внутри $|\lambda| = r$ находятся все собственные значения λ_n, для которых $n < n_0$, а $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр). Представляя $\psi(x)$ в виде [6] $\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_1(x) \in W_2^1[0,1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0,1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора L), формальное решение (6) представим в виде, аналогичном (11) из [5] (см. также лемму 2 из [5]), т. е. в виде

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{4} u_j(x,t), \tag{7}$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{8}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1 - R_\lambda^0\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \tag{9}$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g - R_\lambda^0 g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0: $L_0 y = -y''$, $y'(0) = y'(1) = 0$, μ_0 находится вне всех контуров, $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$, поэтому $g(x) \in L[0,1]$.

Лемма 1. ([5, теорема 3]). *Для R_λ и R_λ^0 имеют место формулы*

$$R_\lambda f = v_1(x,\rho)(f,z_1) + v_2(x,\rho)(f,z_2) - (M_\rho f)(x),$$
$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x,\rho)(f,z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(f,z_2^0) - (M_\rho^0 f)(x),$$

где $z_j(x,\rho)$ $(j = 1,2)$ — решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0 \tag{10}$$

с начальными условиями $z_1(0,\rho) = z_2'(0,\rho) = 1$, $z_1'(0,\rho) = z_2(0,\rho) = 0$;

$$v_j(x,\rho) = \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)}\left\{\left[-\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_2) + (z_{3-j}'(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho))U_1(z_2)\right] z_1(x,\rho) + \right.$$

$$+\left[\beta_1 z_{3-j}(1,\rho)U_2(z_1) - \left(z'_{3-j}(1,\rho) + \beta_2 z_{3-j}(1,\rho)\right)U_1(z_1)\right] z_2(x,\rho)\big\}, \quad j=1,2,$$
$$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1),$$
$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x,t,\rho)f(t)\,dt, \quad M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix};$$

$v_j^0(x,\rho)$, $z_j^0(x,\rho)$ $(j=1,2)$, $M_\rho^0 f$ *есть* $v_j(x,\rho)$, $z_j(x,\rho)$ $(j=1,2)$, $M\rho f$, *но взяты для оператора* L_0, $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Обозначим

$$J_1(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(\psi_1, z_2^0),$$
$$J_2(x,\rho) = v_1(x,\rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x,\rho)(\psi_1, z_2) - v_1^0(x,\rho)(\psi_1, z_1^0) - v_2^0(x,\rho)(\psi_1, z_2^0),$$
$$J_3(x,\rho) = \frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v_1^0(x,\rho)(g,z_1) + v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right],$$
$$J_4(x,\rho) = \frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v_1(x,\rho)(g,z_1) + v_2(x,\rho)(g,z_2) - v_1^0(x,\rho)(g,z_1) - v_2^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right].$$

Поскольку $(M\rho f)(x)$, $(M\rho^0 f)(x)$ — целые по λ, то по лемме 1

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^4 u_j(x,t) = \sum_{j=1}^4 \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) J_j(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda.$$

1.2. Будем исследовать ряды $u_j(x,t)$, $j=1,2,3,4$.

Теорема 1. *([6]). Ряд* $u_1(x,t)$ *сходится абсолютно и равномерно и его сумма есть классическое решение задачи* (1)–(3) *при* $q(x)=0$ *и* $\psi_1(x)$ *вместо* $\psi(x)$ *с граничными условиями* $u'_{1x}(0,t) = u_{1x}(1,t) = 0$ *(уравнение* (1) *выполняется п.в.).*

1.3. Исследуем ряд $u_2(x,t)$. Обозначим

$$J_{2,1}(x,\rho) = (v_1(x,\rho) - v_1^0(x,\rho))(\psi_1, z_1) + (v_2(x,\rho) - v_2^0(x,\rho))(\psi_1, z_2),$$
$$J_{2,2}(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(\psi_1, z_2 - z_2^0),$$
$$u_{2,k}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right) J_{2,k}(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda, \quad k=1,2. \tag{11}$$

Тогда $J_2(x,\rho) = J_{2,1}(x,\rho) + J_{2,2}(x,\rho)$ и

$$u_2(x,t) = u_{2,1}(x,t) + u_{2,2}(x,t). \tag{12}$$

Лемма 2. *Обозначим через* $\theta(x)$ *одну из функций* $\cos x$ *или* $\sin x$, *через* $\beta_n(\mu)$ — *скалярное произведение вида* $(m(x)\theta(\mu x), \theta(n\pi x))$, *где* $m(x)$ — *одна из функций* $\psi_1'(x)$, $\psi_1(x)\int_0^x q(\tau)\,d\tau$, $\int_x^1 \psi_1(\tau)q\left(\frac{\tau\pm x}{2}\right)d\tau$, *через* $\tilde\beta_n(\mu)$ — *некоторые суммы из* $\beta_n(\mu)$, *умноженные на постоянные числа из некоторого конечного набора таких чисел. Если* $\rho = n\pi + \mu$, *где* $\mu \in \tilde\gamma_0$, *то справедливы формулы*

$$(\psi_1, z_j) = \frac{1}{\rho^j}\tilde\beta_n(\mu) + O\left(\frac{1}{\rho^{j+1}}\right), \quad j=1,2.$$

Доказательство аналогично лемме 9 из [5].

Лемма 3. ([5, лемма 3]). *Если* $\rho \in \tilde{\gamma}_n$, *то*

$$v_{1x^j}^{(j)}(x,\rho) = v_{1x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-2}), \quad v_{2x^j}^{(j)}(x,\rho) = v_{2x^j}^{0(j)}(x,\rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0,1.$$

Лемма 4. ([8, лемма 19]). *Пусть* $f(x) \in L_p[0,1]$ $(1 < p \leqslant 2)$, $f(x,\mu) = f(x)\theta(\mu x)$, $\theta(x)$ *из леммы* 2, $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $\beta_n(\mu) = (f(x,\mu), \theta(n\pi x))$. *Тогда имеет место оценка*

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}|\beta_n(\mu)| \leqslant c \left(\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^p} \right)^{1/p} \|f\|_p,$$

где $c > 0$ *не зависит от* n_1, n_2, $f(x)$ *и* $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, $\|\cdot\|_p$ — *номра в* $L_p[0,1]$.

Лемма 5. *Ряд* $u_{2,1}(x,t)$ *и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по* x *и дважды по* t, *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,T]$ *при любом* $T > 0$.

Доказательство следует из формулы (11) по леммам 2–4.

Лемма 6. *Функции* $u_{2,1}(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_{2,1}(x,t)$ *абсолютно непрерывны по* x, *причем п.в. по* $x \in [0,1]$ *и при любом* t *имеет место равенство*

$$\frac{\partial^2 u_{2,1}(x,t)}{\partial x^2} = q(x)a_{2,1}(x,t) + b_{2,1}(x,t), \tag{13}$$

где

$$a_{2,1} = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho}\, d\lambda,$$

$$b_{2,1} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) \rho^2 J_{2,1}(x,\rho) \frac{\sin \rho t}{\rho}\, d\lambda.$$

Ряды $a_{2,1}(x,t)$ *и* $b_{2,1}(x,t)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,1]$. *Множество* x, *где имеет место* (13), *можно взять одним и тем же для всех* t *и имеет меру, равную единице.*

Доказательство аналогично приведенному в теореме 5 из [7].

1.4. Теперь рассмотрим $u_{2,2}(x,t)$. Так как в силу (10) имеем

$$(\psi_1, z_j - z_j^0) = \frac{1}{\rho^2}(\psi_1, -z_j'' + z_j^{0\prime\prime} + q(x)z_j) = \frac{1}{\rho^2}(\psi_1', z_j' - z_j^{0\prime}) +$$
$$+ \frac{1}{\rho^2}(\psi_1 q, z_j - z_j^0) + \frac{1}{\rho^2}(\psi_1 q, z_j^0), \quad j = 1,2,$$

то

$$u_{2,2}(x,t) = u_{2,2}^{(1)}(x,t) + u_{2,2}^{(2)}(x,t) + u_{2,2}^{(3)}(x,t), \tag{14}$$

где

$$u_{2,2}^{(s)}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geqslant n_0} \int\limits_{\gamma_n} \right) J_{2,2}^{(s)}(x,\rho) \frac{\sin \rho t}{\rho^3}\, d\lambda, \quad s = 1,2,3, \tag{15}$$

$$J_{2,2}^{(s)}(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1^{(2-s)}q^{s-1}, z_1^{(2-s)} - z_1^{0(2-s)})+$$
$$+v_2(x,\rho)(\psi_1^{(2-s)}q^{s-1}, z_2^{(2-s)} - z_2^{0(2-s)}), \quad s = 1, 2,$$
$$J_{2,2}^{(3)}(x,\rho) = v_1^0(x,\rho)(\psi_1 q, z_1^0) + v_2^0(x,\rho)(\psi_1 q, z_2^0).$$

1.5. Исследуем ряды $u_{2,2}^{(s)}(x,t)$ $(s = 1, 2)$. Так же, как и леммы 9, 11 из [7], доказываются две следующие леммы.

Лемма 7. *При* $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant h$ *имеет место формула*

$$z_1'(x,\rho) = -\rho\sin x + \frac{1}{2}\cos\rho x\int\limits_0^x q(\xi)\,d\xi + \frac{1}{4}\int\limits_0^x \left[q\left(\frac{x-\tau}{2}\right) + \right.$$
$$\left. +q\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\right]\cos\rho\tau\,d\tau + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Лемма 8. *Пусть* $\theta(x)$, $\beta_n(\mu)$ *и* $\tilde\beta_n(\mu)$ *— те же, что и в лемме 2, где* $m(x)$ *теперь — одна из функций* $\psi_1'(x)$, $\psi_1'(x)\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau$, $\int\limits_x^1 \psi_1'(\tau)\left(\frac{\tau\pm x}{2}\right)d\tau$. *Если* $\rho = n\pi + \mu$, *где* $\mu \in \gamma_0$, *то*

$$(\psi_1', z_1' - z_1^{0\prime}) = O(\tilde\beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (\psi_1', z_2' - z_2^{0\prime}) = \frac{1}{\rho}O(\tilde\beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Лемма 9. *Ряды* $u_{22}^{(s)}(x,t)$ $(s = 1, 2)$ *и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием два раза по* x *и* t, *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,T]$, *и их суммы удовлетворяют уравнению (1) при* $q(x) = 0$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из (15) на основании лемм 4, 8 и леммы 2 из [9] так же, как и в лемме 11 из [5], а второе — из формулы

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(v_j^0(x,\rho)\sin\rho t) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

□

1.6. Из (15) по теореме вычетов получаем следующую лемму.

Лемма 10. *Имеет место формула*

$$u_{2,2}^{(3)}(x,t) = t\left(\psi_1 q, \xi - \frac{\xi^2}{2}\right) - \frac{t}{6}(3x^2 + t^2 + 2)(\psi_1 q, 1)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^3}(\psi_1 q, \cos n\pi\xi)[\sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-\tau)]. \tag{17}$$

Лемма 11. *Ряд* $u_{2,2}^{(3)}(x,t)$ *сходится равномерно и для его суммы имеет место формула*

$$u_{2,2}^{(3)}(x,t) = \int\limits_{x-t}^{x+t} d\tau\int\limits_0^{\tau}\tilde R(\tau_1)\,d\tau_1 - (\psi_1 q, 1)\int\limits_{x-t}^{x+t} d\tau\int\limits_0^{\tau}\tilde S(\tau_1)\,d\tau_1+$$

$$+\frac{t}{6}(\psi_1 q, 1)\left(12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}-3x^2-t^2-2\right), \tag{18}$$

где $\tilde{R}(x) = \frac{1}{2}\tilde{r}(x)$ *— нечетное 2-периодическое продолжение функции* $r(x) = \int\limits_x^1 \psi_1(\xi)q(\xi)\,d\xi$*,* $x \in [0,1]$*;* $\tilde{S}(x)$ *— нечетное 2-периодическое продолжение функции* $S(x) = \frac{1}{2}(1-x)$*,* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим для правой части (17) ряд

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^3}(\psi_1 q, \cos n\pi\xi)\sin n\pi x.$$

Так как

$$\frac{\cos n\pi\xi}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\xi}\sin n\pi\tau\,d\tau,$$

то

$$\Sigma = (\psi_1 q, 1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}(r, \sin n\pi\xi)\sin n\pi x = \Sigma_1 - \Sigma_2. \tag{19}$$

Теперь для Σ_1 рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}$. Это есть ряд Фурье функции $\tilde{S}(x)$, поэтому, почленно интегрируя, получим

$$\Sigma_1 = (\psi_1 q, 1)\left(-\int\limits_0^x d\tau\int\limits_0^{\tau}\tilde{S}(\tau_1)\,d\tau_1 + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}\right). \tag{20}$$

Для Σ_2 рассмотрим $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(r, \sin n\pi\xi)\sin n\pi x$. Это — ряд Фурье функции $\tilde{r}(x)$, поэтому

$$\Sigma_2 = -\int\limits_0^x d\tau\int\limits_0^{\tau}\tilde{R}(\tau_1)\,d\tau_1 + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}(r, \sin n\pi\xi), \tag{21}$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}(r, \sin n\pi\xi) = \left(\psi_1 q, \frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{4}\right)$. Тогда из (17), (19)–(21) следует (18). □

1.7. Здесь мы получим уравнение для $u_2(x,t)$.

Лемма 12. *Функция* $u_{2,2}(x,t)$ *непрерывно дифференцируема по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,\infty)$*;* $\frac{\partial u_{2,2}(x,t)}{\partial x}$ $\left(\frac{\partial u_{2,2}(x,t)}{\partial t}\right)$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*) и п.в. по* x *и* t *удовлетворяет уравнению* (1) *при* $q(x) = 0$.

Доказательство следует из формулы (14) по леммам 9 и 11.

Теорема 2. *Функция* $u_2(x,t)$ *непрерывно дифференцируема по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,\infty)$*;* $\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}$ $\left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right)$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*) и п.в. по* x *и* t

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + q(x)\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda.$$

Доказательство. Так как по лемме 5 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{2,1}(x,t) = b_{2,1}(x,t)$, то из (12) и лемм 6, 12 получаем утверждение теоремы. □

1.8. Исследуем ряд $u_3(x,t)$. Так как $\frac{1}{\lambda-\mu_0} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu_0}{\lambda(\lambda-\mu_0)}$, то

$$u_3(x,t) = u_{3,1}(x,t) + u_{3,2}(x,t), \tag{22}$$

где

$$u_{3,1}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_n}\right)(v_1^0(x,\rho)(g,z_1) + v_2^0(x,\rho)(g,z_2))\frac{\sin\rho t}{\rho^3}\,d\lambda,$$

$$u_{3,2}(x,t) = -\frac{\mu_0}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma_n}\right)J_3(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho^3}\,d\lambda,$$

величина $\varepsilon > 0$ настолько мала, что все контуры расположены вне друг друга.

Так же, как и лемма 11, доказывается следующая лемма.

Лемма 13. *Для суммы ряда $u_{3,1}(x,t)$ имеет место формула*

$$u_{3,1}(x,t) = \int\limits_{x-t}^{x+t} d\tau \int\limits_0^{\tau} \tilde P(\tau_1)\,d\tau_1 - (g,1)\int\limits_{x-t}^{x+t} d\tau \int\limits_0^{\tau} \tilde S(\tau_1)\,d\tau_1 + $$
$$+\frac{t}{6}(g,1)\left(12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2} - 3x^2 - t^2 - 2\right),$$

где $\tilde P(x) = \frac{1}{2}\tilde p(x)$, $\tilde p(x)$ — нечетное 2-периодическое продолжение функции $p(x) = \int\limits_x^1 g(\xi)\,d\xi$, $x \in [0,1]$; $\tilde S(x)$ — та же, что и в лемме 11.

Так как для ряда $u_{3,2}(x,t)$ выполняется лемма 9, то в силу (16), (22) и леммы 13 для ряда $u_3(x,t)$ выполняется лемма 12.

1.9. Наконец, рассмотрим ряд $u_4(x,t)$. Обозначим $J_{4,k}(x,\rho) = \frac{1}{\lambda-\mu_0}J_{2,k}(x,\rho)$ ($k = 1,2$) с функцией $g(x)$ в $J_{2,k}(x,\rho)$ вместо $\psi_1(x)$. Тогда

$$J_4(x,\rho) = J_{4,1}(x,\rho) + J_{4,2}(x,\rho)$$

и

$$u_4(x,t) = u_{4,1}(x,t) + u_{4,2}(x,t), \tag{23}$$

где $u_{4,k}(x,t)$ определяются как и $u_{2,k}(x,t)$ в (11), но через $J_{4,k}(x,\rho)$ вместо $J_{2,k}(x,\rho)$. Из [9, лемма 2] и леммы 3 легко следует выполнение леммы 5 для рядов $u_{4,k}(x,t)$, $k = 1,2$, и, кроме того, ряд $u_{4,2}(x,t)$ можно дважды почленно дифференцировать по x.

Легко видеть, что для функций $u_{4,1}(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}u_{4,2}(x,t)$ справделива и лемма 6, но с функцией $\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)$ вместо $(R_\lambda\psi_1)$ в определении $a_{2,1}(x,t)$ и с функцией $J_{4,1}(x,\rho)$ вместо $J_{2,1}(x,\rho)$ в $b_{21}(x,t)$.

Теорема 3. *Функция* $u_4(x,t)$ *непрерывно дифференцируема по* $x \in [0,1]$ *и* $t \in [0,T]$, $\frac{\partial u_4(x,t)}{\partial x}$ $\left(\frac{\partial u_4(x,t)}{\partial t}\right)$ *абсолютно непрерывна по* x *(по* t*) и п.в. по* $x \in [0,1]$ *и любом* t

$$\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial x^2} + q(x)\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda. \qquad (24)$$

Доказательство. По формуле (11) для $u_{4,1}(x,t)$ и лемме 5

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{4,1}(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\rho^2 J_{4,1}(x,\rho)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda = b_{2,1}(x,t).$$

Отсюда и из леммы 6 следует, что п.в. по $x \in [0,1]$ и любом t

$$\frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_4(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_{2,1}(x,t), \qquad (25)$$

причем по лемме 2 из [5]

$$a_{2,1}(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_2)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda.$$

Так как ряд $u_{4,2}(x,t)$ можно два раза почленно дифференцировать по x, то в силу (16)

$$\frac{\partial^2 u_{4,2}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{4,2}(x,t)}{\partial x^2}.$$

Тогда из (23) и (25) следует (24) □

1.10. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если* $q(x) \in L[0,1]$ *и* $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$*, то формальное решение задачи* (1)–(3) *является и ее классическим решением.*

Доказательство. Для формального решения задачи (1)–(3)

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\psi_1)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda g)\frac{\sin\rho t}{\rho}\,d\lambda \qquad (26)$$

на основании лемм 1–4 заключаем, что ряды в (26) и полученные из них почленным дифференцированием по x или t сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям и $u(x,0)=0$. Почленно дифференцируя ряд (6) в точке $t=0$, как и в [5, теорема 6], получим $u'_t(x,0) = \psi(x)$. А в силу (7) из теорем 1–3 и леммы 12 для $u_3(x,t)$ следует, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) п.в. □

Замечание. В теореме 4 так же, как в [8], с привлечением теоремы Хаусдорфа – Юнга [13, с. 211] можно вместо $\psi(x) \in W_2^1[0,1]$ предполагать, что $\psi(x)$ абсолютно непрерывна и $\psi'(x) \in L_p[0,1]$ при $1 < p < 2$.

2. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

2.1. Пусть $\psi(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p < 2$. Обобщенное решение берем в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{27}$$

где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — те же, что и в (8), (9), но с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$.

Лемма 14. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно, его сумма абсолютно непрерывна по x, t и удовлетворяет условию $u_1(x,0) = 0$; п.в. на $[0,1]$ существует $u'_{1t}(x,0)$ и п.в. на $[0,\infty)$ существуют $u'_{1x}(0,t)$, $u'_{1t}(1,t)$, причем $u'_{1t}(x,0) = \psi(x)$, $u'_{1x}(0,t) = u'_{1x}(1,t) = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 22 из [6] с использованием теоремы Хаусдорфа – Юнга.

Лемма 15. *Ряд $u_2(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t один раз, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$.*

Доказательство. Следует из (12) с функцией $\psi(x)$ вместо $\psi_1(x)$, лемм 3, 4 и оценок [8, лемма 18]

$$(\psi, z_j) = \frac{1}{\rho^{j-1}}\tilde{\beta}_n(\mu) + \frac{1}{\rho^j}\tilde{\beta}_n(\mu) + O\left(\frac{\|\psi\|_p}{\rho^{j+1}}\right),$$

$$(\psi, z_j - z_j^0) = \frac{1}{\rho^j}\tilde{\beta}_n(\mu) + O\left(\frac{\|\psi\|_p}{\rho^{j+1}}\right), \quad j = 1,2,$$

где $\tilde{\beta}_n(\mu)$ аналогичны приведенным в лемме 2, ρ, μ_0 — те же. □

Лемма 16. *Для $u(x,t)$ при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ справедлива оценка*

$$\max|u(x,t)| \leqslant c_T\|\psi\|_p, \tag{28}$$

где c_T зависит только от T.

Доказательство. Оценка (28) для $u_1(x,t)$ сразу следует из формулы (31) в [6]: $u_1(x,t) = (\psi,1)t + \frac{1}{2}[\Phi(x+t) - \Phi(x-t)]$, где $\Phi(x) = -\Phi(-x)$, $\Phi(x+2) = \Phi(x)$, $\Phi(x) = \int\limits_0^x [\psi(\tau) - (\psi,1)]\,d\tau$ при $x \in [0,1]$. Для $u_2(x,t)$ (28) получается из (12), леммы 3 и [9, лемма 2]. □

Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0,1]$ и $u_h(x,t)$ — соответствующие классические решения задачи (1)–(3).

Теорема 5. *Если $\psi(x) \in L_p[0,1]$, $1 < p \leqslant 2$, то сумма ряда формального решения задачи (1)–(3) абсолютно непрерывна по x, t и $u(x,0) = 0$; п.в. выполняются $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и условия (3). Более того, если $\|\psi_h - \psi\|_p \to 0$ при $h \to 0$, то $u_h(x,t)$ сходятся к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$, т.е. $u(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).*

Доказательство следует из лемм 14–16.

2.2. Пусть теперь $\psi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение берем как в (27).

Лемма 17. *Ряд $u_1(x,t)$ сходится всюду, а ряд $u_2(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$ и выполняется оценка $\max|u_i(x,t)| \leqslant c_T\|\psi\|_1$ $(i=1,2)$, где c_T зависит только от T.*

Утверждение для $u_1(x,t)$ доказано в [6, лемма 25], а для $u_2(x,t)$ оно очевидно. Пусть $\psi_h(x)$ и $u_h(x,t)$ — те же, что и в теореме 5, тогда из леммы 17 следует

Теорема 6. *Если $\psi(x) \in L[0,1]$, то ряд формального решения задачи* (1)–(3) *сходится всюду при $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$ и $u(x,0) = 0$. Более того, если $\|\psi_h - \psi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то классические решения $u_h(x,t)$ сходятся к $u(x,t)$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,T]$, т.е. $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи* (1)–(3).

Библиографический список

1. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
2. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
3. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565214260041
4. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466916020149
5. *Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 13–29. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для волнового уравннеия с ненулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 2. С. 157–171. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171
7. *Хромов А. П.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 9. С. 1583–1596. DOI: https://doi.org/10.31857/S004446690002535-9
8. *Хромов А. П.* О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1795–1805. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466916100112
9. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом в случае двухточечных граничных условий разных порядков // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 4. С. 505–515.
10. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.
11. *Расулов М. Л.* Метод конурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
12. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
13. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 936 с.

Образец для цитирования:

Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 4. С. 444–456. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456

Mixed Problem for a Homogeneous Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity and a Summable Potential

V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, V. A. Khalova

Vitalii P. Kurdyumov, https://orcid.org/0000-0001-8534-7692, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, Kurdyumov47@yandex.ru

Avgust P. Khromov, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, KhromovAP@sgu.ru

Victoria A. Khalova, https://orcid.org/0000-0003-2148-4932, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, KhalovaVA@gmail.com

For a mixed problem defined by a wave equation with a summable potential equal-order boundary conditions with a derivative and a zero initial position, the properties of the formal solution by the Fourier method are investigated depending on the smoothness of the initial velocity $u'_t(x,0) = \psi(x)$. The research is based on the idea of A. N. Krylov on accelerating the convergence of Fourier series and on the method of contour integrating the resolvent of the operator of the corresponding spectral problem. The classical solution is obtained for $\psi(x) \in W_p^1$ $(1 < p \leqslant 2)$, and it is also shown that if $\psi(x) \in L_p[0,1]$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, the formal solution is a generalized solution of the mixed problem.

Keywords: Fourier method, formal solution, wave equation, resolvent.

Received: 11.06.2019 / Accepted: 28.06.2019 / Published: 30.11.2020

References

1. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoj fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Applications in Engineering]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
2. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier Method in a Mixed Problem for Partial Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
3. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Resolvent approach in the Fourier method. *Dokl. Math.* 2014, vol. 90, iss. 2, pp. 545–548. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562414060076
4. Khromov A. P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 2, pp. 243–255. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542516020135
5. Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Justification of Fourier Method in a Mixed Problem for Wave Equation with Non-zero Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 1, pp. 13–29 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29
6. Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. A Mixed Problem for a Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 2, pp. 157–171 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-2-157-171

7. Khromov A. P. Mixed problem for a homogeneous wave equation with a nonzero initial velocity. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 9, pp. 1531–1543. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542518090099
8. Khromov A. P. On the convergence of the formal Fourier solution of the wave equation with a summable potential. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, iss. 10, pp. 1778–1792. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542516100110
9. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Mixed problem for the wave equation with integrable potential in the case of two-point boundary conditions of distinct orders. *Diff. Equat.*, 2017, vol. 53, iss. 4, pp. 497–508. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266117040085
10. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969. 526 p. (in Russian).
11. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The Method of Contour Integral]. Moscow, Nauka, 1964. 462 p. (in Russian).
12. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators]. Rostov-na-Donu, Izd-vo Rostovskogo universiteta, 1994. 160 p. (in Russian).
13. Bari N. K. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1961. 936 p. (in Russian).

Cite this article as:

Kurdyumov V. P., Khromov A. P., Khalova V. A. Mixed Problem for a Homogeneous Wave Equation with a Nonzero Initial Velocity and a Summable Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 4, pp. 444–456 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456