Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 100–110
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 100–110

Научная статья
УДК 519.872
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110

Выходящий поток RQ-системы M|GI|1 асимптотически рекуррентный

И. Л. Лапатин[✉], **А. А. Назаров**

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Лапатин Иван Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики, ilapatin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1198-2113

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, nazarov.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2091-6011

Аннотация. Большинство работ, рассматривающих модели с повторными вызовами, посвящены исследованию (численному, имитационному, асимптотическому) числа заявок в системе или в источнике повторных вызовов. Хотя одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой. Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов. В работе рассматривается однолинейная система с повторными вызовами, на вход которой поступает простейший поток событий. Время обслуживания заявок на приборе случайное с произвольной функцией распределения $B(x)$. Если заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени. Объектом исследования является выходящий поток данной системы. Выходящий поток характеризуется распределением вероятностей числа заявок, закончивших обслуживание за некоторое время t. Исследование проводится методом асимптотического анализа при условии большой задержки заявок на орбите. В работе показано, что выходящий поток RQ-системы M|GI|1 является асимптотически рекуррентным. При этом длины интервалов в нем представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Результаты численного эксперимента показали, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

Ключевые слова: RQ-система, выходящий поток, рекуррентный поток, метод асимптотического анализа

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).

Для цитирования: *Лапатин И. Л., Назаров А. А.* Выходящий поток RQ-системы M|GI|1 асимптотически рекуррентный // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 100–110. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110

Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process

I. L. Lapatin✉, A. A. Nazarov

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Ivan L. Lapatin, ilapatin@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1198-2113
Anatoly A. Nazarov, nazarov.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2091-6011

Abstract. Most of the studies on models with retrials are devoted to the research of the number of applications in the system or in the source of repeated calls using asymptotic and numerical approaches or simulation. Although one of the main characteristics that determines the quality of the communication system is the number of applications served by the system per unit of time. Information on the characteristics of the output processes is of great practical interest, since the output process of one system may be incoming to another. The results of the study of the outgoing flows of queuing networks are widely used in the modeling of computer systems, in the design of data transmission networks and in the analysis of complex multi-stage production processes. In this paper, we have considered a single server system with redial, the input of which receives a stationary Poisson process. The service time in considered system is a random value with an arbitrary distribution function $B(x)$. If the customer enters the system and finds the server busy, it instantly joins the orbit and carries out a random delay there during an exponentially distributed time. The object of study is the output process of this system. The output is characterized by the probability distribution of the number of customers that have completed service for time t. We have provided the study using asymptotic analysis method under low rate of retrials limit condition. We have shown in the paper that the output of retrial queue M|GI|1 is an asymptotical renewal process. Moreover, the lengths of the intervals in output process are the sum of an exponential random value with the parameter $lambda+ kappa$ and a random variable with the distribution function $B(x)$. The results of a numerical experiment show that the probability distributions of the number of served customers in the system are practically the same for significantly different distribution laws $B(x)$ of service time if the service times have the same first two moments.
Keywords: retrial queue, output process, reneval process, asymptotic analysis method
Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00277).
For citation: Lapatin I. L., Nazarov A. A. Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 100–110 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110

ВВЕДЕНИЕ

Классические модели массового обслуживания [1] возникли, прежде всего, как инструмент анализа для принятия решения в управлении производством. При этом природа моделируемых процессов может быть весьма разнообразной (например, ожидания студентами консультации у своего профессора или обслуживание договоров страховой компании). При этом выделяли два основных класса моделей — системы с ожиданием и системы с потерями.

Но быстрое развитие информационных технологий привело к тому, что возникла необходимость моделировать работу телекоммуникационных систем, сетей мобильной связи, call-центров и других, при функционировании которых используют различные модификации протоколов случайного множественного доступа. Для моделирования подобных процессов применяют еще один класс моделей массового обслуживания с повторными вызовами, или RQ-системы (Retrial Queueing System). Характерной чертой таких систем является наличие повторных обращений заявок к обслуживающему прибору (ресурсу) спустя некоторое случайное время после неудачной попытки обслуживания. Такие ситуации могут быть вызваны не только отсутствием свободных серверов в моменты поступления заявок, но некоторыми техническими причинами.

Первые работы по схожим моделям появились еще в середине XX в. [2], но основная часть работ приходится на последние десятилетия. Детальное описание RQ-систем и обзор классических результатов их исследования представлены в монографиях [3, 4]. На текущий момент существуют различные модификации дисциплин обслуживания в RQ-системах, которые позволяют более адекватно моделировать различные процессы в прикладных задачах. Например, в работах [5, 6] рассматриваются RQ-системы с вызываемыми заявками, в которых сервер обрабатывает как входящие, так и вызываемые заявки.

Большинство работ, рассматривающих модели с повторными вызовами, посвящено исследованию (численному, имитационному, асимптотическому) числа заявок в системе или в источнике повторных вызовов. Хотя одной из основных характеристик, которая определяет качество функционирования системы связи, является число обслуженных заявок системой за единицу времени. Информация о характеристиках выходящего потока представляет большой практический интерес, так как часто выходящий поток одной системы является входящим для другой. Результаты исследования выходящих потоков сетей массового обслуживания широко применяются при моделировании вычислительных систем, при проектировании сетей передачи данных и при анализе сложных многоэтапных производственных процессов.

Изучению выходящих потоков уделяется недостаточно внимания, так как на сегодняшний день не существует общих подходов к их исследованию. Характеристики выходящего потока напрямую зависят от функционирования самой системы, что увеличивает размерность решаемой задачи и усложняет аналитические исследования.

Основные результаты по аналитическому исследованию выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны в середине XX в. [7–9]. Анализ выходящего потока в системах с циклическим обслуживанием можно найти в [10], в работе [11] рассматривается выходящий поток однолинейной системы коррелированным входящим потоком. Более подробный обзор по выходящим потокам можно найти в работе [12].

В [13] получено асимптотическое распределение числа событий выходящего потока в классической RQ-системе с простейшим входящим потоком. В данной работе предлагается исследование выходящего потока более общей модели RQ-системы с произвольным распределением времени обслуживания поступающих заявок.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если же заявка, поступая в систему, обнаруживает прибор занятым, она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ, после чего делает попытку занять прибор.

Обозначим: $i(t)$ — число заявок в системе в момент времени t; $k(t)$ — состояние прибора: 0 — прибор свободен, 1 — прибор занят обслуживанием заявки входящего потока; $z(t)$ — остаточное время обслуживания заявки на приборе, т. е. продолжительность интервала от момента времени t до окончания времени обслуживания заявки; данная компонента имеет смысл только для $k(t) = 1$; $m(t)$ — число событий в выходящем потоке, наступивших за время t.

Рассмотрим марковский процесс $\{k(t) = 0, i(t), m(t)\}$, $\{k(t) = 1, i(t), z(t), m(t)\}$ с переменным числом компонент. Для распределения вероятностей

$$P\{k(t) = 0,\ i(t) = i,\ m(t) = m\} = P_0(i, m, t),$$
$$P\{k(t) = 1,\ i(t) = i,\ z(t) < z,\ m(t) = m\} = P_1(i, z, m, t)$$

составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_0(i,m,t)}{\partial t} = -(\lambda + i\sigma)P_0(i,m,t) + \frac{\partial P_1(i+1,0,m-1,t)}{\partial z},\\ \frac{\partial P_1(i,z,m,t)}{\partial t} = -\lambda P_1(i,z,m,t) + \frac{\partial P_1(i,z,m,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(i,0,m,t)}{\partial z} +\\ +\lambda P_0(i-1,m,t)B(z) + \lambda P_1(i-1,z,m,t) + i\sigma P_0(i,m,t)B(z). \end{gathered}\tag{1}$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j = \sqrt{-1}$,

$$H_0(u_1, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{jum} P_0(i, m, t),$$
$$H_1(u_1, z, u, t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{ju_1 i} e^{jum} P_1(i, z, m, t).$$

Тогда систему (1) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial t} = -\lambda H_0(u_1,u,t) + j\sigma\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial u_1} + e^{-ju_1}e^{ju}\frac{\partial H_1(u_1,0,u,t)}{\partial z},\\ \frac{\partial H_1(u_1,z,u,t)}{\partial t} = \lambda e^{ju_1}H_0(u_1,u,t)B(z) - j\sigma\frac{\partial H_0(u_1,u,t)}{\partial u_1}B(z) +\\ +\frac{\partial H_1(u_1,z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(u_1,0,u,t)}{\partial z} + \lambda(e^{ju_1}-1)H_1(u_1,z,u,t).\end{gathered}\tag{2}$$

Полученная система (2) полностью описывает функционирование RQ-системы M|GI|1, включая выходящий поток. Применяя условие согласованности для нахождения маргинальных распределений, из данной системы можно получать характеристики процессов $k(t)$, $i(t)$ и $m(t)$.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА RQ-СИСТЕМЫ M|GI|1

Систему (2) дифференциальных уравнений в частных производных будем решать методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$).

Для этого обозначим $\sigma = \varepsilon$ и в системе (2) сделаем замены

$$u_1 = \varepsilon w, \quad H_0(u_1, u, t) = F_0(w, u, t, \varepsilon), \quad H_1(u_1, z, u, t) = F_1(w, z, u, t, \varepsilon),$$

тогда система (2) будет иметь вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial F_0(w,u,t,\varepsilon)}{\partial t} = -\lambda F_0(w,u,t,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,u,t,\varepsilon)}{\partial w} + e^{-j\varepsilon w}e^{ju}\frac{\partial F_1(w,0,u,t,\varepsilon)}{\partial z},\\ \frac{\partial F_1(w,z,u,t,\varepsilon)}{\partial t} = \lambda e^{j\varepsilon w}F_0(w,u,t,\varepsilon)B(z) - j\frac{\partial F_0(w,u,t,\varepsilon)}{\partial w}B(z)+\\ +\frac{\partial F_1(w,z,u,t,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,u,t,\varepsilon)}{\partial z} + \lambda(e^{j\varepsilon w}-1)F_1(w,z,u,t,\varepsilon).\end{gathered} \tag{3}$$

Результаты асимптотического решения полученной системы (3) сформулированы в леммах и теореме.

Лемма 1. *Пусть $i(t)$ — число заявок в RQ-системе $M/GI/1$, функционирующей в стационарном режиме, тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{F_0(w,0,t,\varepsilon) + F_1(w,\infty,0,t,\varepsilon)\} = \lim_{\sigma\to 0} Me^{jw\sigma i(t)} = e^{jw\kappa}, \tag{4}$$

где κ определяется формулой

$$\kappa = \frac{\lambda^2 b}{1-\lambda b}, \tag{5}$$

в которой b имеет смысл среднего времени обслуживания заявок

$$b = \int_0^\infty (1 - B(x))\,dx.$$

Доказательство. Для доказательства этой леммы необходимо в системе (3) положить $u = 0$, что уберет из рассмотрения процесс $m(t)$. Полученную систему для процессов $\{k(t) = 0,\ i(t)\}$, $\{k(t) = 1,\ i(t),\ z(t)\}$ необходимо рассмотреть в стационарном режиме, что позволит уйти от производных по времени.

Обозначая $F_0(w,\varepsilon) = \lim\limits_{t\to\infty} F_0(w,0,t,\varepsilon)$, $F_1(w,z,\varepsilon) = \lim\limits_{t\to\infty} F_1(w,z,0,t,\varepsilon)$, получим систему

$$\begin{gathered}-\lambda F_0(w,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z} = 0,\\ \lambda e^{j\varepsilon w}F_0(w,\varepsilon)B(z) - j\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}B(z)+\\ +\frac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z} + \lambda(e^{j\varepsilon w}-1)F_1(w,z,\varepsilon) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Добавим в (6) еще одно уравнение. Для этого сложим два уравнения этой системы и устремим $z \to \infty$, обозначая $F_1(w,\varepsilon) = \lim_{z\to\infty} F_1(w,z,\varepsilon)$, запишем

$$\lambda(F_0(w,\varepsilon) + F_1(w,\varepsilon)) - e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Теперь в системе (6), (7) сделаем предельный переход $\varepsilon \to 0$ с соответствующим переобозначением функций

$$-\lambda F_0(w) + jF_0'(w) + \frac{\partial F_1(w,0)}{\partial z} = 0,$$

$$\lambda F_0(w)B(z) - jF_0'(w)B(z) + \frac{\partial F_1(w,z)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0)}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

$$\lambda(F_0(w) + F_1(w)) - \frac{\partial F_1(w,0)}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Решение системы (8), (9) будем искать в виде

$$F_0(w) = R_0\Phi(w), \quad F_1(w,z) = R_1(z)\Phi(w), \quad \lim_{z\to\infty} F_1(w,z) = F_1(w) = R_1\Phi(w).$$

Подставляя эти равенства в (8), (9) и разделив на $\Phi(w)$, получим

$$-\lambda R_0 + jR_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + R_1'(0) = 0,$$

$$R_1'(z) - R_1'(0) - jR_0\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}B(z) + \lambda R_0 B(z) = 0, \tag{10}$$

$$\lambda - R_1'(0) = 0. \tag{11}$$

Заметим, что $\{R_0, R_1\}$ является распределением вероятностей состояний прибора, т. е. процесса $k(t)$, а $R_1(z) = P\{k(t) = 1,\ z(t) < z\}$. Поскольку w содержится только в отношении $\Phi'(w)/\Phi(w)$, то оно является константой, а это означает, что сама функция $\Phi(w)$ имеет вид экспоненты:

$$\Phi(w) = e^{j\kappa w}, \quad \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} = j\kappa.$$

Теперь подставим записанные равенства и (11) в систему (10), затем решим дифференциальное уравнение относительно $R_1(z)$ и устремим $z \to \infty$, тогда получим

$$-(\lambda + \kappa)R_0 - \lambda = 0, \quad R_1 = \lambda\int_0^\infty (1 - B(x))dx = \lambda b.$$

Сложим данные уравнения и, учитывая, что $R_0 + R_1 = 1$, получим явное выражение для κ:

$$\kappa = \frac{\lambda^2 b}{1 - \lambda b},$$

совпадающее с (5). Лемма доказана. □

Перед формулировкой теоремы, содержащей основные результаты работы, сформулируем и докажем еще одну лемму. Для удобства будем использовать некоторые обозначения процессов и функций, совпадающие с уже введенными в работе, хотя в общем случае они могут не совпадать.

Рассмотрим рекуррентный поток, длины интервалов между моментами наступления событий в котором являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром α и случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Функционирование такого потока можно описать марковским процессом с переменным числом компонент $\{k(t)=0, m(t)\}$, $\{k(t)=1, z(t), m(t)\}$. Здесь $k(t)$ — номер фазы рекуррентного потока: 0 — фаза с экспоненциальным распределением, 1 — фаза с функцией распределения $A(x)$, после окончания которой наступает событие потока; $z(t)$ — остаточное время пребывания на последней фазе, т. е. продолжительность интервала от момента времени t до наступления события потока; данная компонента имеет смысл только для $k(t)=1$; $m(t)$ — число событий в рассматриваемом потоке, наступивших за время t.

Для описанного процесса можно записать распределения вероятностей

$$\begin{gathered} P\{k(t)=0,\ m(t)=m\} = P_0(m,t), \\ P\{k(t)=1,\ z(t)<z,\ m(t)=m\} = P_1(z,m,t) \end{gathered} \tag{12}$$

и ввести частичные характеристические функции

$$H_0(u,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P_0(m,t), \quad H_1(z,u,t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{jum} P_1(i,z,m,t). \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть длины интервалов между моментами наступления событий в некотором рекуррентном потоке являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром α и случайной величины с функцией распределения $A(x)$. Тогда система уравнений для частичных характеристических функций (13), описывающих распределение вероятностей числа наступивших событий в этом потоке, имеет вид*

$$\begin{gathered} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} = -\alpha H_0(u,t) + e^{ju}\frac{\partial H_1(0,u,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_1(z,u,t)}{\partial t} = \alpha H_0(u,t)A(z) + \frac{\partial H_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(0,u,t)}{\partial z}. \end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Для распределения вероятностей (12) запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_0(m,t)}{\partial t} = -\alpha P_0(m,t) + \frac{\partial P_1(0,m-1,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial P_1(z,m,t)}{\partial t} = \alpha P_0(m,t)A(z) + \frac{\partial P_1(z,m,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(0,m,t)}{\partial z}. \end{gathered} \tag{15}$$

Домножая каждое уравнение системы (14) на e^{jum} и суммируя по m, получим систему для частичных характеристических функций (13)

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} = -\alpha H_0(u,t) +, e^{ju}\frac{\partial H_1(0,u,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H_1(z,u,t)}{\partial t} = \alpha H_0(u,t)A(z) + \frac{\partial H_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1(0,u,t)}{\partial z},$$

которая совпадает с системой (14). Лемма доказана. □

Результаты лемм 1, 2 нам будут необходимы для доказательства основной теоремы.

Теорема. *Пусть $m(t)$ — число событий в выходящем потоке, наступивших за время t в RQ-системе M|GI|1. Тогда в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$) асимптотическое распределение вероятностей значений процесса $m(t)$ совпадает с распределением вероятностей числа событий, наступивших в рекуррентном потоке, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Здесь λ — интенсивность входящего потока, κ — нормированное среднее число заявок в системе, которое определяется формулой* (5).

Доказательство. Обозначим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_0(w,u,t,\varepsilon) = F_0(w,u,t), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} F_1(w,z,u,t,\varepsilon) = F_1(w,z,u,t)$$

и сделаем предельный переход в системе (3). Тогда получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_0(w,u,t)}{\partial t} = -\lambda F_0(w,u,t) + j\frac{\partial F_0(w,u,t)}{\partial w} + e^{ju}\frac{\partial F_1(w,0,u,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(w,z,u,t)}{\partial t} = \lambda F_0(w,u,t)B(z) - j\frac{\partial F_0(w,u,t)}{\partial w}B(z) + \\ + \frac{\partial F_1(w,z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,u,t)}{\partial z}. \end{gathered} \tag{16}$$

Решение системы (16) будем искать в виде

$$F_0(w,u,t) = \Phi(w)F_0(u,t), \quad F_1(w,z,u,t) = \Phi(w)F_1(z,u,t). \tag{17}$$

Здесь функция $\Phi(w)$ имеет смысл асимптотического приближения характеристической функции числа заявок в системе в условии большой задержки на орбите. Подставляя (17) в систему (16) и разделив обе части уравнений на $\Phi(w)$, получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_0(u,t)}{\partial t} = -\lambda F_0(u,t) + j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} + e^{ju}\frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial t} = \lambda F_0(u,t)B(z) - j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}B(z) + \frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}. \end{gathered} \tag{18}$$

В лемме 1 доказано, что $\Phi(w) = \lim\limits_{\sigma\to 0} Me^{jw\sigma i(t)} = e^{jw\kappa}$, где κ имеет смысл нормированного среднего числа заявок в системе и определяется формулой (5). В этом случае из (18) получаем систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_0(u,t)}{\partial t} = -(\lambda+\kappa)F_0(u,t) + e^{ju}\frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial t} = (\lambda+\kappa)F_0(u,t)B(z) + \frac{\partial F_1(z,u,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(0,u,t)}{\partial z}. \end{gathered} \tag{19}$$

Система (18) совпадает по виду с системой (14), где $\alpha = \lambda + \kappa$ и $A(x) = B(x)$. Соответственно, выходящий поток RQ-системы M|GI|1 в условии большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$), определяемый функциями $F_0(u,t)$ и $F_1(z,u,t)$, является рекуррентным, длины интервалов которого представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. Теорема доказана. $\square$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Теорема не только показывает принадлежность выходящего потока системы M|GI|1 к классу рекуррентных при выполнении асимптотического условия большой задержки заявок на орбите ($\sigma \to 0$), но и определяет распределение длин интервалов в этом потоке через параметры системы.

Длины интервалов являются суммой экспоненциальной случайной величины с параметром $\lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$. То есть функция распределения длины интервала определяется как свертка функций $1 - e^{-(\lambda+\kappa)x}$ и $B(x)$.

Зная функцию распределения длин интервалов для рекуррентного потока, можно воспользоваться известными результатами (например [14]) для нахождения асимптотического и допредельного распределения вероятностей числа событий, наступивших в потоке за некоторое время t.

С другой стороны, поскольку в нашем случае распределение длин интервалов имеет определенную структуру, описываемую системой (18), можно с помощью интегральных преобразований решить эту систему, затем, применяя обратное преобразование Фурье, получить распределение вероятностей числа событий, наступивших в потоке за некоторое время t.

Распределения находились для различных параметров системы и законов распределения времени обслуживания заявок. Анализ полученных результатов численного эксперимента показал, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

В частности, пусть $B_1(x)$ — гамма-распределение с параметром формы s и параметром масштаба β, а $B_2(x) = 1 - e^{-\rho x^2}$ — распределение Релея. Возьмем $\beta = s = 3.66$ и $\rho = 0.786$, что обеспечит равенство двух первых моментов для этих распределений, при этом среднее равно 1.

В таблице приведены расстояния Колмогорова

$$\Delta(t) = \max_{0 \leqslant i \leqslant \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \left(P_1(n,t) - P_2(n,t)\right) \right|$$

между распределениями $P_1(i,t)$ и $P_2(i,t)$ числа событий рекуррентного потока, длины интервалов которого являются суммой экспоненциальной случайной величины

Таблица / Table

Расстояние Колмогорова $\Delta(t)$ / Kolmogorov distance $\Delta(t)$

γ \ t	1	5	10	20	50
0.1	0.00057	0.00003	0.00002	0.00005	0.00005
1	0.00200	0.00200	0.00100	0.00064	0.00064
10	0.01900	0.00900	0.00800	0.00500	0.00200

с параметром $\gamma = \lambda + \kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ соответственно.

Из данных таблицы видно, что даже при увеличении γ, что соответствует уменьшению вклада экспоненциально распределенного первого одинакового слагаемого в общую длину интервалов в рассматриваемых потоках, расстояние Колмогорова остается незначительным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрен выходящий поток RQ-системы M|GI|1 при асимптотическом условии большой задержки заявок на орбите. Доказано, что выходящий поток является асимптотически рекуррентным.

При этом длины интервалов его представляют собой сумму экспоненциальной величины с параметром $\lambda+\kappa$ и случайной величины с функцией распределения $B(x)$.

Результаты численного эксперимента показали, что при существенно различных законах распределения $B(x)$ времени обслуживания заявок, но имеющих равные первые два момента, распределения вероятностей числа событий выходящего потока практически не отличаются.

Список литературы

1. *Гнеденко Б. В. Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд. Москва : ЛКИ, 2007. 400 с.
2. *Wilkinson R. I.* Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell System Technical Journal. 1956. Vol. 35, № 2. P. 421–507.
3. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin : Springer, 2008. 318 p.
4. *Falin G. I., Templeton J. G. C.* Retrial Queues. London : Chapman and Hall, 1997. 320 p.
5. *Artalejo J. R., Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. Vol. 37, № 4. P. 1811–1822. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.022
6. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. Budapest, Hungary : ECMS, 2017. P. 687–693. https://dx.doi.org/10.7148/2017-0687
7. *Burke P. J.* The output of queueing systems // Operations Research. 1956. Vol. 4, iss. 6. P. 629–753. https://doi.org/10.1287/opre.4.6.699
8. *Reich E.* Waiting times when queues are in tandem // The Annals of Mathematical Statistics. 1957. Vol. 28, № 3. P. 768–773.
9. *Finch P. D.* The output process of the queueing system M|G|1 // Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological). 1959. Vol. 21, iss. 2. P. 375–380. https://doi.org/10.1111/ j.2517-6161.1959.tb00344.x
10. *Пройдакова Е. В., Федоткин М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автоматика и телемеханика. 2008. № 6. С. 96–106.
11. *Green D.* Departure Processes from MAP/PH/1 Queues. Thesis (Ph. D.), University of Adelaide, Department of Applied Mathematics, 1999. 12 p.
12. *Лапатин И. Л.* Исследование выходящих потоков моделей массового обслуживания с неограниченным числом приборов : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Томский государственный университет. Томск, 2012. 138 с.

13. *Лапатин И. Л., Назаров А. А.* Исследование выходящего потока в RQ-системе M/M/1 в асимптотическом условии большой задержки на орбите // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2018) : материалы XXI Международной научной конференции. Москва : Издательство РУДН, 2018. С. 246–253.
14. *Лопухова С. В., Назаров А. А.* Исследование рекуррентного потока // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2007. № 1. С. 67–76.

References

1. Gnedenko B. V., Kovalenko I. N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzchivaniya* [Introduction to Queuing Theory]. Moscow, LKI, 2007. 400 p. (in Russian).
2. Wilkinson R. I. Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal*, 1956, vol. 35, no. 2, pp. 421–507.
3. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin, Springer, 2008. 318 p.
4. Falin G., Templeton J. *Retrial Queues*. London, Chapman and Hall, 1997. 320 p.
5. Artalejo J. R., Phung-Duc T. Single server retrial queues with two way communication. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 1811–1822. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.022
6. Nazarov A., Paul S., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. Budapest, Hungary, ECMS, 2017, pp. 687–693. https://doi.org/10.7148/2017-0687
7. Burke P. J. The output of queueing systems. *Operations Research*, 1956, vol. 4, iss. 6, pp. 629–753. https://doi.org/10.1287/opre.4.6.699
8. Reich E. Waiting times when queues are in tandem. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1957, vol. 28, no. 3, pp. 768–773.
9. Finch P. D. The output process of the queueing system M|G|1. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1959, vol. 21, iss. 2, pp. 375–380. https://doi.org/ 10.1111/j.2517-6161.1959.tb00344.x
10. Projdakova E. V., Fedotkin M. A. Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 6, pp. 993–1002. https://doi.org/10.1134/S000511790806009X
11. Green D. *Departure processes from MAP/PH/1 queues*. Thesis (Ph. D.), University of Adelaide, Department of Applied Mathematics, 1999. 12 p.
12. Lapatin I. L. *Issledovanie vykhodiashchikh potokov modelei massovogo obsluzhivaniia s neogranichennym chislom priborov* [Investigation of output process queuing models with an unlimited number of devices]. Diss. Cand. Sci. (Phys. and Math.), Tomsk State University. Tomsk, 2012. 138 p. (in Russian).
13. Lapatin I. L., Nazarov A. A. Investigation of output process RQ system M/M/1 in the asymptotic condition of a large delay in orbit. *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2018)*: Procedings of the XXI International Scientific Conference. Moscow, Izdatel'stvo RUDN, 2018, pp. 246–252 (in Russian).
14. Lopuchova S. V., Nazarov A. A. Research of general independent process. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2007, no. 1, pp. 67–76 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.11.2019
Принята к публикации / Accepted 20.02.2020
Опубликована / Published 01.03.2021