Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–124
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 111–124

Научная статья
УДК 519.872
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124

Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками

А. А. Назаров, С. В. Пауль✉, О. Д. Лизюра

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Назаров Анатолий Андреевич, доктор технических наук, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, nazarov.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2091-6011
Пауль Светлана Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики, paulsv82@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-3681-0676
Лизюра Ольга Дмитриевна, студент магистратуры кафедры теории вероятностей и математической статистики, oliztsu@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4463-4876

Аннотация. В работе рассматривается однолинейная система массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-система) с марковски модулированным пуассоновским потоком (MMPP) на входе и разнотипными вызываемыми заявками. Заявки, поступившие в систему, занимают прибор для обслуживания, если он свободен, или отправляются на орбиту, где осуществляют случайную задержку перед следующей попыткой занять прибор. Длительность задержки имеет экспоненциальное распределение. Особенностью данной системы является наличие вызываемых заявок нескольких типов. Интенсивности вызывания заявок различны для разных типов вызываемых заявок. Длительности обслуживания вызываемых заявок также различаются в зависимости от типа и являются экспоненциальными случайными величинами, параметры которых в общем случае не совпадают. Прибор вызывает заявки извне, только когда не обслуживает поступившие из потока заявки. Работа посвящена исследованию такой системы методом асимптотического анализа в двух предельных условиях: высокой интенсивности вызывания заявок и длительного обслуживания вызываемых заявок. Целью исследования является нахождение предельного стационарного распределения вероятностей числа заявок в системе, поступивших из потока, без учета вызываемой заявки, если она обслуживается на приборе. Получены асимптотические характеристические функции числа поступивших заявок в системе в вышеназванных предельных условиях. В предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе с повторными вызовами и разнотипными вызываемыми заявками является характеристической функцией гауссовской случайной величины. Однозначно определен вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в исследуемой системе в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок.

Ключевые слова: RQ-система, поступающие заявки, вызываемые заявки, метод асимптотического анализа

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).

Для цитирования: *Назаров А. А., Пауль С. В., Лизюра О. Д.* Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с разнотипными вызываемыми заявками // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 111–124. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124

Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls

A. A. Nazarov, S. V. Paul✉, O. D. Lizyura

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Anatoly A. Nazarov, nazarov.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-2091-6011
Svetlana V. Paul, paulsv82@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-3681-0676
Olga D. Lizyura, oliztsu@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4463-4876

Abstract. In this paper, we consider a single server retrial queue MMPP|M|1 with two way communication and multiple types of outgoing calls. Calls received by the system occupy the device for operating, if it is free, or are sent to orbit, where they make a random delay before the next attempt to occupy the device. The duration of the delay has an exponential distribution. The main issue of this model is an existence of various types of outgoing calls in the system. The intensity of outgoing calls is different for different types of outgoing calls. The operating time of the outgoing calls also differs depending on the type and is exponential random variable, the parameters of which in the general case do not coincide. The device generates calls from the outside only when it does not operate the calls received from the flow. We use asymptotic analysis methods under two limit conditions: high rate of outgoing calls and low rate of serving outgoing calls. The aim of the current research is to derive an asymptotic stationary probability distribution of the number of incoming calls in the system that arrived from the flow, without taking into account the outgoing call if it is operated on the device. In this paper, we obtain asymptotic characteristic function under aforementioned limit conditions. In the limiting condition of high intensity of outgoing calls, the asymptotic characteristic function of the number of incoming calls in a system with repeated calls and multiple types of outgoing calls is a characteristic function of a Gaussian random variable. The type of the asymptotic characteristic function of the number of incoming calls in the system under study in the limiting condition of long-term operation of the outgoing calls is uniquely determined.
Keywords: retrial queue, Markov modulated Poisson process, incoming calls, outgoing calls, asymptotic analysis method
Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-01-00277).
For citation: Nazarov A. A., Paul S. V., Lizyura O. D. Heavy outgoing call asymptotics for MMPP|M|1 retrial queue with two way communication and multiple types of outgoing calls. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 111–124 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-111-124

ВВЕДЕНИЕ

RQ-системы (Retrial Queueing system) характеризуются следующей отличительной особенностью: заявка, заставшая прибор занятым при поступлении в систему, уходит на орбиту, где осуществляет случайную задержку, после чего повторяет попытку занять прибор. RQ-системы являются адекватными моделями телекоммуникационных систем, компьютерных сетей и реальных объектов. В монографиях [1, 2] приводятся обширные исследования таких моделей.

Модели RQ-систем с вызываемыми заявками имеют приложение в работе таких систем как call-центры, где оператор в свободное время совершает звонки или занимается альтернативными видами деятельности. О приложениях RQ-систем в моделировании call-центров изложено в работах [3, 4].

RQ-системы с вызываемыми заявками активно изучаются в последнее время [5–7]. В упомянутых выше работах исследуются RQ-системы с вызываемыми заявками и различными их модификациями. Модель RQ-системы с несколькими типами вызываемых заявок рассмотрена в [8]. Для такой модели был получен численный алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

В данной работе в качестве метода исследования рассматриваемых моделей применяется метод асимптотического анализа. В работах [9, 10] метод асимптотического анализа предложен для исследования RQ-систем M|M|1 и MMPP|M|1 с вызываемыми заявками, тогда как в данной работе рассматривается модель с разнотипными вызываемыми заявками.

1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим однолинейную RQ-систему, т. е. систему массового обслуживания с повторными вызовами, на вход которой поступает марковски модулированный пуассоновский поток заявок (MMPP). Заявки, поступающие в систему из потока, занимают прибор для обслуживания и обслуживаются экспоненциальное случайное время с параметром μ_1, если прибор свободен. Если поступившая заявка застает прибор занятым, она отправляется на орбиту, где осуществляет случайную задержку. Длительность задержки имеет экспоненциальное распределение с параметром σ.

Когда прибор свободен, он вызывает заявку извне. В системе N типов вызываемых заявок. Прибор вызывает заявки типа n с интенсивностью α_n. Вызванная заявка мгновенно занимает прибор для обслуживания. Время обслуживания вызываемой заявки типа n распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_n. Для удобства исследования пронумеруем типы вызываемых заявок от 2 до $N+1$.

Пусть $i(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, поступивших из потока, т. е. без учета вызванной заявки, если она обслуживается на приборе. Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, поэтому введем дополнительный процесс $k(t)$, характеризующий состояние прибора в момент времени t, принимая значения: 0, если прибор свободен; 1, если обслуживается поступившая из потока заявка; n, если обслуживается вызываемая заявка типа n. Также введем процесс $m(t)$ — цепь Маркова, управляющую MMPP-потоком. Процесс $m(t)$ задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$. Когда $m(t) = m$, интенсивность входящего потока равна λ_m, $m = \overline{1, M}$.

Трехмерный процесс $\{i(t), k(t), m(t)\}$ образует цепь Маркова с непрерывным временем. Обозначим $P\{i(t) = i,\ k(t) = k,\ m(t) = m\} = P_k(i, m, t)$ — вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k, в системе находится

i заявок и управляющая MMPP-потоком цепь Маркова $m(t)$ принимает значение m.

Запишем систему уравнений Колмогорова для данного процесса в стационарном режиме

$$-\left(\lambda_m + i\sigma + \sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\right)P_0(i,m) + \mu_1 P_1(i+1,m) + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n P_n(i,m) + \sum_{\nu=1}^{M} P_0(i,\nu)q_{\nu m} = 0,$$

$$-(\lambda_m+\mu_1)P_1(i,m)+\lambda_m P_1(i-1,m)+\lambda_m P_0(i-1,m)+i\sigma P_0(i,m)+\sum_{\nu=1}^{M} P_1(i,\nu)q_{\nu m}=0,$$

$$-(\lambda_m + \mu_n)P_n(i,m) + \lambda_m P_n(i-1,m) + \alpha_n P_0(i,m) + \sum_{\nu=1}^{M} P_n(i,\nu)q_{\nu m} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Перейдем к частичным характеристическим функциям $H_k(u,m) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{jui}P_k(i,m)$, $k = \overline{0, N+1}$, где $j = \sqrt{-1}$. Домножим уравнения системы на e^{jui} и просуммируем по i, откуда с использованием обозначений

$$\mathbf{H}_n(u) = \{H_n(u,1), H_n(u,2), \ldots, H_n(u,M)\},$$
$$\mathbf{H}'_n(u) = \left\{\frac{\partial H_n(u,1)}{\partial u}, \frac{\partial H_n(u,2)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial H_n(u,M)}{\partial u}\right\},$$
$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\,[\lambda_m], \quad \mathbf{I} \text{ — единичная матрица},$$

получим систему

$$\mathbf{H}_0(u)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n \mathbf{I}\right) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju}\mathbf{H}_1(u) + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{H}_n(u) = 0,$$
$$\mathbf{H}_1(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u)e^{ju}\mathbf{\Lambda} - j\sigma\mathbf{H}'_0(u) = 0,$$
$$\mathbf{H}_n(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}) + \alpha_n\mathbf{H}_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$
$$\mathbf{H}_0(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{H}_1(u)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{ju}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{H}_n(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = 0. \tag{1}$$

Последнее уравнение системы (1) является вспомогательным и получено путем суммирования уравнений системы и домножения справа на единичный вектор $\mathbf{e}$.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 С *N* ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ВЫЗЫВАНИЯ ЗАЯВОК

В этом разделе мы рассмотрим предложенную модель в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для удобства исследования представим параметры RQ-системы в виде $\alpha_n = \alpha\gamma_n$, где $n = \overline{2, N+1}$, и запишем систему (1) в виде

$$\mathbf{H}_0(u)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \alpha\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n \mathbf{I}\right) + j\sigma\mathbb{H}'_0(u) + \mu_1 e^{-ju}\mathbf{H}_1(u) + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{H}_n(u) = 0,$$
$$\mathbf{H}_1(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u)e^{ju}\mathbf{\Lambda} - j\sigma\mathbf{H}'_0(u) = 0,$$
$$\mathbf{H}_n(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}) + \alpha\gamma_n\mathbf{H}_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$

$$\mathbf{H}_0(u)\mathbf{\Lambda e} + \mathbf{H}_1(u)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-ju}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1} \mathbf{H}_n(u)\mathbf{\Lambda e} = 0. \tag{2}$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно высокой интенсивности вызывания заявок имеет вид $\alpha \to \infty$.

Теорема 1. *Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty} E \exp\left\{jw\frac{i(t)}{\alpha}\right\} = \exp\{jw\kappa_1\}, \tag{3}$$

где κ_1 — положительный корень уравнения

$$\mathbf{R}\left\{\sigma\kappa_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})^{-1}\right\}^{-1} \times$$
$$\times\left\{\sigma\kappa_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I}) + \sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})^{-1}\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e} = 0,$$

вектор-строка $\mathbf{R}$ — стационарное распределение состояний процесса $m(t)$, определяемого системой уравнений $\mathbf{RQ} = 0$, $\mathbf{Re} = 1$.

Доказательство. В системе уравнений (2) введем следующие замены:

$$\alpha = 1/\varepsilon, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon), \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{F}_k(w,\varepsilon), \quad k = \overline{1, N+1},$$

чтобы получить систему уравнений

$$\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\left(\varepsilon\mathbf{Q} - \varepsilon\mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}\right) + j\sigma\frac{\partial\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + \mu_1 e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}_1(w,\varepsilon) + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{F}_n(w,\varepsilon) = 0,$$
$$\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)e^{jw\varepsilon}\mathbf{\Lambda} - j\sigma\frac{\partial\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0,$$
$$\mathbf{F}_n(w,\varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon}-1)\mathbf{\Lambda} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\mathbf{F}_0(w,\varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$
$$\varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda e} + \mathbf{F}_1(w,\varepsilon)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-jw\varepsilon}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{F}_n(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda e} = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим систему уравнений (4) в пределе при $\varepsilon \to 0$:

$$-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{F}_0(w) + j\sigma\mathbf{F}_0'(w) + \mu_1\mathbf{F}_1(w) + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{F}_n(w) = 0,$$
$$\mathbf{F}_1(w)(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) - j\sigma\mathbf{F}_0'(w) = 0,$$
$$\mathbf{F}_n(w)(\mathbf{Q} - \mu_n\mathbf{I}) + \gamma_n\mathbf{F}_0(w) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$
$$\mathbf{F}_1(w)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{F}_n(w)\mathbf{\Lambda e} = 0, \tag{5}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}_k(w,\varepsilon)=\mathbf{F}_k(w)$. Будем искать решение системы уравнений (5) в виде

$$\mathbf{F}_k(w)=\Phi(w)\mathbf{R}_k, \tag{6}$$

где $\mathbf{R}_k$ — стационарное распределение состояний прибора. Подставим (6) в (5) и разделим уравнения на $\Phi(w)$, откуда получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{R}_0+j\sigma\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\mathbf{R}_0+\mu_1\mathbf{R}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{R}_n=0,\\
\mathbf{R}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})-j\sigma\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}\mathbf{R}_0=0,\\
\mathbf{R}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{R}_0=0,\quad n=\overline{2,N+1},\\
\mathbf{R}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=0.
\end{gathered}$$

Так как отношение $j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ не зависит от w, можем записать функцию $\Phi(w)$ в виде

$$\Phi(w)=\exp\{jw\kappa_1\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Отношение можем записать в виде $j\frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}=-\kappa_1$. С учетом полученного систему уравнений перепишем следующим образом:

$$\begin{gathered}
-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{R}_0-\sigma\kappa_1\mathbf{R}_0+\mu_1\mathbf{R}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{R}_n=0,\\
\mathbf{R}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1\mathbf{R}_0=0,\\
\mathbf{R}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{R}_0=0,\quad n=\overline{2,N+1},\\
\mathbf{R}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=0.
\end{gathered}\tag{7}$$

Из второго и третьего уравнений системы (7) получим следующие выражения:

$$\mathbf{R}_1=\sigma\kappa_1\mathbf{R}_0(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}, \tag{8}$$

$$\mathbf{R}_n=\gamma_n\mathbf{R}_0(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\ n=\overline{2,N+1}. \tag{9}$$

Подставим полученные выражения в условие нормировки для $\mathbf{R}_k$ и получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{N+1}\mathbf{R}_k=\sigma\kappa_1\mathbf{R}_0(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{R}_0(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}=\mathbf{R}.$$

Из уравнения запишем следующее выражение:

$$\mathbf{R}_0=\mathbf{R}\left\{\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right\}^{-1}. \tag{10}$$

Далее подставим выражения (8), (9) и (10) в четвертое уравнение системы (7) и получим уравнение относительно искомого неизвестного параметра κ_1

$$\mathbf{R}\left\{\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})+\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{\Lambda}\right\}\mathbf{e}=0.$$

□

Теорема 1 определяет асимптотическое среднее значение κ_1 числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Для более детального исследования случайного процесса перейдем к асимптотике второго порядка.

Теорема 2. *Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\alpha\to\infty} M\exp\left\{jw\frac{i(t)-\alpha\kappa_1}{\sqrt{\alpha}}\right\}=e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2}, \tag{11}$$

где

$$\kappa_2=\frac{\mathbf{y}_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda})\mathbf{e}-\sum\limits_{n=2}^{N+1}\mathbf{y}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}}{\sigma\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum\limits_{n=2}^{N+1}\mathbf{g}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}\right]}.$$

Векторы $\mathbf{y}_k$ и $\mathbf{g}_k$ являются решениями следующих систем уравнений:

$$\mathbf{g}_1=(\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0+\mathbf{R}_0)(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\ \mathbf{g}_n=\gamma_n\mathbf{g}_0(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad n=\overline{2,N+1},$$
$$\mathbf{g}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}+\mu_1\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right)=$$
$$=\mathbf{R}_0-\mathbf{R}_0\mu_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad \sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{g}_k\mathbf{e}=0,$$
$$\mathbf{y}_1=(\sigma\kappa_1\mathbf{y}_0+\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda})(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad \mathbf{y}_n=(\gamma_n\mathbf{y}_0+\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda})(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad n=\overline{2,N+1},$$
$$\mathbf{y}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}+\mu_1\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right)=$$
$$=\mu_1\mathbf{R}_1-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}-\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad \sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{y}_k\mathbf{e}=0.$$

Доказательство. В системе уравнений (2) введем замены

$$\mathbf{H}_k(u)=e^{ju\alpha\kappa_1}\mathbf{H}_k^{(2)}(u),\quad k=\overline{0,N+1},$$

чтобы получить систему уравнений (12).

$$\mathbf{H}_0^{(2)}(u)\left(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-\alpha\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\alpha\kappa_1\mathbf{I}\right)+j\sigma\frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du}+\mu_1e^{-ju}\mathbf{H}_1^{(2)}(u)+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{H}_n^{(2)}(u)=0,$$

$$\mathbf{H}_1^{(2)}(u)(\mathbf{Q}+(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})+\mathbf{H}_0^{(2)}(u)(e^{ju}\mathbf{\Lambda}+\sigma\alpha\kappa_1\mathbf{I})-j\sigma\frac{d\mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{du}=0,$$
$$\mathbf{H}_n^{(2)}(u)(\mathbf{Q}+(e^{ju}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_n\mathbf{I})+\alpha\gamma_n\mathbf{H}_0^{(2)}(u)=0,\quad n=\overline{2,N+1},$$
$$\mathbf{H}_0^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\mathbf{H}_1^{(2)}(u)(\mathbf{\Lambda}-\mu_1e^{-ju}\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{H}_n^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=0. \qquad (12)$$

В системе уравнений (12) введем следующие замены:

$$\alpha=1/\varepsilon^2,\ u=w\varepsilon,\ \mathbf{H}_0^{(2)}(u)=\varepsilon^2\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon),\ \mathbf{H}_k^{(2)}(u)=\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\varepsilon),\quad n=\overline{1,N+1},$$
$$\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)\left(\varepsilon^2\mathbf{Q}-\varepsilon^2\mathbf{\Lambda}-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)+j\sigma\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}+\mu_1e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)+$$
$$+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{F}_n^{(2)}(w,\varepsilon)=0,$$
$$\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)(\mathbf{Q}+(e^{jw\varepsilon}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})+\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)(\varepsilon^2e^{jw\varepsilon}\mathbf{\Lambda}+\sigma\kappa_1\mathbf{I})-j\sigma\frac{\partial\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,$$
$$\mathbf{F}_n^{(2)}(w,\varepsilon)(\mathbf{Q}+(e^{jw\varepsilon}-1)\mathbf{\Lambda}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)=0,\quad n=\overline{2,N+1},$$
$$\mathbf{F}_0^{(2)}(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\mathbf{F}_1^{(2)}(w,\varepsilon)(\mathbf{\Lambda}-\mu_1e^{-jw\varepsilon}\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{F}_n^{(2)}(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=0. \qquad (13)$$

Будем искать решение полученной системы уравнений в виде (13)

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w,\varepsilon)=\Phi_2(w)\{\mathbf{R}_k+jw\varepsilon\mathbf{f}_k\}+o(\varepsilon^2),\quad k=\overline{0,N+1}. \qquad (14)$$

Подставим разложение (14) в систему уравнений (13), разложим экспоненты в ряд Тейлора и поделим уравнения системы на $jw\Phi_2(w)$, откуда с учетом полученных ранее уравнений (7) в пределе при $\varepsilon\to 0$ получим

$$-\left(\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}+\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{f}_0+\mu_1\mathbf{f}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{f}_n-\mu_1\mathbf{R}_1+\sigma\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{R}_0=0,$$
$$\mathbf{f}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1\mathbf{f}_0+\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}-\sigma\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}\mathbf{R}_0=0,$$
$$\mathbf{f}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{f}_0+\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}=0,\ n=\overline{2,N+1},$$
$$\mathbf{f}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{f}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}+\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}=0.$$

Так как отношение $\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)}$ не зависит от w, можем записать функцию $\Phi_2(w)$ в следующем виде:

$$\Phi_2(w)=\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

что и утверждается в формулировке теоремы. Подставляя в уравнения системы

$\frac{\Phi_2'(w)}{w\Phi_2(w)} = -\kappa_2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
-\left(\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}+\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)\mathbf{f}_0+\mu_1\mathbf{f}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{f}_n=\mu_1\mathbf{R}_1+\sigma\kappa_2\mathbf{R}_0,\\
\mathbf{f}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1\mathbf{f}_0=-\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}-\sigma\kappa_2\mathbf{R}_0,\\
\mathbf{f}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{f}_0=-\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda},\ n=\overline{2,N+1},\\
\mathbf{f}_1(\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{f}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}.
\end{gathered}\tag{15}$$

Неоднородная система уравнений (15) аналогична однородной системе уравнений (7), следовательно, решение данной системы можно записать в виде $\mathbf{f}_k = C\mathbf{R}_k + \sigma\kappa_2\mathbf{g}_k + \mathbf{y}_k$, откуда получим

$$\begin{gathered}
-\left(\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}+\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)[C\mathbf{R}_0+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_0+\mathbf{y}_0]+\mu_1[C\mathbf{R}_1+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_1+\mathbf{y}_1]+\\
+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n[C\mathbf{R}_n+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_n+\mathbf{y}_n]=\mu_1\mathbf{R}_1+\sigma\kappa_2\mathbf{R}_0,\\
[C\mathbf{R}_1+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_1+\mathbf{y}_1](\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1[C\mathbf{R}_0+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_0+\mathbf{y}_0]=-\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}-\sigma\kappa_2\mathbf{R}_0,\\
[C\mathbf{R}_n+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_n+\mathbf{y}_n](\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n[C\mathbf{R}_0+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_0+\mathbf{y}_0]=-\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda},\quad n=\overline{2,N+1},\\
[C\mathbf{R}_0+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_0+\mathbf{y}_0](\mathbf{\Lambda}-\mu_1\mathbf{I})\mathbf{e}+\sum_{n=2}^{N+1}[C\mathbf{R}_0+\sigma\kappa_2\mathbf{g}_0+\mathbf{y}_0]\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}=-\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}.
\end{gathered}\tag{16}$$

В системе уравнений (16) слагаемые, содержащие константу C, уничтожаются. Из первого, второго и третьего уравнений системы соберем коэффициенты при различных степенях κ_2 в две системы уравнений:

$$\begin{gathered}
\mathbf{g}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)+\mu_1\mathbf{g}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{g}_n=\mathbf{R}_0,\\
\mathbf{g}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0=-\mathbf{R}_0,\\
\mathbf{g}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{g}_0=0,\quad n=\overline{2,N+1};
\end{gathered}\tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}\right)+\mu_1\mathbf{y}_1+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{y}_n=\mu_1\mathbf{R}_1,\\
\mathbf{y}_1(\mathbf{Q}-\mu_1\mathbf{I})+\sigma\kappa_1\mathbf{y}_0=-\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda},\\
\mathbf{y}_n(\mathbf{Q}-\mu_n\mathbf{I})+\gamma_n\mathbf{y}_0=-\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda},\quad n=\overline{2,N+1}.
\end{gathered}\tag{18}$$

Из систем уравнений (17) и (18) получим следующие выражения:

$$\begin{gathered}
\mathbf{g}_1=(\sigma\kappa_1\mathbf{g}_0+\mathbf{R}_0)(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\\
\mathbf{g}_n=\gamma_n\mathbf{g}_0(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\quad n=\overline{2,N+1},\\
\mathbf{g}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I}-\sigma\kappa_1\mathbf{I}+\mu_1\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n(\mu_n\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\right)=
\end{gathered}$$

$$= \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_0\mu_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}; \tag{19}$$

$$\mathbf{y}_1 = (\sigma\kappa_1\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda})(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1},$$

$$\mathbf{y}_n = (\gamma_n\mathbf{y}_0 + \mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda})(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, n = \overline{2, N+1},$$

$$\mathbf{y}_0\left(-\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{I} - \sigma\kappa_1\mathbf{I} + \mu_1\sigma\kappa_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\gamma_n(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\right) =$$

$$= \mu_1\mathbf{R}_1 - \mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{\Lambda}(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \sum_{n=2}^{N+1}\mu_n\mathbf{R}_n\mathbf{\Lambda}(\mu_n\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{20}$$

Наложим дополнительные условия

$$\sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{g}_k\mathbf{e} = 0, \quad \sum_{k=0}^{N+1}\mathbf{y}_k\mathbf{e} = 0,$$

что позволит однозначно найти решения систем уравнений (19) и (20).

Приводя подобные слагаемые в четвертом уравнении системы (16), получим

$$\sigma\kappa_2\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{g}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}\right] + \left[\mathbf{y}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{y}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}\right] = -\mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}.$$

Отсюда получим явное выражение для κ_2

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{y}_1(\mu_1\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{e} - \sum\limits_{n=2}^{N+1}\mathbf{y}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} - \mu_1\mathbf{R}_1\mathbf{e}}{\sigma\left[\mathbf{g}_1(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum\limits_{n=2}^{N+1}\mathbf{g}_n\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}\right]}.$$

□

Теорема 2 показывает, что в предельном условии асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок является характеристической функцией гауссовской случайной величины с математическим ожиданием $\kappa_1\alpha$ и дисперсией $\kappa_2\alpha$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ RQ-СИСТЕМЫ MMPP|M|1 С *N* ТИПАМИ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК В ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ ДЛИТЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ВЫЗЫВАЕМЫХ ЗАЯВОК

Представим параметры системы (1) в виде $\mu_n = \mu\gamma_n$, $n = \overline{2, N+1}$ и запишем систему в следующем виде:

$$\mathbf{H}_0(u)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\mathbf{I}\right) + j\sigma\mathbf{H}_0'(u) + \mu_1 e^{-ju}\mathbf{H}_1(u) + \mu\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{H}_n(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_1(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \mathbf{H}_0(u)e^{ju}\mathbf{\Lambda} - j\sigma\mathbf{H}_0'(u) = 0,$$

$$\mathbf{H}_n(u)(\mathbf{Q} + (e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu\gamma_n\mathbf{I}) + \alpha_n\mathbf{H}_0(u) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$

$$\mathbf{H}_0(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + \mathbf{H}_1(u)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-ju}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{H}_n(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = 0. \tag{21}$$

В предложенных обозначениях предельное условие согласованно длительного обслуживания вызываемых заявок имеет вид $\mu \to 0$.

Теорема 3. *Если $i(t)$ — число поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок, то выполняется предельное равенство*

$$\lim_{\mu\to 0} Me^{jw\mu i(t)} = \frac{1}{\nu}\sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\gamma_n - jw\rho\mu_1}\prod_{n=2}^{N+1}\left(1 - jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}}, \tag{22}$$

где

$$\nu = \sum_{n=2}^{N+1}\frac{\alpha_n}{\gamma_n}, \quad \rho = \frac{\mathbf{R\Lambda e}}{\mu_1}.$$

Доказательство. В системе уравнений (21) введем замены

$$\mu = \varepsilon, \quad u = w\varepsilon, \ \mathbf{H}_0(u) = \varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon), \quad \mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w,\varepsilon), \quad k = \overline{1, N+1},$$

чтобы получить систему уравнений (23).

$$\begin{gathered}
\varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\left(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \sum_{n=2}^{N+1}\alpha_n\mathbf{I}\right) + j\sigma\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} + \mu_1 e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}_1(w,\varepsilon) + \varepsilon\sum_{n=2}^{N+1}\gamma_n\mathbf{F}_n(w,\varepsilon) = 0,\\
\mathbf{F}_1(w,\varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I}) + \varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)e^{jw\varepsilon}\mathbf{\Lambda} - j\sigma\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w} = 0,\\
\mathbf{F}_n(w,\varepsilon)(\mathbf{Q} + (e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \varepsilon\gamma_n\mathbf{I}) + \varepsilon\alpha_n\mathbf{F}_0(w,\varepsilon) = 0, \quad n = \overline{2, N+1},\\
\varepsilon\mathbf{F}_0(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda e} + \mathbf{F}_1(w,\varepsilon)(\mathbf{\Lambda} - \mu_1 e^{-jw\varepsilon}\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\mathbf{F}_n(w,\varepsilon)\mathbf{\Lambda e} = 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

Рассмотрим первые три уравнения системы (23) в пределе при $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{gathered}
j\sigma\mathbf{F}_0'(w) + \mu_1\mathbf{F}_1(w) = 0,\\
F_1(w)(\mathbf{Q} - \mu_1\mathbf{I}) - j\sigma\mathbf{F}_0'(w) = 0,\\
F_n(w)\mathbf{Q} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Складывая первое и второе из полученных уравнений, получим выражения

$$F_1(w)\mathbf{Q} = 0, \quad F_n(w)\mathbf{Q} = 0, \quad n = \overline{2, N+1},$$

с учетом которых запишем функции $F_k(w)$ в виде

$$F_k(w) = \Phi_k(w)\mathbf{R}, \quad k = \overline{1, N+1}. \tag{25}$$

Далее в последнем уравнении системы (23) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и подставим полученное разложение

$$\Phi_1(w)\mathbf{R}(\mathbf{\Lambda} - \mu_1\mathbf{I})\mathbf{e} + \sum_{n=2}^{N+1}\Phi_n(w)\mathbf{R\Lambda e} = 0.$$

Обозначим $\rho = \frac{\mathbf{R\Lambda e}}{\mu_1}$, тогда уравнение примет вид

$$\Phi_1(w)(\rho - 1) + \rho\sum_{n=2}^{N+1}\Phi_n(w) = 0. \tag{26}$$

Запишем искомую характеристическую функцию $\Phi(w)$ в виде $\Phi(w) = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \Phi_k(w)$. Из уравнения (26) запишем выражения

$$\Phi_1(w) = \rho\Phi(w), \quad \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) = (1-\rho)\Phi(w).$$

В третьем уравнении системы (25) разложим экспоненты в ряд Тейлора и домножим на вектор $\mathbf{e}$ справа, разделим уравнение на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{F}_n(w)(jw\mathbf{\Lambda} - \gamma_n\mathbf{I})\mathbf{e} + \alpha_n\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = 0, \quad n = \overline{2, N+1}.$$

Подставим в уравнение разложение (25), обозначим $\mathbf{F}_0(w)\mathbf{e} = \varphi(w)$ и просуммируем выражения по n, получим

$$(1-\rho)\Phi(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \Phi_n(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n\varphi(w)}{\gamma_n - jw\rho\mu_1},$$

откуда следует

$$\Phi(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n\varphi(w)}{(1-\rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}, \quad \Phi_1(w) = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\rho\alpha_n\varphi(w)}{(1-\rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}.$$

Подставим полученное выражение для $\Phi_1(w)$ в первое уравнение системы (24), домножая его справа на вектор $\mathbf{e}$,

$$j\sigma\varphi'(w) + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\rho\mu_1\alpha_n\varphi(w)}{(1-\rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)} = 0. \tag{27}$$

Запишем решение дифференциального уравнения (27)

$$\varphi(w) = C\prod_{n=2}^{N+1}\left(1 - jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}}, \tag{28}$$

где C — константа интегрирования, которая будет определена позднее.

Теперь из (28) можем записать

$$\Phi(w) = C\prod_{n=2}^{N+1}\left(1 - jw\frac{\rho\mu_1}{\gamma_n}\right)^{-\frac{\alpha_n}{\sigma(1-\rho)}} \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{(1-\rho)(\gamma_n - jw\rho\mu_1)}.$$

Определим константу интегрирования из условия $\Phi(0) = 1$

$$C = (1-\rho)\nu^{-1}, \quad \nu = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{\alpha_n}{\gamma_n}.$$

□

Теорема 3 позволяет однозначно определить вид асимптотической характеристической функции числа поступивших заявок в RQ-системе MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в предельном условии длительного обслуживания вызываемых заявок. В отличие от исследования системы в предельном условии высокой интенсивности вызывания, здесь не требуется дополнительного исследования с использованием разложений более высокого порядка, так как характеристическая функция достаточно полно описывает случайный процесс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрена RQ-система MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок. Получена асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе методом асимптотического анализа в предельном условии высокой интенсивности вызывания заявок. Асимптотическая характеристическая функция в данном условии соответствует гауссовскому закону распределения. Также получена асимптотическая характеристическая функция числа поступивших заявок в системе в условии длительного обслуживания вызываемых заявок.

В дальнейшем планируется исследование RQ-систем M|GI|1 и GI|M|1 с N типами вызываемых заявок методами асимптотического анализа в различных предельных условиях.

Список литературы

1. *Artalejo J. R., Gómez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. Berlin : Springer, 2008. 320 p.
2. *Falin G., Templeton, J.* Retrial Queues. London : CRC Press, 1997. 320 p.
3. *Bhulai S., Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48, № 8. P. 1434–1438. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.815038
4. *Aguir S., Karaesmen F., Akşin Z., Chauvet F.* The impact of retrials on call center performance // OR Spectrum. 2004. Vol. 26, № 3. P. 353–376. https://doi.org/10.1007/s00291-004-0165-7
5. *Morozov E., Phung-Duc T.* Regenerative Analysis of Two-Way Communication Orbit-Queue with General Service Time // Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018. Lecture Notes in Computer Science / eds. Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Wittevrongel, W. Yue. Vol. 10932. Springer, Cham, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93736-6_2
6. *Sakurai H., Phung-Duc T.* Scaling limits for single server retrial queues with two-way communication // Annals of Operations Research. 2016. № 247. P. 229–256. https://doi.org/10.1007/s10479-015-1874-9
7. *Dragieva V., Phung-Duc T.* Two-Way Communication M/M/1/1 Queue with Server-Orbit Interaction and Feedback of Outgoing Retrial Calls // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov. Vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_20
8. *Sakurai H., Phung-Duc T.* Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls // TOP. 2015. Vol. 23. P. 466–492. https://doi.org/10.1007/s11750-014-0349-5
9. *Nazarov A. A., Paul S. V., Gudkova I.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. Netherlands, 2017. P. 678–693.
10. *Nazarov A. A., Phung-Duc T., Paul S. V.* Heavy outgoing call asymptotics for MMPP/M/1/1 retrial queue with two-way communication // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov. Vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_3

References

1. Artalejo J. R., Gómez-Corral A. *Retrial Queueing Systems*. Berlin, Springer, 2008. 320 p.
2. Falin G., Templeton, J. *Retrial Queues*. London, CRC Press, 1997. 320 p.

3. Bhulai S., Koole G. A queueing model for call blending in call centers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, vol. 48, no. 8, pp. 1434–1438. https://doi.org/10.1109/TAC.2003.815038
4. Aguir S., Karaesmen F., Akşin Z., Chauvet F. The impact of retrials on call center performance. *OR Spectrum*, 2004, vol. 26, no. 3, pp. 353–376. https://doi.org/10.1007/s00291-004-0165-7
5. Morozov E., Phung-Duc T. Regenerative Analysis of Two-Way Communication Orbit-Queue with General Service Time. In: Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Wittevrongel, W. Yue, eds. *Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10932. Springer, Cham, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93736-6_2
6. Sakurai H., Phung-Duc T. Scaling limits for single server retrial queues with two-way communication. *Annals of Operations Research*, 2016, no. 247, pp. 229–256. https://doi.org/10.1007/s10479-015-1874-9
7. Dragieva V., Phung-Duc T. Two-way communication $M/M/1/1$ queue with server-orbit interaction and feedback of outgoing retrial calls. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017*. Communications in Computer and Information Science, vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_20
8. Sakurai H., Phung-Duc T. Two-way communication retrial queues with multiple types of outgoing calls. *TOP*, 2015, vol. 23, pp. 466–492. https://doi.org/10.1007/s11750-014-0349-5
9. Nazarov A. A., Paul S. V., Gudkova I. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. *Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation*. Netherlands, 2017, pp. 678–693.
10. Nazarov A. A., Phung-Duc T., Paul S. V. Heavy Outgoing Call Asymptotics for MMPP/M/1/1 Retrial Queue with Two-Way Communication. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Kirpichnikov, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017*. Communications in Computer and Information Science, vol. 800. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68069-9_3

Поступила в редакцию / Received 11.11.2019
Принята к публикации / Accepted 20.02.2020
Опубликована / Published 01.03.2021