Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 125–137
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 125–137

Научная статья
УДК 519.872
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137

Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $\mathrm{M|GI|\infty \to GI|\infty}$

М. А. Шкленник✉**, А. Н. Моисеев**

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, просп. Ленина, д. 36

Шкленник Мария Александровна, аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики, Shklennikm@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-0993-8006
Моисеев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики, moiseev.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2369-452X

Аннотация. В работе представлена математическая модель двухфазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов с обратной связью. Время обслуживания заявок, поступивших в систему, является случайной величиной, заданной функцией распределения $B_1(x)$. Время обслуживания заявок, обратившихся к системе для повторного обслуживания, задано функцией распределения $B_2(x)$. Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий в потоке повторных обращений (r-потоке) в системе с момента начала ее функционирования при нестационарном режиме работы. Для решения поставленной задачи был использован метод марковского суммирования, в основе которого лежит рассмотрение марковских процессов и решение уравнения Колмогорова. В ходе решения был исследован так называемый локальный r-поток — число событий r-потока, сформированных одной заявкой входящего потока, поступившей в систему. В результате получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа событий в локальном r-потоке, которое может быть использовано для исследования систем массового обслуживания с аналогичной дисциплиной обслуживания и немарковскими входящими потоками. В результате исследования получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа повторных обращений к системе на заданном интервале времени при нестационарном режиме работы, которое позволяет указать распределение вероятностей числа событий в исследуемом потоке, а также его основные вероятностные характеристики.

Ключевые слова: система массового обслуживания, повторные обращения, обратная связь, неограниченное число приборов, метод марковского суммирования

Для цитирования: *Шкленник М. А., Моисеев А. Н.* Метод марковского суммирования для исследования потока повторных обращений в двухфазных системах $M|GI|\infty \to GI|\infty$ // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 125–137. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137

Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $\mathrm{M}|\mathrm{GI}|\infty \to \mathrm{GI}|\infty$

M. A. Shklennik✉, **A. N. Moiseev**

National Research Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia

Maria A. Shklennik, Shklennikm@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-0993-8006
Alexander N. Moiseev, moiseev.tsu@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2369-452X

Abstract. The paper presents a mathematical model of queueing tandem $M|GI|\infty \to GI|\infty$ with feedback. The service times at the first stage are independent and identically distributed (i.i.d.) with an arbitrary distribution function $B_1(x)$. Service times at the second stage are i.i.d. with an arbitrary distribution function $B_2(x)$. The problem is to determine the probability distribution of the number of repeated customers (r-flow) during fixed time period. To solve this problem, the Markov summation method was used, which is based on the consideration of Markov processes and the solution of the Kolmogorov equation. In the course of the solution, the so-called local r-flow was studied — the number of r-flow calls generated by one incoming customer received by the system. As a result, an expression is obtained for the characteristic probability distribution function of the number of calls in the local r-flow, which can be used to study queuing systems with a similar service discipline and non-Markov incoming flows. As a result of the study, an expression is obtained for the characteristic probability distribution function of the number of repeated calls to the system at a given time interval during non-stationary regime, which allows one to obtain the probability distribution of the number of calls in the flow under study, as well as its main probability characteristics.
Keywords: queueing tandem, repeated flow, feedback, unlimited number of servers, method of Markovian summation
For citation: Shklennik M. A., Moiseev A. N. Method of Markovian summation for study the repeated flow in queueing tandem $M|GI|\infty \to GI|\infty$. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 125–137 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-125-137

ВВЕДЕНИЕ

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов и повторным обслуживанием (с обратной связью) являются математическими моделями инфокоммуникационных систем, в частности, систем с дообслуживанием, а также различных социально-экономических систем [1–5]. Исследованию характеристик потоков в такого рода системах посвящено достаточно много работ. Однако существующие методы, позволяющие получить аналитические выражения для исследуемых параметров потоков, позволяют это сделать при существенных ограничениях. Так, например, метод предельной декомпозиции и метод производящей функции, используемые для исследования потоков в системах с неограниченным числом приборов [6–11], можно применять лишь в том случае, если входящий поток заявок является пуассоновским, а методы асимптотического анализа [12–14] позволяют определять характеристики систем при выполнении некоторого предельного условия. Причем, как правило, все системы исследуются при стационарном режиме работы. В данной работе предлагается использование метода марковского суммирования [15, 16] для исследования потока повторных обращений в двухфазной СМО с неограниченным числом приборов, произвольным обслуживанием и возможностью повторного обращения ко второй фазе при нестационарном режиме работы системы.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим двухфазную систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств на каждой фазе и возможностью повторного обращения на второй фазе (рисунок).

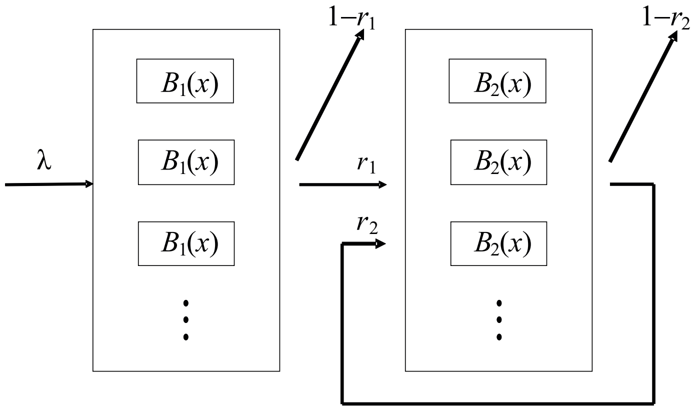

Рис. Двухфазная СМО с повторными обращениями
Fig. Two-phase QS with repeated calls

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Время обслуживания заявки на первой фазе системы является произвольной случайной величиной, заданной функцией распределения $B_1(x)$. Каждая заявка, завершив обслуживание на первой фазе системы, с вероятностью r_1 может перейти на вторую фазу системы или с вероятностью $(1 - r_1)$ покинуть систему. Время обслуживания заявки на второй фазе системы также является произвольной случайной величиной, имеющей функцию распределения $B_2(x)$. Завершив обслуживание на второй фазе системы, каждая заявка может с вероятностью r_2 вернуться на вторую фазу системы для следующего повторного обслуживания или с вероятностью $(1 - r_2)$ покинуть систему. Повторными обращениями к системе будем считать все обращения заявок ко второй фазе системы. Поток повторных обращений заявок будем называть r-потоком. В работе ставится задача нахождения распределения вероятностей числа событий в r-потоке с момента начала функционирования системы.

МЕТОД МАРКОВСКОГО СУММИРОВАНИЯ

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна и в ней нет обслуживаемых заявок. Рассмотрим одну заявку входящего потока, поступившую в систему в момент времени t. Она будет формировать события r-потока, которые наступят после момента времени t. Зафиксируем некоторый момент времени $t = T$. Обозначим $n(t)$ — число событий r-потока, т. е. число обращений ко второй фазе системы, наступивших на интервале $[0, T]$, сформированных всеми заявками входящего потока, поступившими в систему на интервале $[0, t], t \leqslant T$. Пусть

$$P(n, t) = \mathrm{P}\{n(t) = n\},$$

тогда $P(n,T)$ есть распределение вероятностей числа событий r-потока, наступивших в системе на интервале $[0,T]$.

Обозначим $\xi(t)$ — число событий r-потока, сформированных одной заявкой, поступившей в систему в момент времени t за интервал $(T-t)$ — локальный r-поток; $g(i,t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = i\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t, к моменту времени T сформирует в r-потоке i событий. По формуле полной вероятности можно записать следующее равенство:

$$P(n,\, t+\Delta t) = P(n,\, t)(1-\lambda\,\Delta t) + \lambda\,\Delta t\sum_{i=0}^{n} P(n-i,t)\,g(i,t) + o(\Delta t).$$

При $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение Колмогорова для распределения вероятностей $P(n,t)$

$$\frac{\partial P(n,\,t)}{\partial t} = -\lambda P(n,\,t) + \lambda\sum_{i=0}^{n} P(n-i,\,t)\,g(i,t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P(n,0) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Определим характеристические функции вида

$$H(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P(n,t), \quad G(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui}\,g(i,t).$$

Тогда из уравнения (1) получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$

$$\frac{\partial H(u,\,t)}{\partial t} = \lambda\,H(u,\,t)\,\left(G(u,t)-1\right) \tag{3}$$

с начальным условием

$$H(u,0) \equiv 1. \tag{4}$$

Теорема. *Характеристическая функция распределения вероятностей $P(n,T)$ числа событий r-потока, наступивших за время T на интервале $[0,T]$, имеет вид*

$$H(u,\,T) = \exp\left[\lambda r_1(e^{ju}-1)\left\{\int_0^T B_1(x)dx + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\frac{r_2}{2\pi}e^{ju}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{(1-r_2e^{ju}b_2^*(\alpha))\,j\alpha}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right\}\right], \tag{5}$$

где $b_k^*(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{j\alpha\tau}dB_k(\tau)$ — преобразование Фурье–Стилтьеса для функций распределения $B_k(t)$ времени обслуживания на фазах системы, $k = 1,2$.

Доказательство. Для доказательства теоремы сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Характеристическая функция $G(u,t)$ процесса $\xi(t)$ определяется выражением*

$$G(u,t)=1+r_1(e^{ju}-1)B_1(T-t)+\frac{r_1r_2}{2\pi}(e^{ju}-1)e^{ju}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)\left(1-e^{-j\alpha(T-t)}\right)}{\left(1-r_2e^{ju}b_2^*(\alpha)\right)j\alpha}d\alpha. \quad (6)$$

Доказательство. Очевидно, что локальный r-поток является потоком восстановления, но в данном случае в каждый из моментов наступления очередного события потока он может «оборваться». Рассмотрим произвольный интервал времени длиной τ ($t \leqslant t+\tau \leqslant T$). Пусть $\eta(t,\tau)$ — число событий локального r-потока, т. е. число повторных обращений, сформированных заявкой, поступившей в систему в момент времени t, за интервал $[t, t+\tau]$. Тогда $\xi(t) = \eta(t, T-t)$.

Введем в рассмотрение дополнительные переменные:

$\nu(t,\tau)$ — состояние заявки, поступившей в систему в момент времени t, в момент времени $t+\tau$, т. е. если к моменту времени $t+\tau$ заявка покинула систему, то $\nu(t,\tau)=0$; если к моменту времени $t+\tau$ заявка находится на первой фазе системы, то $\nu(t,\tau) = 1$; и если к моменту времени $t+\tau$ заявка находится на второй фазе системы, то $\nu(t,\tau)=2$;

$z(t,\tau)$ — длина интервала времени от момента $t+\tau$ до окончания текущего обслуживания заявки (если она не покинула систему).

Случайный процесс $\{\eta(t,\tau), \nu(t,\tau), z(t,\tau)\}$ является марковским.

Введем следующие обозначения:

1) $g_0(i,t,\tau) = \mathrm{P}\{\eta(t,\tau) = i, \nu(t,\tau) = 0\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t, к моменту времени $t+\tau$ покинула систему и сделала i повторных обращений;

2) $g_1(t,\tau,z) = \mathrm{P}\{\eta(t,\tau) = 0, \nu(t,\tau) = 1, z(t) < z\}$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t, к моменту времени $t+\tau$ находится на первой фазе (соответственно, она не сделала ни одного повторного обращения);

3) $g_2(i,t,\tau,z) = \mathrm{P}\{\eta(t,\tau) = i, \nu(t,\tau) = 2, z(t) < z\}$, если $i > 0$, и $g_2(i,t,\tau,z) = 0$, если $i = 0$ — вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени t, к моменту времени $t+\tau$ находится на второй фазе и сделала i повторных обращений.

Заметим, что вид выражений для вышеперечисленных вероятностей не будет зависеть от t, поэтому в дальнейшем для краткости исключим этот аргумент.

Для распределения вероятностей трехмерного марковского процесса $\{\eta(t,\tau), \nu(t,\tau), z(t,\tau)\}$ составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем следующие равенства:

$$\begin{gathered}
g_0(0,\tau+\Delta\tau) = g_0(0,\tau) + g_1(\tau,\Delta\tau)(1-r_1) + o(\Delta\tau),\\
g_0(i,\tau+\Delta\tau) = g_0(i,\tau) + g_2(i,\tau,\Delta\tau)(1-r_2) + o(\Delta\tau), \quad i = 1,2,\dots,\\
g_1(\tau+\Delta\tau, z) = g_1(\tau, z+\Delta\tau) - g_1(\tau,\Delta\tau) + o(\Delta\tau),\\
g_2(1,\tau+\Delta\tau,z) = g_2(1,\tau,z+\Delta\tau) - g_2(1,\tau,\Delta\tau) + g_1(\tau,\Delta\tau)\, r_1B_2(z) + o(\Delta\tau),\\
g_2(i,\tau+\Delta\tau,z) = g_2(i,\tau,z+\Delta\tau) - g_2(i,\tau,\Delta\tau) + g_2(i,\tau,\Delta\tau)\, r_2B_2(z) + o(\Delta\tau), \ i=2,3,\dots.
\end{gathered}$$

Откуда при $\Delta t \to 0$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial g_0(0,\tau)}{\partial\tau} = (1-r_1)\frac{\partial g_1(\tau,0)}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial g_0(i,\tau)}{\partial\tau} = (1-r_2)\frac{\partial g_2(i,\tau,0)}{\partial z}, \quad i=1,2..., \tag{8}$$

$$\frac{\partial g_1(\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial g_1(\tau,z)}{\partial z} = -\frac{\partial g_1(\tau,0)}{\partial z}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial g_2(1,\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial g_2(1,\tau,z)}{\partial z} = -\frac{\partial g_2(1,\tau,0)}{\partial z} + r_1B_2(z)\frac{\partial g_1(\tau,0)}{\partial z}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_2(i,\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial g_2(i,\tau,z)}{\partial z} = -\frac{\partial g_2(i,\tau,0)}{\partial z} +$$
$$+ r_1B_2(z)\frac{\partial g_1(\tau,0)}{\partial z} + r_2B_2(z)\frac{\partial g_2(i-1,\tau,0)}{\partial z}, \quad i=1,2,... \tag{11}$$

с начальными условиями

$$g_0(i,0)\equiv 0,\ \forall\ i; \quad g_1(0,z)=B_1(z); \quad g_2(i,0,z)\equiv 0,\ i>0.$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$G_0(u,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}g_0(i,\tau), \quad G_1(\tau,z)=g_1(\tau,z), \quad G_2(u,\tau,z)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}e^{jui}g_2(i,\tau,z),\ i>0,\\ 0,\ i=0\end{cases}$$

и, подставив их в систему (7)–(11), получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial G_0(u,\tau)}{\partial\tau} = (1-r_1)\frac{\partial G_1(\tau,0)}{\partial z} + (1-r_2)\frac{\partial G_2(u,\tau,0)}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial G_1(\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial G_1(\tau,z)}{\partial z} = -\frac{\partial G_1(\tau,0)}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial G_2(u,\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial G_2(u,\tau,z)}{\partial z} = -\frac{\partial G_2(u,\tau,0)}{\partial z} +$$
$$+ r_1B_2(z)e^{ju}\frac{\partial G_1(\tau,0)}{\partial z} + r_2B_2(z)e^{ju}\frac{\partial G_2(u,\tau,0)}{\partial z} \tag{14}$$

с начальными условиями

$$G_0(u,0)=0, \quad G_1(0,z)=B_1(z), \quad G_2(u,0,z)=0. \tag{15}$$

Обозначим

$$\frac{\partial G_1(\tau,0)}{\partial z} = f_1(\tau), \quad \frac{\partial G_2(u,\tau,0)}{\partial z} = f_2(u,\tau),$$

тогда систему уравнений (12)–(14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial G_0(u,\tau)}{\partial\tau} = (1-r_1)f_1(\tau) + (1-r_2)f_2(u,\tau), \tag{16}$$

$$\frac{\partial G_1(\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial G_1(\tau,z)}{\partial z} = -f_1(\tau), \tag{17}$$

$$\frac{\partial G_2(u,\tau,z)}{\partial\tau} - \frac{\partial G_2(u,\tau,z)}{\partial z} = r_1B_2(z)e^{ju}f_1(\tau) + \left(r_2B_2(z)e^{ju}-1\right)f_2(u,\tau). \tag{18}$$

Решая систему (16)–(18) с начальными условиями (15), найдем вид функций $G_0(u,\tau)$, $G_1(\tau,z)$ и $G_2(u,\tau,z)$.

Проинтегрировав по τ уравнение (16) и подставив начальное условие, находим

$$G_0(u,\tau) = \int\limits_0^{\tau} \left[(1-r_1)f_1(x) + (1-r_2)f_2(u,x)\right] dx. \tag{19}$$

Уравнение (17) является неоднородным уравнением в частных производных. Записываем соответствующую ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dG_1(\tau,z)}{-f_1(\tau)}.$$

Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя равенство

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1},$$

получаем

$$\tau + z = C_1.$$

Равенство

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_1(\tau,z)}{-f_1(\tau)}$$

дает

$$G_1(u,\tau,z) = -\int\limits_0^{\tau} f_1(u,x)dx + C_2,$$

или

$$G_1(\tau,z) + \int\limits_0^{\tau} f_1(x)dx = C_2.$$

Тогда общим решением уравнения (17) будет

$$G_1(\tau,z) = \varphi\left(\tau+z\right) - \int\limits_0^{\tau} f_1(x)dx.$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$G_1(0,z) = B_1(z).$$

Тогда

$$G_1(0,z) = \varphi\left(z\right) + 0 = B_1(z),$$

следовательно, искомое частное решение уравнения (17) имеет вид

$$G_1(\tau,z) = B_1\left(\tau+z\right) - \int\limits_0^{\tau} f_1(x)dx. \tag{20}$$

Найдем решение уравнения (18). Это неоднородное уравнение в частных производных. Записываем соответствующую ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1} = \frac{dG_2(u,\tau,z)}{r_1B_2(z)e^{ju}f_1(\tau) + \left(r_2B_2(z)e^{ju}-1\right)f_2(u,\tau)}.$$

Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя уравнение

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dz}{-1},$$

получаем

$$\tau + z = C_1.$$

Уравнение

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_2(u,\tau,z)}{r_1 B_2(z) e^{ju} f_1(\tau) + \left(r_2 B_2(z) e^{ju} - 1\right) f_2(u,\tau)}$$

с учетом найденного первого независимого интеграла примет вид

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dG_2(u,\tau,z)}{r_1 B_2(C_1-\tau) e^{ju} f_1(\tau) + \left(r_2 B_2(C_1-\tau) e^{ju} - 1\right) f_2(u,\tau)}.$$

Интегрируя его, находим второй независимый интеграл

$$G_2(u,\tau,z) - \int\limits_0^{\tau} \left[r_1 B_2(C_1-x) e^{ju} f_1(x) + \left(r_2 B_2(C_1-x) e^{ju} - 1\right) f_2(u,x)\right] dx = C_2.$$

Общим решением уравнения (18) будет

$$G_2(u,\tau,z) = \varphi(\tau+z) +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau} \left[r_1 B_2(z+\tau-x) e^{ju} f_1(x) + \left(r_2 B_2(z+\tau-x) e^{ju} - 1\right) f_2(u,x)\right] dx.$$

Найдем решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $G_2(u,0,z) = 0$. Тогда

$$G_2(u,0,z) = \varphi\,(z) + 0 = 0,$$

следовательно, искомое частное решение уравнения (18) имеет вид

$$G_2(u,\tau,z) = \int\limits_0^{\tau} \left[r_1 B_2(z+\tau-x) e^{ju} f_1(x) + \left(r_2 B_2(z+\tau-x) e^{ju} - 1\right) f_2(u,x)\right] dx. \quad (21)$$

Характеристическая функция $G(u,t)$ процесса $\xi(t)$ будет определяться выражением

$$G(u,t) = G_0(u,T-t) + G_1(T-t,\infty) + G_2(u,T-t,\infty).$$

Подставив сюда выражения (19), (20), (21) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$G(u,t) = 1 + \left(e^{ju} - 1\right) \int\limits_0^{T-t} \left[r_1 f_1(x) + r_2 f_2(u,x)\right] dx. \quad (22)$$

Найдем вид функций $f_1(x)$ и $f_2(u,x)$. Продифференцируем равенство (20) по z и рассмотрим при $z = 0$. Получим

$$f_1(\tau) = b_1(\tau), \quad (23)$$

где $b_1(\tau)$ — плотность распределения времени обслуживания на первой фазе системы (первичных заявок).

Продифференцируем равенство (21) по z и рассмотрим его составляющие при $z = 0$. Получаем интегральное уравнение относительно неизвестной функции $f_2(u,\tau)$:

$$f_2(u,\tau) = r_1 e^{ju} \int\limits_0^{\tau} b_2(\tau - x) f_1(x) dx + r_2 e^{ju} \int\limits_0^{\tau} b_2(\tau - x) f_2(u,x) dx.$$

Это уравнение решим, используя преобразование Фурье вида

$$f_k^*(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} f_k(\tau) d\tau, \quad b_k^*(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} e^{j\alpha\tau} b_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Тогда, используя свойства преобразования Фурье для свертки, из интегрального уравнения для $f_2(u,\tau)$ получим алгебраическое уравнение для преобразования Фурье функции $f_2^*(u,\alpha)$, откуда

$$f_2^*(u,\alpha) = \frac{r_1 e^{ju} b_2^*(\alpha) f_1^*(\alpha)}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)}.$$

Учитывая равенство (23), можем записать

$$f_2^*(u,\alpha) = \frac{r_1 e^{ju} b_2^*(\alpha) b_1^*(\alpha)}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)}.$$

Тогда, используя формулу для обратного преобразования Фурье, получим выражение для неизвестной функции $f_2(u,\tau)$:

$$f_2(u,\tau) = \frac{r_1 e^{ju}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) e^{-j\alpha\tau}}{1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)} d\alpha. \tag{24}$$

Подставив найденные выражения (23), (24) для функций $f_1(x)$ и $f_2(u,x)$ в выражение (22) и выполнив несложные преобразования, получаем характеристическую функцию $G(u,t)$ процесса $\xi(t)$:

$$G(u,t) = 1 + r_1(e^{ju} - 1) B_1(T - t) + \frac{r_1 r_2}{2\pi}(e^{ju} - 1) e^{ju} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) \left(1 - e^{-j\alpha(T-t)}\right)}{\left(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)\right) j\alpha} d\alpha,$$

что совпадает с выражением (6). Лемма доказана. □

Переходим к решению уравнения (3) с начальными условиями (4). Подставим в уравнение (3) выражение (6) для характеристической функции локального r- потока. Получим дифференциальное уравнение для характеристической функции исследуемого процесса $n(t)$

$$\frac{dH(u,\,t)}{H(u,\,t)} = \lambda\, r_1(e^{ju} - 1) \left\{ B_1(T - t) + \frac{r_2}{2\pi} e^{ju} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1^*(\alpha) b_2^*(\alpha) \left(1 - e^{-j\alpha(T-t)}\right)}{\left(1 - r_2 e^{ju} b_2^*(\alpha)\right) j\alpha} d\alpha \right\} dt.$$

Проинтегрировав и подставив начальные условия, получим

$$H(u,\,t) = \exp\left[\lambda r_1(e^{ju}-1)\left\{\int\limits_0^t B_1(T-y)dy\, + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r_2}{2\pi}e^{ju}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{(1-r_2e^{ju}b_2^*(\alpha))\,j\alpha}\int\limits_0^t\left(1-e^{-j\alpha(T-y)}\right)dy\,d\alpha\right\}\right].$$

Проинтегрировав по y внутренний интеграл, получим

$$H(u,\,t) = \exp\left[\lambda r_1(e^{ju}-1)\left\{\int\limits_{T-t}^{T} B_1(x)dx\, + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r_2}{2\pi}e^{ju}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{(1-r_2e^{ju}b_2^*(\alpha))\,j\alpha}\left(t-\frac{e^{-j\alpha(T-t)}-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right\}\right].$$

Тогда, положив $t = T$, получим характеристическую функцию распределения вероятностей $P(n,T)$ числа событий r-потока, наступивших за время T на интервале $[0,T]$:

$$H(u,\,T) = \exp\left[\lambda r_1(e^{ju}-1)\left\{\int\limits_0^{T} B_1(x)dx\, + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r_2}{2\pi}e^{ju}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_1^*(\alpha)b_2^*(\alpha)}{(1-r_2e^{ju}b_2^*(\alpha))\,j\alpha}\left(T-\frac{1-e^{-j\alpha T}}{j\alpha}\right)d\alpha\right\}\right],$$

что совпадает с выражением (5). Теорема доказана. □

Зная выражение для характеристической функции, распределение вероятностей числа событий r-потока, наступивших в системе на интервале $[0,T]$, можем получить с помощью обратного преобразования Фурье

$$P(n,T) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-jun}\,H(u,T)du.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено выражение для характеристической функции распределения вероятностей числа повторных обращений в неоднородной системе массового обслуживания при нестационарном режиме работы. Найденная функция позволяет получить основные вероятностные характеристики исследуемого процесса. Предложенный метод исследования потока повторных обращений в системах с обратной связью существенно расширяет класс задач теории массового обслуживания, для которых можно получить аналитическое выражение без существенных ограничений. Так, например, данный метод позволяет исследовать поток повторных обращений в системах с немарковскими входящими потоками и произвольным временем обслуживания. Анализ таких систем планируется выполнить в последующих исследованиях.

Список литературы

1. *Морозова А. С., Моисеева С. П., Назаров А. А.* Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.
2. *Жидкова Л. А., Моисеева С. П.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6. С. 5–9.
3. *Ананина И. А.* Математическая модель процесса изменения дохода торговой компании, расширяющей свое присутствие на рынке // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2. С. 5–14.
4. *Назаров А. А., Ананина И. А.* Математическая модель процедуры пожизненной ренты // Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 318, № 5. С. 160–165.
5. *Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A.* Optimization of two-level discount values using queueing tandem model with feedback // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. Springer, Cham, 2018. Vol. 912. P. 321–332. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_ 25
6. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2, № 1. С. 106–116.
7. *Морозова А. С., Моисеева С. П.* Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государствен-но-го университета. 2005. № 287. С. 46–51.
8. *Назаров А. А., Моисеева С. П., Морозова А. С.* Исследование СМО с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, спец. вып. 5. С. 88–92.
9. *Ананина И. А., Назаров А. А., Моисеева С. П.* Исследование потоков в системе $M|GI|\infty$ с повторным обращением методом предельной декомпозиции // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3 (8). С. 56–67
10. *Ананина И. А.* Исследование суммарного потока обращений в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями // Научное творчество молодежи : материалы XIV Всероссийской научно-практической конференции : в 2 ч. Томск : Издательство Томского университета, 2010. Ч. 1. С. 3–5.
11. *Моисеева С. П., Шкленник М. А., Набокова О. О.* Исследование потоков в двухфазной бесконечнолинейной СМО с повторными обращениями методом предельной декомпозиции //Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017) : материалы XVI Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Ч. 1. Томск : НТЛ, 2017. С. 108–114.
12. *Задиранова Л. А., Моисеева С. П.* Асимптотический анализ потока повторных обращений в системе $MMPP|M|\infty$ с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. Серия : Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 2 (31). С. 26–34. https://doi.org/10.17223/19988605/31/3
13. *Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A.* Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and freedback // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016.

Communications in Computer and Information Science / eds. V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev. Vol. 678. Springer, Cham, 2016. P. 231–240. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51917-3_21

14. *Задиранова Л. А.* Исследование потока повторных обращений в системе $GI|M|\infty$ с повторным обслуживанием // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Г. А. Медведева. Минск : РИВШ, 2015. С. 43–46.
15. *Nazarov A., Dammer D.* Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science / eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. Vol. 912. Springer, Cham, 2018. P. 71–82. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_6
16. *Шкленник М. А., Моисеев А. Н.* Математическая модель системы обработки результатов физических экспериментов с необходимостью повторной обработки данных // Известия вузов. Физика. 2019. Т. 62, № 3. С. 148–153. https://doi.org/10.17223/00213411/62/3/148

References

1. Morozova A. S., Moiseeva S. P., Nazarov A. A. Investigation of the economic-mathematical model of discount for patrons influence on income of trading. *Tomsk State University Journal*, 2006, no. 293, pp. 49–52 (in Russian).
2. Zhidkova L. A., Moiseeva S. P. A mathematical model of customer flows of a two-product trading company in the form of a queuing system with repeated calls to blocks. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2013, vol. 322, iss. 6, pp. 5–9 (in Russian).
3. Ananina I. A. Mathematical model of the income change process of the trading company expanding the presence in the market. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, iss. 2, pp. 5–14 (in Russian).
4. Nazarov A. A., Ananina I. A. A mathematical model of a life annuity procedure. *Izvestiya Tomskogo Politekhnicheskogo Universiteta*, 2011, vol. 318, iss. 5, pp. 160–165 (in Russian).
5. Shklennik M., Moiseeva S., Moiseev A. Optimization of two-level discount values using queueing tandem model with feedback. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol. 912. Springer, Cham, 2018, pp. 321–332. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_25
6. Sevast'yanov B. A. An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with fefusals. *Theory of Probability & Its Applications*, 1957, vol. 2, iss. 1, pp. 102–112. https://doi.org/10.1137/1102005
7. *Morozova A. S., Moiseeva S. P.* Study of repeated customers flow in the queueing system with unlimited number of servers and feedback. *Tomsk State University Journal*, 2005, no. 287, pp. 46–51 (in Russian).
8. Nazarov A. A., Moiseeva S. P., Morozova A. S. Investigation systems of service with repeated handling. Method of limit decomposition. *Computational Technologies*, 2005, vol. 13, Special iss. 5, pp. 88–92 (in Russian).
9. Ananina I. A., Nazarov A. A., Moiseeva S. P. Research of streams in system $M|GI|\infty$ with repeated references the method of limiting decomposition. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2009, iss. 3 (8), pp. 56–67 (in Russian).
10. Ananina I. A. Analysis of total flow of customers in queueing tandem system with unlimited number of servers and feedback by the method of limiting decomposition. *Nauchnoe tvorchestvo molodezhi: materialy XIV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Scientific creativity of youth: Materials of the XIV All-Russian Scientific and Practical

Conference]. Tomsk, Izdatel'stvo Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2010, pt. 1, pp. 3–5 (in Russian).

11. Moiseeva S. P., Shklennik M. A., Nabokova O. O. Analysis of flows in queueing tandem with unlimited number of servers and feedback by method of limiting decomposition. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie (ITMM-2017): materialy XVI Mezhdunarodnoi konferentsii imeni A. F. Terpugova* [Information Technologies and Mathematical Modelling (ITMM-2017): Materials of the XVI International Conference named after A. F. Terpugov]. Tomsk, NTL, 2017, pt. 1, pp. 108–114 (in Russian).
12. Zadiraniva L. A., Moiseeva S. P. Asymptotic analysis of the flow of repeated requests in system $MMPP|M|\infty$ with repeated requests. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2015, iss. 2 (31), pp. 26–34 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988605/31/3
13. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. In: V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozyrev, eds. *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science*, vol. 678. Springer, Cham, 2016, pp. 231–240. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51917-3_21
14. Zadiranova L. A. Analysis of the flow of repeated requests in system $GI|M|\infty$ with repeated requests. In: *Teoriya veroyatnostey, sluchaynye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya: materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, posvyashchennoy 80-letiyu professora G. A. Medvedeva* [Probability theory, random processes, mathematical statistics and applications: Materials of the International Scientific Conference dedicated to the 80th anniversary of prof. G. A. Medvedev]. Minsk, RIVSh, 2015, pp. 43–46.
15. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers. In: A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev, eds. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2018, WRQ 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol. 912. Springer, Cham, 2018. pp. 71–82. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97595-5_6
16. Shklennik M. A., Moiseev A. N. Mathematical model of a system for physics experimental data processing with the need to reprocess data. *Russian Physics Journal*, 2019, vol. 62, iss. 3, pp. 553–560. https://doi.org/10.1007/s11182-019-01746-4

Поступила в редакцию / Received 08.11.2019
Принята к публикации / Accepted 20.02.2020
Опубликована / Published 01.03.2021