Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 15–25
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 15–25

Научная статья
УДК 512.542
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25

О максимальных подформациях *n*-кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп

М. М. Сорокина✉, **С. П. Максаков**

Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, д. 14

Сорокина Марина Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, mmsorokina@yandex.ru, https://orcid.org/ 0000-0002-9516-626X

Максаков Серафим Павлович, аспирант кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, msp222@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9032-4951

Аннотация. В статье рассматриваются только конечные группы. Среди классов групп центральное место занимают классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, называемые формациями. В статье изучаются Ω-расслоенные формации, построенные В. А. Ведерниковым в 1999 г., где Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ всех простых групп. Ω-расслоенные формации определяются с помощью двух функций — Ω-спутника $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{формации}\}$ и направления $\varphi : \mathfrak{I} \to \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$. Концепция кратной локальности, введенная в рассмотрение А. Н. Скибой в 1987 г. для формаций и получившая в дальнейшем развитие для многих других классов групп, применительно к Ω-расслоенным формациям заключается в следующем: всякую формацию считают 0-кратно Ω-расслоенной с направлением φ; Ω-расслоенную формацию с направлением φ называют n-кратно Ω-расслоенной, где n — натуральное число, если она имеет такой Ω-спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$-кратно Ω-расслоенными формациями с направлением φ. Целью работы является исследование свойств максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций заданной n-кратно Ω-расслоенной формации. Используются классические методы доказательств теории групп, теории классов групп, а также методы общей теории решеток. В работе установлено существование максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций для формаций с определенными свойствами, получена характеризация формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$, а также установлена взаимосвязь между максимальным внутренним Ω-спутником 1-кратно Ω-расслоенной формации и максимальным внутренним Ω-спутником ее максимальной 1-кратно Ω-расслоенной подформации. Полученные результаты будут полезными при исследовании внутреннего строения формаций конечных групп, в частности, при изучении максимальных цепей подформаций и установлении решеточных свойств формаций.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация групп, максимальная подформация, Ω-расслоенная формация, n-кратно Ω-расслоенная формация

Для цитирования: *Сорокина М. М., Максаков С. П.* О максимальных подформациях n-кратно Ω-расслоенных формаций конечных групп // Известия Саратовского университета.

Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 15–25.
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25

On maximal subformations of *n*-multiple Ω-foliated formations of finite groups

M. M. Sorokina✉, **S. P. Maksakov**

Bryansk State University named after Academician I. G. Petrovsky, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia

Marina M. Sorokina, mmsorokina@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-9516-626X
Seraphim P. Maksakov, msp222@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9032-4951

Abstract. Only finite groups are considered in the article. Among the classes of groups the central place is occupied by classes closed regarding homomorphic images and subdirect products which are called formations. We study Ω-foliateded formations constructed by V. A. Vedernikov in 1999 where Ω is a nonempty subclass of the class $\mathfrak{I}$ of all simple groups. Ω-Foliated formations are defined by two functions — an Ω-satellite $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{\text{formations}\}$ and a direction $\varphi : \mathfrak{I} \to \{\text{nonempty Fitting formations}\}$. The conception of multiple locality introduced by A. N. Skiba in 1987 for formations and further developed for many other classes of groups, as applied to Ω-foliated formations is as follows: every formation is considered to be 0-multiple Ω-foliated with a direction φ; an Ω-foliated formation with a direction φ is called an n-multiple Ω-foliated formation where n is a positive integer if it has such an Ω-satellite all nonempty values of which are $(n-1)$-multiple Ω-foliated formations with the direction φ. The aim of this work is to study the properties of maximal n-multiple Ω-foliated subformations of a given n-multiple Ω-foliated formation. We use classical methods of the theory of groups, of the theory of classes of groups, as well as methods of the general theory of lattices. In the paper we have established the existence of maximal n-multiple Ω-foliated subformations for the formations with certain properties, we have obtained the characterization of the formation $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ which is the intersection of all maximal n-multiple Ω-foliated subformations of the formation $\mathfrak{F}$, and we have revealed the relation between a maximal inner Ω-satellite of 1-multiple Ω-foliated formation and a maximal inner Ω-satellite of its maximal 1-multiple Ω-foliated subformation. The results will be useful in studying the inner structure of formations of finite groups, in particular, in studying the maximal chains of subformations and in establishing the lattice properties of formations.

Keywords: finite group, class of groups, formation, maximal subformation, Ω-foliated formation, n-multiple Ω-foliated formation

For citation: Sorokina M. M., Maksakov S. P. On maximal subformations of n-multiple Ω-foliated formations of finite groups. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 15–25 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-15-25

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются только конечные группы. В теории классов групп важную роль играют функциональные методы (см., например, [1]). Впервые эти методы были применены В. Гашюцем к построению локальных формаций [2]. В работе [3] Л. А. Шеметков с помощью функции вида $f_1 : \mathfrak{I} \to$ {формации групп}, где $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп, ввел в рассмотрение понятие композиционной формации. В [4] Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба обобщили данное понятие, построив $\mathfrak{L}$-композиционные формации, где $\mathfrak{L}$ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, используя при этом функции-спутники вида $f_2 : \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \to$ {формации групп}. Развивая данный функциональный подход, В. А. Ведерников разработал концепцию Ω-расслоенности для формаций и классов Фиттинга, в частности, с помощью новой функции (функции-направления) вида $\varphi : \mathfrak{I} \to$ {непустые формации Фиттинга}, в работе [5] была построена серия Ω-расслоенных (расслоенных) формаций, где Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$. Рассматривая в качестве φ различные конкретные функции, получают различные виды Ω-расслоенных (расслоенных) формаций, один из которых составляют Ω-композиционные (композиционные) формации. В статье [6] А. Н. Скиба ввел в рассмотрение концепцию кратной локальности для формаций, которая в дальнейшем получила развитие для многих других классов групп. Ω-расслоенные и n-кратно Ω-расслоенные формации изучались в работах Ю. А. Еловиковой, М. А. Корпачевой, Е. Н. Деминой, А. Б. Еловикова, Д. Г. Коптюх, Н. В. Силенок, М. М. Сорокиной и др. (см., например, [7–11]). Результаты исследований, представленные в настоящей работе, также относятся к данному направлению.

Как отмечено в монографии А. Н. Скибы [12], изучение подформационного строения формаций является одной из главных задач в теории формаций конечных групп. При решении данной задачи важную роль играют максимальные подформации исследуемых формаций, их наличие, свойства, внутреннее строение и другие характеристики. В настоящей работе изучаются максимальные n-кратно Ω-расслоенные подформации n-кратно Ω-расслоенных формаций. Решены следующие задачи: доказано существование максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций для формаций с заданными свойствами (теоремы 1–3); получена характеризация формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, являющейся пересечением всех максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ (теорема 4); установлена взаимосвязь между функциями-спутниками 1-кратно Ω-расслоенной формации и ее максимальной 1-кратно Ω-расслоенной подформации, а именно взаимосвязь между значениями максимального внутреннего Ω-спутника 1-кратно Ω-расслоенной формации и соответствующими значениями максимального внутреннего Ω-спутника ее максимальной 1-кратно Ω-расслоенной подформации (теорема 5). В доказательствах используются классические методы теории групп, методы общей теории решеток, а также методы теории формаций, в частности, методы, разработанные Л. А. Шеметковым и А. Н. Скибой в [4] для $\mathfrak{L}$-композиционных формаций.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Используемые определения и обозначения для групп и классов групп стандартны (см., например, [1, 12]). Приведем лишь некоторые из них. Символ $:=$ означает равенство по определению. Если A — подгруппа (нормальная) группы G, то используется обозначение $A \leqslant G$ ($A \lhd G$). Запись $G = A \rtimes B$ означает, что группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B, где $A \lhd G$; Z_n — циклическая группа порядка n. Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой, называемой *монолитом* группы G.

Классом групп называется совокупность групп, содержащая с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}$ обозначаются классы всех конечных, всех конечных разрешимых и всех конечных абелевых групп соответственно. $(\mathfrak{X})$ — класс групп, порожденный совокупностью групп $\mathfrak{X}$, т.е. $(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов групп, содержащих $\mathfrak{X}$; в частности, (G) — класс всех групп, изоморфных группе G. Класс $\mathfrak{F}$ называется замкнутым относительно: *гомоморфных образов*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ следует

$$G/N \in \mathfrak{F}; \tag{1}$$

подпрямых произведений, если $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ влечет

$$G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}; \tag{2}$$

нормальных подгрупп, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ следует

$$N \in \mathfrak{F}; \tag{3}$$

произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, если из $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что

$$G \in \mathfrak{F}. \tag{4}$$

Класс $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условиям (1) и (2), называется *формацией*; класс $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется *классом Фиттинга*; $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга. Наибольшая нормальная подгруппа группы G, принадлежащая классу Фиттинга $\mathfrak{F}$, обозначается $G_{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G; наименьшая нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$, обозначается $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G. Через $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ обозначается произведение классов групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, т.е. $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{E}|\ \exists\ N \lhd G,\ N \in \mathfrak{F}_1,\ G/N \in \mathfrak{F}_2)$; $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2$ — корадикальное произведение класса групп $\mathfrak{F}_1$ и формации $\mathfrak{F}_2$, т.е. $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = \big(G \in \mathfrak{E}|\ G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\big)$. Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп, Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$; $K(G)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G; для класса групп $\mathfrak{F}$ через $K(\mathfrak{F})$ обозначается $\cup_{G\in\mathfrak{F}} K(G)$. Группа G называется *Ω-группой*, если $K(G) \subseteq \Omega$. В дальнейшем $\mathfrak{F}_\Omega$ — класс всех Ω-групп, принадлежащих классу $\mathfrak{F}$; в частности, для любой группы $A \in \mathfrak{I}$ полагают $\mathfrak{F}_A := \mathfrak{F}_{(A)}$, $\mathfrak{F}_{A'} := \mathfrak{F}_{(A)'}$, где $(A)' := \mathfrak{I} \setminus (A)$, $\mathfrak{N}_p := \mathfrak{E}_{Z_p}$. Главный фактор H/L группы G называется *главным A-фактором*, если $K(H/L) = (A)$. Через $\mathfrak{S}_{cA}$ обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A-фактор централен; $O_\Omega(G) := G_{\mathfrak{E}_\Omega}$, $O_A(G) := G_{\mathfrak{E}_A}$, $O_p(G) := O_{Z_p}(G)$, $O_{A',A}(G) := G_{\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A}$, $F_A(G) := G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ [5]. Как отмечается в [5, замечание 2], подгруппа $F_A(G)$ группы G совпадает с пересечением централизаторов всех главных A-факторов группы G.

Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to$ {*формации групп*}, где $f(\Omega') \neq \varnothing$ (символ Ω' обозначает элемент, не принадлежащий Ω), $h : \mathfrak{I} \to$ {*формации групп*}, $\varphi : \mathfrak{I} \to$ {*непустые формации Фиттинга*} — функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения и называемые соответственно *ΩF-функцией*, *F-функцией*, *FR-функцией*. Если ψ_1, ψ_2 — ΩF-функции (F-функции, FR-функции), то полагают $\psi_1 \leqslant \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(A) \subseteq \psi_2(A)$

для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (соответственно, для любого $A \in \mathfrak{J}$). Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$ называется *Ω-расслоенной формацией с направлением φ* (коротко, *$\Omega\varphi$-расслоенной формацией*) с *Ω-спутником* f; формация $\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A)$ для всех $A \in K(G))$ называется *расслоенной формацией с направлением φ* (коротко, *φ-расслоенной формацией*) со *спутником* h [5, с. 126–127]. $\Omega\varphi$-расслоенная (φ-расслоенная) формация называется *Ω-свободной* (*свободной*), если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$; *Ω-канонической* (*канонической*), если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$; *Ω-композиционной* (*композиционной*), если $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой $A \in \mathfrak{J}$ [5, с. 127–129]. Направления Ω-свободной, Ω-канонической и Ω-композиционной формаций обозначаются соответственно φ_0, $\varphi_2{}'$ и φ_3. Направление φ Ω-расслоенной формации называется *r-направлением*, если $\mathfrak{E}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{J}$; *b-направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{J}$ [13, с. 56].

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR-функция. Следуя [6], всякую непустую формацию считают *0-кратно Ω-расслоенной с направлением φ* (коротко, *$0\Omega\varphi$-расслоенной*); при $n > 0$ $\Omega\varphi$-расслоенную формацию $\mathfrak{F}$ называют *n-кратно Ω-расслоенной с направлением φ* (коротко, *$n\Omega\varphi$-расслоенной*), если $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним $\Omega\varphi_{(n-1)}$-спутником, т. е. таким Ω-спутником, все непустые значения которого являются $(n-1)\Omega\varphi$-расслоенными формациями. Собственную $n\Omega\varphi$-расслоенную подформацию $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называют *максимальной $n\Omega\varphi$-расслоенной подформацией* формации $\mathfrak{F}$, если для любой $n\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{H}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Через $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначается $n\Omega\varphi$-расслоенная формация, порожденная множеством групп $\mathfrak{X}$, т.е. $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ — пересечение всех $n\Omega\varphi$-расслоенных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$; в частности, $\Omega F_1(\mathfrak{X}, \varphi) := \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\Omega F_0(\mathfrak{X}, \varphi) := form(\mathfrak{X})$; если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $\Omega F_n(\{G\}, \varphi)$ называется *однопорожденной $n\Omega\varphi$-расслоенной формацией* и обозначается $\Omega F_n(G, \varphi)$ (см., например, [10]).

Пусть θ — непустое множество формаций, упорядоченное относительно включения $\subseteq$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — θ-формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \theta$). Тогда точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяют соответственно следующим образом: $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \wedge_\theta \mathfrak{F}_2$, $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) := \mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1 \wedge_\theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$ — θ-формация, порожденная объединением $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$, т.е. $\mathfrak{F}_1 \vee_\theta \mathfrak{F}_2$ — пересечение всех θ-формаций, содержащих $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. Если множество θ замкнуто относительно пересечения и в θ имеется такая формация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ для любой $\mathfrak{H} \in \theta$, то $\inf(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \theta$ и $\sup(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \in \theta$, тем самым на множестве θ задана структура решетки. В этом случае θ называется *полной решеткой формаций* [12, с. 12]. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \theta$, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Через $\mathfrak{F}_2/_\theta\mathfrak{F}_1$ обозначается решетка всех θ-формаций $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$ [12, с. 168]. Через $n\Omega\varphi$ обозначим множество всех $n\Omega\varphi$-расслоенных формаций. Отметим, что, согласно [10, теорема 4 (6)], множество $n\Omega\varphi$ является полной модулярной решеткой формаций.

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ N-КРАТНО Ω-РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR-функция. Следуя [12], $n\Omega\varphi$-расслоенную формацию $\mathfrak{F}$ назовем *$n\Omega\varphi$-неприводимой*, если $\Omega F_n(\cup_{i \in I}\mathfrak{F}_i, \varphi) \subset \mathfrak{F}$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, $\mathfrak{F}$ — $n\Omega\varphi$-расслоенная формация. Если $\mathfrak{F}$ является $n\Omega\varphi$-неприводимой формацией, то в ней существует единственная максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $n\Omega\varphi$-неприводимая формация, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех собственных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \varphi)$. Так как $\mathfrak{F}$ — $n\Omega\varphi$-неприводимая формация, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — такая $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. Отсюда, ввиду задания $\mathfrak{M}$, получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Последнее, в силу включения $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, означает, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{X} \subseteq \Omega F_n(\cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i, \varphi) = \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ в силу выбора $\mathfrak{X}$ получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{M}$. Таким образом, всякая максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{M}$, и, следовательно, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{F}$. $\square$

Справедливость следующей леммы вытекает из [10, теорема 4 (2, 3)].

Лемма. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\mathfrak{F}_i \in n\Omega\varphi$, $i \in I$, $\mathfrak{F} = \cup_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. Если множество $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является цепью, то $\mathfrak{F} \in n\Omega\varphi$.*

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — FR-функция, $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ — соответственно однопорожденная и собственная $n\Omega\varphi$-расслоенные подформации формации $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = \Omega F_n((\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}), \varphi)$. Рассмотрим формацию $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому $\mathfrak{F} = \Omega F_n((\mathfrak{B} \cup \mathfrak{H}), \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$, что в силу $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ невозможно. Следовательно, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{B}$. Покажем, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$. Пусть $\mathscr{X} := \{\mathfrak{X} \in n\Omega\varphi \mid \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subset \mathfrak{B}\}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — произвольная цепь в $\mathscr{X}$ и $\mathfrak{D} := \cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i$. Согласно лемме, $\mathfrak{D} \in n\Omega\varphi$, причем $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$. По условию $\mathfrak{B} = \Omega F_n(B, \varphi)$, где B — некоторая группа. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, то найдется такое $j \in I$, что $B \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{B} = \Omega F_n(B, \varphi) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору $\mathscr{X}$. Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathscr{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в $\mathscr{X}$ имеется максимальный элемент $\mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация в $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{T} \in n\Omega\varphi$. Так как $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{T}$ и поэтому $\mathfrak{T} \in \mathscr{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация формации $\mathfrak{B}$.

Так как, согласно [10, теорема 4 (6)], множество $n\Omega\varphi$ является модулярной решеткой формаций, то ввиду [14, глава 1, п. 7] решетка $(\mathfrak{B} \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H})/_{n\Omega\varphi}\mathfrak{H}$ изоморфна решетке $\mathfrak{B}/_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{B} \wedge_{n\Omega\varphi} \mathfrak{H})$, т. е. $\mathfrak{F}/_{n\Omega\varphi}\mathfrak{H} \cong \mathfrak{B}/_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H})$. В силу данного изоморфизма, из того, что в $\mathfrak{B}$ существует максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}$, следует, что в $\mathfrak{F}$ существует максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация, содержащая $\mathfrak{H}$. $\square$

Пусть $\{\mathfrak{F}_i | i \in I\}$ — совокупность формаций, удовлетворяющая условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых различных $i, j \in I$. Через $\otimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ обозначается совокупность всех групп вида $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_t} \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \ldots, i_t \in I$ [12, с. 171].

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ — r-направление Ω-расслоенной формации, $\varphi \leqslant \varphi_2{}'$, $\mathfrak{F} = \underset{i \in I}{\otimes} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i \in n\Omega\varphi$, $i \in I$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальной $n\Omega\varphi$-расслоенной подформацией, то найдется такое $j \in I$, что формация $\mathfrak{F}_j$ также обладает максимальной $n\Omega\varphi$-расслоенной подформацией.*

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ обладает максимальной $n\Omega\varphi$-расслоенной подформацией $\mathfrak{M}$. Предположим, что формация $\mathfrak{F}_i$ не имеет максимальных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций для любого $i \in I$. По определению $\Omega\varphi$-расслоенной формации имеем $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда, согласно [12, лемма 4.3.4], $\mathfrak{M} = \underset{i \in I}{\otimes} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то существует такое $j \in I$, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}_j$. Ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}_j$ получаем, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}_j$. По предположению формация $\mathfrak{F}_j$ не имеет максимальных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций. Следовательно, в $\mathfrak{F}_j$ существует такая собственная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{H}_j$, что $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j$. Пусть $\mathfrak{M}_{j'} := \underset{i \in I \setminus \{j\}}{\otimes} (\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$ и $\mathfrak{H} := \Omega F_n (\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

1. Проверим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда $G = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_t}$, где $A_{i_r} \in \mathfrak{F}_{i_r} \cap \mathfrak{M}$, $i_r \in I$, $r = \overline{1, t}$. Отметим, что $A_{i_s} \cap A_{i_p} = 1$ для любых $s \neq p$, $s = \overline{1, t}$, $p = \overline{1, t}$. Пусть $i_r \neq j$ для любого $r = \overline{1, t}$. Тогда $G \in \mathfrak{M}_{j'}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $j \in \{i_1, \ldots, i_t\}$. Если $t = 1$, то $i_1 = i_t = j$ и $G = A_j \in \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j$. Поэтому при $t = 1$ имеем $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $t \neq 1$. Поскольку в прямом произведении $A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_t}$ множители попарно перестановочны, то можем считать $A_{i_t} = A_j$. Это означает, что $G/A_j = G/A_{i_t} \cong A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{t-1}} \in \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $A := A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_{t-1}}$. Тогда $G/A \cong A_j \in \mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ — формация, то из $G/A_j \in \mathfrak{H}$ и $G/A \in \mathfrak{H}$ следует, что $G \cong G/(A \cap A_j) \in \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M}$, и ввиду $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{F}_j$ получаем $\mathfrak{H}_j \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_j \subset \mathfrak{H}_j$, что невозможно. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Предварительно установим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{H} = \Omega F_n (\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi)$, достаточно проверить, что $\mathfrak{F}$ — $n\Omega\varphi$-расслоенная формация, содержащая множество $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$. Поскольку $\mathfrak{F}_i$ — $n\Omega\varphi$-расслоенная формация для любого $i \in I$, φ — r-направление и $\varphi \leqslant \varphi_2{}'$, то по [7, теорема 1] формация $\mathfrak{F}$ является $n\Omega\varphi$-расслоенной. Из $\mathfrak{H}_j \subset \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'} \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{H}$ — наименьшая $n\Omega\varphi$-расслоенная формация, содержащая $\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}$, имеем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j. \tag{5}$$

С другой стороны, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \Omega F_n (\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi) \cap \mathfrak{F}_j$. Отметим, что по [7, теорема 1] $\mathfrak{M}_{j'} \in n\Omega\varphi$. Поскольку, согласно [10, теорема 4 (6)], решетка $n\Omega\varphi$ модулярна, то ввиду $\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'} = (1)$ имеем

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \Omega F_n (\mathfrak{H}_j \cup \mathfrak{M}_{j'}, \varphi) \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j \wedge_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{H}_j \vee_{n\Omega\varphi} \mathfrak{M}_{j'}) =$$
$$= \mathfrak{H}_j \vee_{n\Omega\varphi} (\mathfrak{F}_j \wedge_{n\Omega\varphi} \mathfrak{M}_{j'}) = \Omega F_n (\mathfrak{H}_j \cup (\mathfrak{F}_j \cap \mathfrak{M}_{j'}), \varphi) = \mathfrak{H}_j.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует равенство $\mathfrak{F}_j = \mathfrak{H}_j$, что в силу выбора формации $\mathfrak{H}_j$ невозможно. Следовательно, $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Из 1 и 2 получаем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, что противоречит выбору $\mathfrak{M}$. Таким образом, найдется $j \in I$ такое, что формация $\mathfrak{F}_j$ обладает максимальной $n\Omega\varphi$-расслоенной подформацией. $\square$

3. О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ *N*-КРАТНО Ω-РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ — FR-функция. Следуя [12], через $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ обозначим пересечение всех максимальных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ не имеет максимальных $n\Omega\varphi$-расслоенных подформаций, то полагаем $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$. Группу $G \in \mathfrak{F}$ назовем *$n\Omega\varphi$-необразующей группой* формации $\mathfrak{F}$, если из $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi)$ всегда следует, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$.

Теорема 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \leqslant \varphi$, $\mathfrak{F}$ — $n\Omega\varphi$-расслоенная формация. Тогда формация $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ состоит из всех $n\Omega\varphi$-необразующих групп формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{K}$ — совокупность всех $n\Omega\varphi$-необразующих групп из $\mathfrak{F}$.

1. Установим, что $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$. Пусть $G \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Проверим, что $G \in \mathfrak{K}$. Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi)$. Достаточно показать, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$. Отметим, что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subset \mathfrak{F}$. Так как $\Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi) = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \vee_{n\Omega\varphi} \Omega F_n(G, \varphi)$, то, по теореме 2, в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{H}$, что $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку $G \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, то $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $\Omega F_n(\mathfrak{X} \cup \{G\}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ и поэтому $G \in \mathfrak{K}$. Следовательно, $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{K}$.

2. Покажем, что $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Пусть $K \in \mathfrak{K}$. Предположим, что $K \notin \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$. Тогда $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{F}$ и, согласно определению формации $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$, в $\mathfrak{F}$ существует такая максимальная $n\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\mathfrak{F}_1$, что $K \notin \mathfrak{F}_1$. Рассмотрим формацию $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi)$. Так как $\mathfrak{F}_1 = \Omega F_n(\mathfrak{F}_1, \varphi) \subset \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \{K\}, \varphi) = \mathfrak{F}$. Ввиду выбора группы K имеем $\Omega F_n(\mathfrak{F}_1, \varphi) = \mathfrak{F}$. Это означает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Таким образом, $K \in \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$ и поэтому $\mathfrak{K} \subseteq \Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F})$.

Из 1 и 2 следует, что $\Phi_{n\Omega\varphi}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{K}$. $\square$

4. ОБ Ω-СПУТНИКАХ 1-КРАТНО Ω-РАССЛОЕННЫХ ФОРМАЦИЙ И ИХ МАКСИМАЛЬНЫХ 1-КРАТНО Ω-РАССЛОЕННЫХ ПОДФОРМАЦИЙ

Ω-спутник f $\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним*, если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$; *минимальным* (*максимальным внутренним*), если f является минимальным (максимальным) элементом множества всех (всех внутренних) Ω-спутников формации $\mathfrak{F}$ [13]. В следующей теореме рассматриваются $n\Omega\varphi$-расслоенные формации в случае, когда $n = 1$.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ — максимальная $\Omega\varphi$-расслоенная подформация $\Omega\varphi$-расслоенной формации $\mathfrak{F}_2$, где φ — br-направление, $\varphi \leqslant \varphi_3$, h_1 и h_2 — максимальные внутренние Ω-спутники формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ соответственно. Если существует такая простая абелева группа $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$, что*

$$h_1(Z_p) \subset h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{S}, \tag{7}$$

то Z_p *— единственная с точностью до изоморфизма абелева группа из* $\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$*, удовлетворяющая* (7)*, т.е.* $h_1(A) = h_2(A)$ *для любой абелевой группы* $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$*.*

Доказательство. Пусть Z_p — группа из $\Omega \cap K(\mathfrak{F}_1)$, удовлетворяющая условию (7). Предположим, что в классе $(\Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$ существует группа Z_q такая, что $h_1(Z_q) \subset h_2(Z_q) \subseteq \mathfrak{S}$. По [5, теорема 5] формация $\mathfrak{F}_i$ обладает единственным минимальным Ω-спутником f_i, имеющим следующее строение:

$$f_i(A) = form(G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{F}_i)$$

для любой группы $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}_i)$, $i = 1, 2$. Согласно [10, следствие 5.8], h_i — единственный максимальный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, причем ввиду [10, лемма 11 (2)] справедливы равенства $h_i(Z_p) = \mathfrak{N}_p f_i(Z_p)$ и $h_i(Z_q) = \mathfrak{N}_q f_i(Z_q)$, $i = 1, 2$.

1. Пусть L — группа минимального порядка из $h_2(Z_p) \setminus h_1(Z_p)$. Поскольку $f_i(Z_p)$ — формация и $\mathfrak{N}_p$ — формация, замкнутая относительно нормальных подгрупп, то ввиду [1, определение IV.1.7] и [1, теорема IV.1.8 (a)] класс $h_i(Z_p) = \mathfrak{N}_p \circ f_i(Z_p)$ является формацией, $i = 1, 2$. Это означает, что L — монолитическая группа. В силу включения $h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{S}$ группа L разрешима.

Допустим, что $O_p(L) \neq 1$. Так как класс $h_2(Z_p)$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $L/O_p(L) \in h_2(Z_p)$. Тогда, в силу выбора группы L, из $|L/O_p(L)| < |L|$ следует, что $L/O_p(L) \in h_1(Z_p)$. Поэтому $L \in \mathfrak{N}_p h_1(Z_p)$. Отсюда, согласно [1, определение IV.1.7] и [1, теорема IV.1.8 (c)], получаем $L \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p f_1(Z_p)) = \mathfrak{N}_p \circ (\mathfrak{N}_p \circ f_1(Z_p)) = (\mathfrak{N}_p \circ \mathfrak{N}_p) \circ f_1(Z_p) = \mathfrak{N}_p f_1(Z_p) = h_1(Z_p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(L) = 1$ и по [15, лемма 18.8] существует точный неприводимый $F_p(L)$-модуль K, где F_p — поле из p элементов. Пусть $G = K \rtimes L$. Тогда группа G является монолитической с монолитом $K = C_G(K)$, являющимся элементарной абелевой p-группой. Так как $\varphi \leqslant \varphi_3$ и φ — b-направление, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \subseteq \varphi_3(Z_p)$. Поэтому $K \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(K) = K$. Следовательно, $K = G_{\varphi(Z_p)}$ и, значит, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong L$.

Покажем, что $G/G_{\varphi(Z_q)} \cong L/L_{\varphi(Z_q)}$. Из $Z_q \not\cong Z_p$ и $K \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $K \in \mathfrak{E}_{(Z_q)'}$. Поскольку φ — r-направление, то справедливо равенство $\varphi(Z_q) = \mathfrak{E}_{(Z_q)'}\varphi(Z_q)$ и, согласно [13, лемма 1 (7)], $(G/K)_{\varphi(Z_q)} = G_{\varphi(Z_q)}/K$. Тогда $L/L_{\varphi(Z_q)} \cong (G/K)/(G/K)_{\varphi(Z_q)} = (G/K)/(G_{\varphi(Z_q)}/K) \cong G/G_{\varphi(Z_q)}$. Пусть $L/L_{\varphi(Z_q)} := H$. Если $|H| = |L|$, то $L_{\varphi(Z_q)} = 1$. Из $F(L) \subseteq L_{\varphi(Z_q)}$ получаем $F(L) = 1 = \Phi(L)$, что, ввиду разрешимости группы L, невозможно. Следовательно, $|H| < |L|$.

Покажем, что $H \in h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$. Для этого предварительно установим, что $G \in \mathfrak{F}_2 \setminus \mathfrak{F}_1$. Согласно [13, следствие 3 (1)], $\mathfrak{N}_p h_2(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}_2$. Поэтому $G = K \rtimes L \in \mathfrak{F}_2$. Отсюда, в частности, следует, что $H \cong G/G_{\varphi(Z_q)} \in h_2(Z_q)$. Если $G \in \mathfrak{F}_1$, то $L \cong G/G_{\varphi(Z_p)} \in h_1(Z_p)$, что противоречит выбору группы L. Поэтому $G \notin \mathfrak{F}_1$. Так как $\mathfrak{F}_1$ — максимальная $\Omega\varphi$-расслоенная подформация из $\mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_2 = \Omega F((G) \cup \mathfrak{F}_1, \varphi)$ и по [5, теорема 5] $f_2(Z_q) = form((G/G_{\varphi(Z_q)}) \cup f_1(Z_q)) = form((H) \cup f_1(Z_q))$. Тогда $h_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q f_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q form((H) \cup f_1(Z_q))$. Если $H \in h_1(Z_q)$, то $H \in \mathfrak{N}_q f_1(Z_q)$ и $h_2(Z_q) = \mathfrak{N}_q form((H) \cup f_1(Z_q)) = \mathfrak{N}_q f_1(Z_q) = h_1(Z_q)$, что невозможно. Следовательно, $H \notin h_1(Z_q)$. Таким образом, $H \in h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$.

2. Пусть L_1 — группа минимального порядка из $h_2(Z_q) \setminus h_1(Z_q)$. Тогда L_1 — монолитическая разрешимая группа. В силу выбора группы L_1 имеем $|L_1| \leqslant |H|$. Как и в пункте 1 $O_q(L_1) = 1$ и ввиду [15, лемма 18.8] существует монолитическая

группа $G_1 = K_1 \rtimes L_1$ с монолитом K_1, являющимся элементарной абелевой q-группой, $K_1 = (G_1)_{\varphi(Z_q)}$ и $L_1/(L_1)_{\varphi(Z_p)} \cong G_1/(G_1)_{\varphi(Z_p)}$. Пусть $L_1/(L_1)_{\varphi(Z_p)} := H_1$. Рассуждая аналогично пункту 1, получаем $H_1 \in h_2(Z_p) \setminus h_1(Z_p)$ и $|H_1| < |L_1|$. Ввиду выбора группы L справедливо $|L| \leqslant |H_1|$.

Таким образом, $|H_1| < |L_1| \leqslant |H| < |L| \leqslant |H_1|$, что невозможно. Следовательно, предположение о том, что существует такая группа $Z_q \in (\Omega \cap \mathfrak{A} \cap K(\mathfrak{F}_1)) \setminus (Z_p)$, что $h_1(Z_q) \subset h_2(Z_q) \subseteq \mathfrak{S}$, ложно. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоремы 1, 2, 4 развивают результаты работы [4] (см. [4, п. 5]), полученные для $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, а именно в качестве следствий из данных теорем вытекают результаты для Ω-композиционных ($\mathfrak{L}$-композиционных), Ω-канонических, Ω-биканонических, Ω-свободных и других видов Ω-расслоенных формаций. В качестве следствий теоремы 3 получаются утверждения для Ω-свободных и Ω-канонических формаций; в качестве следствий теоремы 5 — результаты для Ω-композиционных и Ω-биканонических формаций. При $\Omega = \mathfrak{I}$ из теорем 1–5 вытекают результаты для n-кратно расслоенных формаций.

Вопросы существования максимальных τ-замкнутых локальных подформаций у заданной формации $\mathfrak{F}$ вида $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, свойства пересечений максимальных τ-замкнутых локальных подформаций, а также вопросы взаимосвязи между минимальными экранами (спутниками) локальной формации и ее максимальной локальной подформации исследовались в [12] (см. [12, гл. 5]). Исследованию решеточных свойств n-кратно Ω-расслоенных формаций посвящены работы [7, 8]. Некоторые свойства максимальных n-кратно Ω-расслоенных подформаций заданной формации для случая $n = 1$ были рассмотрены в [9].

Список литературы

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. 901 p.
2. *Gaschütz W.* Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Mathematische Zeitschrift. 1962. Vol. 80, iss. 1. P. 300–305. https://doi.org/10.1007/BF01162386
3. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций // Доклады АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
4. *Скиба А. Н, Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Украинский математический журнал. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
5. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144. https://doi.org/10.4213/dm299
6. *Скиба А. Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 21–31.
7. *Скачкова (Еловикова) Ю. А.* Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 42–46. https://doi.org/10.4213/dm252
8. *Еловикова Ю. А.* Алгебраичность решеток Ω-расслоенных формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2013. № 4. С. 13–16.
9. *Сорокина М. М., Корпачева М. А.* О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 1. С. 106–115. https://doi.org/10.4213/dm35
10. *Ведерников В. А., Демина Е. Н.* Ω-расслоенные формации мультиоператорных Т-групп // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.

11. *Еловиков А. Б.* Факторизация однопорожденных частично расслоенных формаций // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 3. С. 99–118. https://doi.org/10.4213/dm1064
12. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск : Беларуская навука, 1997. 240 с.
13. *Ведерников В. А.* Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
14. *Биркгоф Г.* Теория решеток : перевод с английского. Москва : Наука, 1984. 568 с.
15. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. Москва : Наука, 1989. 256 с.

References

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 901 p.
2. Gaschütz W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, 1962, vol. 80, iss. 1, pp. 300–305 (in Germany). https://doi.org/10.1007/BF01162386
3. Shemetkov L. A. On product of formations. *Academy of Sciences BSSR Report*, 1984, vol. 28, no. 2, pp. 101–103 (in Russian).
4. Skiba A. N., Shemetkov L. A. Multiple $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2000, vol. 52, no. 6, pp. 783–797 (in Russian).
5. Vedernikov V. A., Sorokina M. M. The Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2001, vol. 11, no. 5, pp. 507–527.
6. Skiba A. N. Characterization of finite solvable groups of a certain nilpotent length. *Issues of Algebra*, 1987, vol. 3, pp. 21–31 (in Russian).
7. Skachkova (Elovikova) Y. A. Boolean lattices of multiple Ω-foliated formations and Fitting classes. *Discrete Mathematics and Applications*, 2002, vol. 12, no. 5, pp. 477–482.
8. Elovikova Y. A. The algebraic lattices of Ω-foliated formations. *The Bryansk State University Herald*, 2013, no. 4, pp. 13–16 (in Russian).
9. Sorokina M. M., Korpacheva M. A. On the critical Ω-foliated formations of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*, 2006, vol. 16, no. 3, pp. 289–298. https://doi.org/10.1515/156939206777970417
10. Vedernikov V. A., Demina E. N. Ω-Foliated formations of multioperator T-groups. *Siberian Mathematical Journal*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 789–804. https://doi.org/10.1007/s11202-010-0079-3
11. Elovikov A. B. The factorisation of one-generated partially foliated formations. *Discrete Mathematics and Applications*, 2009, vol. 19, iss. 4, pp. 411–430. https://doi.org/10.1515/DMA.2009.029
12. Skiba A. N. *Algebra formatsiy* [Algebra of Formations]. Minsk, Belarusskaya Nauka, 1997. 240 p. (in Russian).
13. Vedernikov V. A. Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2001, suppl. 2, pp. S217–S233.
14. Birkhoff G. *Lattice Theory*. New York, American Mathematical Society, 1973. 423 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1984. 568 p.).
15. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of Algebraistic Systems]. Moscow, Nauka, 1997. 256 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 04.12.2019
Принята к публикации / Accepted 03.02.2020
Опубликована / Published 01.03.2021