



МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 26–34
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 26–34

Научная статья

УДК 593.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

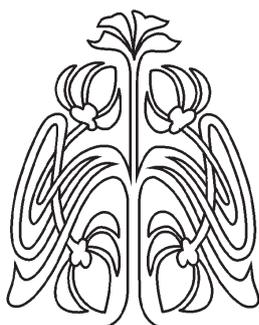
Прочность при изгибе анизотропных составных плит со свободными краями

А. Г. Акопян

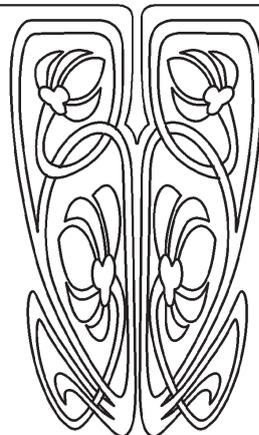
Северо-Кавказский филиал Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), Россия, Ставропольский край, 357340, г. Лермонтов, ул. Промышленная, д. 20

Акопян Ашот Гаврошевич, кандидат физико-математических наук, доцент, manakofoto@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Аннотация. Современная техника предъявляет повышенные требования к прочностным свойствам машин, их деталей, а также различных конструкций и сооружений, уменьшению их веса, объема и размеров, что приводит к необходимости использования анизотропных композитных материалов. Нахождение критериев, позволяющих определить предельные прочностные характеристики элементов конструкций, инженерных сооружений, является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Проблемы прочности в конструкциях часто сводятся к выяснению характера местного напряженного состояния у вершин стыков составляющих частей. Решению этой актуальной проблемы для составных анизотропных плит может служить данная статья, где автор продолжает исследования в этой области, распространив их на изгиб анизотропных составных плит со свободными краями. Целью работы является изучение предельного напряженного состояния анизотропных составных плит в рамках классической теории изгиба плит. Внешние края плиты считаются свободными. Используя классическую теорию изгиба анизотропной плиты в пространстве физических и геометрических параметров, получены уравнения гиперповерхности, определяющие зоны малонапряженности для края контактной поверхности составной цилиндрически ортотропной плиты. Современные технологические процессы сварки, наплавки, пайки и склеивания позволяют изготавливать



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





элементы конструкций из монолитно соединенных между собой разнородных анизотропных материалов. Комбинирование различных материалов, обладающих качествами, соответствующими тем или иным условиям эксплуатации, открывает большие возможности для повышения технических и экономических характеристик машин, оборудования и сооружений. Оно может способствовать значительному увеличению их надежности, долговечности, уменьшению расходов на изготовление и эксплуатацию. Исходя из этого, решение, предлагаемое в данной работе, может быть полезным для повышения прочности композитных изделий.

Ключевые слова: малонапряженность, изгиб плит, анизотропный, составной

Для цитирования: Акопян А. Г. Прочность при изгибе анизотропных составных плит со свободными краями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 26–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>

The flexural strength of anisotropic composite plates with free edges

A. G. Akopyan

North Caucasus Branch of the Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), 20 Promyshlennaya St., Stavropol region, Lermontov 357340, Russia

Ashot G. Akopyan, manakofoto@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2921-5334>

Abstract. Modern technology shows increased demands on the strength properties of machines, their parts, as well as various structures, reducing their weight, volume and size, which leads to the need to use anisotropic composite materials. Finding criteria to determine the ultimate strength characteristics of structural elements, engineering structures is one of the urgent problems of solid mechanics. Strength problems in structures are often reduced to finding out the nature of the local stress state at the vertices of the joints of the constituent parts. The solution of this urgent problem for composite anisotropic plates can be found in this article, where the author continues the research in this area, extending them to the bending of anisotropic composite plates. The aim of the work is to study the limit stress state of anisotropic composite plates in the framework of the classical theory of plate bending. The outer edges of the plate are considered to be free. Using the classical theory of anisotropic plate bending in the space of physical and geometric parameters, the hypersurface equations determining the low-stress zones for the edge of the contact surface of a composite cylindrical orthotropic plate are obtained. Modern technological processes of welding, surfacing, soldering and bonding allow to produce structural elements of monolithic interconnected dissimilar anisotropic materials. The combination of different materials with qualities corresponding to certain operating conditions opens up great opportunities to improve the technical and economic characteristics of machines, equipment and structures. It can contribute to a significant increase in their reliability, durability, reduce the cost of production and operation. On this basis, the solution proposed in this work can be useful to increase the strength of composite materials.

Keywords: low tension, bending plates, anisotropic, composite



For citation: Akopyan A. G. The flexural strength of anisotropic composite plates with free edges. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 26–34. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-26-34>
This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Рассматривается малонапряженное состояние [1–5] около углового ребра края контактной поверхности соединения двух различных, цилиндрически ортотропных плит одинаковой толщины в рамках классической теории изгиба линейно упругих анизотропных плит [6, 7] при свободных краях. Исследование поведения напряжений в вершине угла при изгибе однородной изотропной плиты, имеющей угловое ребро, по классической теории изгиба плит, было проведено в работе [8]. Последующее рассмотрение этой задачи, по уточненной теории Рейсснера, показало [9], что перерезывающие силы в этом крае конечны. В работе [10] экспериментально показано существование и расположение зон малонапряженности и концентрации напряжений в угловых точках составных плит. Случай неоднородной составной плиты рассмотрен в [11]. Изучению вопросов изгиба анизотропных плит посвящены работы [12–18].

Поверхность, соединяющая две плиты, вертикальна к срединной плоскости. Такая составная плита подвержена изгибу под общей поперечной нагрузкой. Окрестность краевого ребра контактной поверхности соединения свободна от внешних сил. Поместим начало цилиндрической системы координат в угловой точке срединной плоскости плиты, как показано на рис. 1.

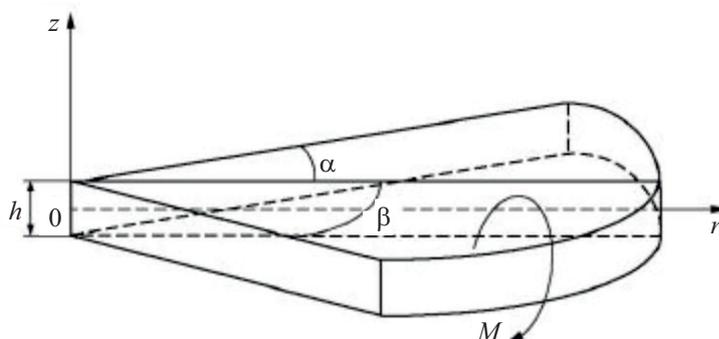


Рис. 1. Схема составной плиты
Fig. 1. The scheme of the composite plate

Принимаем, что главные оси анизотропии совпадают с осями этой цилиндрической системы координат. Толщину плиты обозначим h , а величины в окрестности точки $r = 0$, относящиеся к областям $0 \leq \theta \leq \alpha$, $-h/2 \leq z \leq h/2$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$, $-h/2 \leq z \leq h/2$, отмечаем индексами $i = 1, 2$ соответственно.

Прогиб w_i каждой области ортотропной плиты в окрестности точки $r = 0$ определяется из следующего уравнения [6]:

$$D_{ri} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^4} + 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial r^2 \partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial \theta^4} + 2D_{ri} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r^3} - 2D_{r\theta i} \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w_i}{\partial r \partial \theta^2} - D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + 2(D_{\theta i} + D_{r\theta i}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} + D_{\theta i} \frac{1}{r^4} \frac{\partial w_i}{\partial r} = 0, \quad (1)$$



где D_{ri} , $D_{\theta i}$, $D_{r\theta i}$ — жесткости каждой анизотропной плиты:

$$D_{ri} = \frac{E_{ri}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})}h^3, \quad D_{\theta i} = \frac{E_{\theta i}}{12(1 - \nu_{ri}\nu_{\theta i})}h^3, \quad D_{r\theta i} = D_{ri}\nu_{\theta i} + 2D_{ki}, \quad D_{ki} = \frac{G_i}{12}h^3.$$

Здесь E_{ri} , $E_{\theta i}$ модули Юнга для растяжения-сжатия в радиальном направлении r и в тангенциальном направлении θ , ν_{ri} , $\nu_{\theta i}$ — главные коэффициенты Пуассона, G_i — модуль сдвига для главных направлений r и θ .

В случае изотропного материала:

$$E_{ri} = E_{\theta i}, \quad \nu_{ri} = \nu_{\theta i} = \nu_i, \quad G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)},$$

и все жесткости сводятся к одной:

$$D_{ri} = D_{\theta i} = D_{r\theta i} = D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \nu_i^2)}.$$

Представляя прогиб плиты в форме

$$w_i(r, \theta) = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda), \quad (2)$$

где f_i и λ — искомые функции и постоянная, из уравнения (1) будет следовать

$$f_i'''' + 2(k_{1i}\lambda^2 + 1)f_i'' + (\lambda^2 - 1)(k_{2i}\lambda^2 - 1)f_i = 0, \quad (3)$$

где $k_{1i} = D_{r\theta i}/D_{\theta i}$, $k_{2i} = D_{ri}/D_{\theta i}$.

Корни соответствующего характеристического уравнения для (3) определяются из следующего выражения:

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \sqrt{-(k_{1i}\lambda^2 + 1) \pm \lambda \sqrt{(k_{1i}^2 - k_{2i})\lambda^2 + 2k_{1i} + k_{2i} + 1}} = \pm \sqrt{-a \pm b}. \quad (4)$$

Нам нужно рассмотреть три следующих случая:

1) все четыре корня (4) мнимые ($a \geq b$, b — величина действительная):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm \omega_{ki} i,$$

где случай $k = 1$ соответствует нижнему знаку под радикалом (4), а $k = 2$ — верхнему;

2) все корни (4) комплексные (b — величина мнимая):

$$r_{(1,2,3,4)i} = \pm(\xi_i \pm i\eta_i);$$

3) одна пара корней действительная, а другая — мнимая ($a < b$, b — действительная):

$$r_{(1,2)i} = \pm \xi_i, \quad r_{(3,4)i} = \pm \eta_i i.$$

Для каждого из случаев напомним общее решение уравнения (3):

- 1) $f_i = A_i \cos \omega_{1i}\theta + B_i \sin \omega_{1i}\theta + C_i \cos \omega_{2i}\theta + E_i \sin \omega_{2i}\theta;$
- 2) $f_i = A_i \cosh \xi_i\theta \cos \eta_i\theta + B_i \sinh \xi_i\theta \cos \eta_i\theta + C_i \cosh \xi_i\theta \sin \eta_i\theta + E_i \sinh \xi_i\theta \sin \eta_i\theta;$
- 3) $f_i = A_i \cosh \xi_i\theta + B_i \sinh \xi_i\theta + C_i \cos \eta_i\theta + E_i \sin \eta_i\theta,$ (5)

где A_i , B_i , C_i , E_i — произвольные постоянные.



Тогда для моментов будем иметь

$$\begin{aligned} M_{ri} &= -D_{ri}r^{\lambda-1} [v_{\theta i}f_i'' + (\lambda + 1)(\lambda + v_{\theta i})f_i], \\ M_{\theta i} &= -D_{\theta i}r^{\lambda-1} [f_i'' + (\lambda + 1)(v_{ri}\lambda + 1)f_i], \\ M_{r\theta i} &= -2D_{ki}r^{\lambda-1}f_i', \end{aligned} \quad (6)$$

а перерезывающие силы будут

$$\begin{aligned} Q_{ri} &= -r^{\lambda-2} [(D_{r\theta i}\lambda - D_{\theta i})f_i'' + (\lambda + 1)(D_{ri}\lambda^2 - D_{\theta i})f_i], \\ Q_{\theta i} &= -r^{\lambda-2} [(D_{\theta i}f_i'' + (\lambda + 1)(D_{r\theta i}\lambda + D_{\theta i})f_i']. \end{aligned} \quad (7)$$

Для обобщающей перерезывающей силы будем иметь

$$V_{\theta i} = Q_{\theta i} + \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial r} = -r^{\lambda-2} (D_{\theta i}f_i''' + g_i f_i'), \quad (8)$$

где

$$g_i = (\lambda + 1)D_{\theta i} + \lambda [(\lambda + 1)D_{r\theta i} + 2(\lambda - 1)D_{k1}].$$

На контактной поверхности ($\theta = 0$) следует соблюдать условия непрерывности: прогиба, угла поворота, изгибающего момента и обобщенной перерезывающей силы:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2, \quad f_1' = f_2', \quad D_{\theta 1}f_1''' + g_1f_1' = D_{\theta 2}f_2''' + g_2f_2', \\ D_{\theta 1} [f_1'' + (\lambda + 1)(v_{r1}\lambda + 1)f_1] &= D_{\theta 2} [f_2'' + (\lambda + 1)(v_{r2}\lambda + 1)f_2]. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим граничные условия на внешних краях ($\theta = \alpha$, $\theta = -\beta$) плиты.

При свободных краях имеем условия Кирхгофа, т.е. изгибающий момент и обобщенная перерезывающая сила равны нулю:

$$f_i'' + (\lambda + 1)(v_{ri}\lambda + 1)f_i' = 0, \quad D_{\theta i}f_i''' + g_i f_i' = 0. \quad (10)$$

Подставляя значение f_i из (5) в граничные условия (9) и (10), получаем системы восьми линейных уравнений относительно восьми постоянных A_i , B_i , C_i , E_i для каждого из трех случаев в (5) соответственно.

Для существования нетривиального решения полученных однородных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i , B_i , C_i , E_i необходимо, чтобы определители этих систем равнялись нулю:

$$\Delta(\lambda, \alpha, \beta, v_{ri}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i) = 0. \quad (11)$$

Из (2) и (6) следует, что если $0 < \text{Re } \lambda_1 < 1$, то при приближении к краю поверхности соединения ($r \rightarrow 0$) напряжения (моменты) неограниченно возрастают, при этом порядок особенности равен $|\text{Re } \lambda_1 - 1|$. А если $\text{Re } \lambda_1 > 1$, напряжения убывают до нуля при приближении к вершине угла. Полученное уравнение может позволить численным способом определить значение λ в зависимости от α , β , v_{ri} , $v_{\theta i}$, E_{ri} , $E_{\theta i}$, G_i .

Таким образом, исследование характера напряженного состояния в окрестности ребра края поверхности соединения составной анизотропной плиты при изгибе приводится к отысканию корня λ трансцендентного уравнения (11) с наименьшей положительной частью для фиксированных углов и механических характеристик соединяемых материалов. Можно составить программу для нахождения корня λ (11).



Численные расчеты можно провести для различных групп значений параметров анизотропии: 1) $\gamma = 1$, $G_i = \mu_i$; 2) $\lambda = 1$, $G_i = 4\mu_i$; 3) $\gamma = 1/20$, $G_i = 4\mu_i$; 4) $\gamma = 20$, $G_i = \mu/4$, где $\gamma = E_1/E_2$, $\mu_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, можно принять $\nu_{ri} = \nu_{\theta i} = 0.25$. Причем надо учесть замечание Фойгта [6] о равенстве $E_{ri} = E_{\theta i}$. Ясно, что здесь случай $\gamma = 1$ будет соответствовать однородной плите ($E_{r1} = E_{r2}$, $E_{\theta 1} = E_{\theta 2}$, $\nu_{r1} = \nu_{r2}$, $\nu_{\theta 1} = \nu_{\theta 2}$, $G_1 = G_2$), а $G_i = \mu_i$ — изотропной плите.

Можно рассматривать и обратную задачу [1–5]. А именно построить кривые, которые при фиксированных значениях механических характеристик материалов на плоскости (α, β) отделяют зону малонапряженности от зоны концентрации напряжений (моментов) у угловой точки. Предполагая, что вблизи границы области высокой концентрации напряжений наименьший корень уравнения (11) действительный, полагая в этом уравнении $\lambda = 1$ (предварительно освобождаясь от двукратного корня $\lambda = 1$), можно найти наименьшие положительные значения углов α и β в зависимости от параметров анизотропии. Геометрические места этих точек в плоскости (α, β) образуют те предельные кривые, которые разделяют область, где напряжения бесконечны, от области, где они конечны (области малонапряженного состояния). Численная реализация полученного уравнения может позволить в пространстве параметров $\alpha, \beta, \nu_{ri}, \nu_{\theta i}, E_{ri}, E_{\theta i}, G_i$ определить зону малонапряженности для края, обеспечивающую прочность соединения.

В частном случае, для изотропного материала, получаем следующее уравнение предельной кривой:

$$\frac{\sin 2\alpha}{1 + 3 \cos 2\alpha} + \gamma \frac{\sin 2\beta}{1 + 3 \cos 2\beta} = 0. \tag{12}$$

На рис. 2 приведены предельные линии в плоскости (α, β), разделяющие эту плоскость на две области. В области выше линий при $r = 0$ напряжения бесконечны, в области ниже линий при $r = 0$ напряжения конечны (области малонапряженного состояния). Линии 1, 2 и 3 построены по уравнению (12) при $\gamma = 1$, $\gamma = 20$ и $\gamma = 1/20$ соответственно.

На рис. 2 прямая линия 1 соответствует однородной плите, а кривые 2 и 3 — составной. Если для однородной изотропной плиты с углом раствора $\alpha + \beta$ больше π всегда имеется концентрация напряжений в вершине, а с углом меньше π отсутствует, то для составной изотропной плиты, как показывают кривые 2 и 3 на графике, есть участки, где $\varphi > \pi$ отсутствует концентрация напряжений, и, наоборот, есть участки, когда $\varphi < \pi$, но имеется концентрация напряжений.

Результаты, полученные в данной работе, могут быть полезными для повышения прочности при сварке, наплавке, пайке и склеивании разнородных плит.

Как мы видим, степень концентрации перерезывающих сил вблизи угловой точки

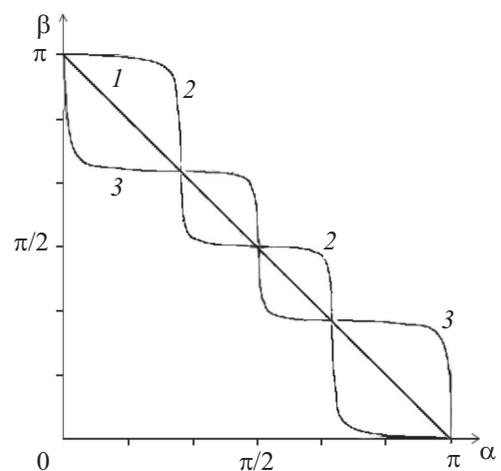


Рис. 2. Кривые, разделяющие области, в которых напряжения бесконечны, и области, в которых напряжения конечны: 1 — $\gamma = 1$; 2 — $\gamma = 20$; 3 — $\gamma = 1/20$

Fig. 2. Curves, separating regions in which the stresses are infinite and regions in which the stresses are finite: 1 — $\gamma = 1$; 2 — $\gamma = 20$; 3 — $\gamma = 1/20$



на единицу выше по сравнению с моментами, что объясняется несовершенством классической теории изгиба плит.

Применение классической теории к граничным условиям (10) свободных смежных краев приводит к возникновению суммарной поперечной силы, приложенной к угловой точке, что может оказывать значительное влияние на напряжения. Однако эти силы не столь важны, если углы оперты или защемлены [12, 13, 19]. Рассмотренный здесь случай граничных условий можно исследовать, используя уточненную теорию изгиба анизотропных плит [17, 20], позволяющую уйти от ограничений, налагаемых аппроксимацией Кирхгофа, и сравнить результаты.

Аналогичным образом можно рассматривать смешанные краевые условия.

Список литературы

1. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван : Издательство АН Армянской ССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М. А. Об условиях малонапряженности составных плит // Доклады Академии наук. 1993. Т. 332, № 3. С. 319–321.
3. Акопян А. Г. Малонапряженное состояние неоднородно-составных клиньев при смешанных граничных условиях // Прикладная механика и техническая физика. 1994. № 3. С. 149–156.
4. Акопян А. Г. О плоской деформации малонапряженного неоднородно-составного клина // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 1994. Т. 47, вып. 5–6. С. 42–48.
5. Акопян А. Г., Задоян М. А. Малонапряженность неоднородно-составных клиньев // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1992. № 5. С. 88–96.
6. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Москва : Гостехиздат, 1957. 463 с.
7. Chyanbin Hwu. Anisotropic Elastic Plates. Springer Science & Business Media, 2010. 673 p.
8. Williams M. L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending // Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics. 1950. P. 325–329.
9. Burton W. S., Sinclair G. B. On the Singularities in Reissner's Theory for the Bending of Elastic Plates // Journal of Applied Mechanics. 1986. Vol. 53, № 1. P. 220–222.
10. Геворкян Г. В., Задоян М. А., Саакян Г. Р., Саркисян С. М. Экспериментальные исследования прочности составных плит при изгибе // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 4. С. 211–215.
11. Задоян М. А. О прочности соединения составной плиты // Известия Национальной академии наук Республики Армения и ГИУА. Серия ТН. 2000. Т. 53, № 1. С. 8–11.
12. Акопян А. Г. О прочности соединения составной анизотропной пластины, жестко защемленной по внешним краям // Вестник Донского государственного технического университета. 2019. Т. 19, № 4. С. 304–309. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-4-304-309>
13. Акопян А. Г. Малонапряженное состояние свободно опертых анизотропных составных плит // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 4. С. 119–125. <https://doi.org/10.15372/PMTF20190413>
14. Недорезов П. Ф. Численное исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба тонкой анизотропной пластинки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 143–148. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-143-148>



15. Недорезов П. Ф., Аристамбекова А. В. Статический изгиб и колебания многослойной прямоугольной пластинки из ортотропного материала при свободном опирании краев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. 2011. Вып. 1 (22). С. 244–254. <https://doi.org/10.14498/vsgtu926>
16. Калоеров С. А., Занько А. И. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 4. С. 456–464. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464>
17. Vijayakumar K. A relook at Reissner's theory of plates in bending // Archive of Applied Mechanics. 2011. Vol. 81, iss. 11. P. 1717–1724. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0513-4>
18. Vijayakumar K. Modified Kirchhoff's theory of plates including transverse shear deformations // Mechanics Research Communications. 2011. Vol. 38, iss. 3. P. 211–213. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.02.007>
19. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. Москва : Наука, 1982. 568 с.
20. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Москва : Наука, 1967. 360 с.

References

1. Chobanyan K. S. *Napriazheniia v sostavnykh uprugikh telakh* [Stresses in Compound Elastic Bodies]. Yerevan, Izd-vo AN Armianskoi SSR, 1987. 338 p. (in Russian).
2. Zadoyan M. A. Low-stress conditions in composite plates. *Doklady Akademii Nauk*, 1993, vol. 332, no. 3, pp. 319–321 (in Russian).
3. Akopyan A. G. Low-stress state in an inhomogeneous compound wedge with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1994, vol. 35, pp. 459–466. <https://doi.org/10.1007/BF02369888>
4. Hakobyan A. G. On the plane deformation of a low-stress level nonhomogeneous-compound wedge. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 1994, vol. 47, iss. 5–6, pp. 42–48 (in Russian).
5. Akopyan A. G., Zadoyan M. A. Low tension inhomogeneous composite wedges. *Izvestia: Mechanics of Solids*, 1992, no. 5, pp. 88–96 (in Russian).
6. Lehnitsky S. G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic Plates]. Moscow, Gostekhizdat, 1957. 463 p. (in Russian).
7. Chyanbin Hwu. *Anisotropic Elastic Plates*. Springer Science & Business Media, 2010. 673 p.
8. Williams M. L. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. *Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics*, 1950, pp. 325–329.
9. Burton W. S., Sinclair G. B. On the singularities in Reissner's Theory for the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, vol. 53, no. 1, pp. 220–222.
10. Gevorkyan G. V., Zadoyan M. A., Saakyan G. R., Sarkisyan S. M. Experimental study of the strength of composite plates in bending. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, iss. 4, pp. 763–767. <https://doi.org/10.1007/BF02466879>
11. Zadoyan M. A. On the bond strength of a composite plate. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia and GIUA, Technical Sciences*, 2000, vol. 53, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).
12. Akopyan A. G. On joint efficiency of composite anisotropic plate rigidly fixed along outside edges. *Vestnik of Don State Technical University*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 304–309. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-4-304-309>
13. Akopyan A. G. Low-stress state of simply-supported anisotropic composite plates. *Jour-*



- nal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, vol. 60, iss. 4, pp. 692–697. <https://doi.org/10.1134/S0021894419040138>
14. Nedorezov P. F. Numerical study of stress-strain state of a thin anisotropic rectangular plate. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 2, pp. 143–148 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-143-148>
 15. Nedorezov P. F., Arystanbekova A. V. Static bending and vibrations of multilayer orthotropic rectangular plate with simply supported edges. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2011, iss. 1 (22), pp. 244–254 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu926>
 16. Kaloerov S. A., Zanko A. I. Bending of multiconnected anisotropic plates with the curvilinear holes. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 4, pp. 456–464 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464>
 17. Vijayakumar K. A relook at Reissner's theory of plates in bending. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, vol. 81, iss. 11, pp. 1717–1724. <https://doi.org/10.1007/s00419-011-0513-4>
 18. Vijayakumar K. Modified Kirchhoff's theory of plates including transverse shear deformations. *Mechanics Research Communications*, 2011, vol. 38, iss. 3, pp. 211–213. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.02.007>
 19. Donnell L. G. *Balki, plastiny i obolochki* [Beams, Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1982. 568 p. (in Russian).
 20. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967. 360 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 07.06.2019

Принята к публикации / Accepted 04.07.2020

Опубликована / Published 01.03.2021