



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59

Научная статья

УДК 539.3

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей

Е. Ю. Крылова^{1✉}, И. В. Папкина², О. А. Салтыкова², В. А. Крысько²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Саратовский технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Крылова Екатерина Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, kaf.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>

Папкина Ирина Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования, ikravzova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>

Салтыкова Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования, olga_a_saltykova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3880-6662>

Крысько Вадим Анатольевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и моделирования, tak@sun.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Аннотация. В работе построена математическая модель сложных колебаний гибкой микрополярной цилиндрической панели сетчатой структуры. Уравнения записаны в перемещениях. Геометрическая нелинейность учитывается по модели Теодора фон Кармана. Рассматривается неклассическая континуальная модель панели на основе среды Коссера со стесненным вращением частиц (псевдоконтинуум). При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. В рассмотрение вводится дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиентом вращения. Уравнения движения элемента панели, граничные и начальные условия получены из вариационного принципа Остроградского – Гамильтона на основании кинематических гипотез Кирхгофа – Лява. Предполагается, что цилиндрическая панель состоит из n семейств ребер одного материала, каждое из которых характеризуется углом наклона относительно положительного направления оси, направленной по длине панели, и расстоянием между соседними ребрами. Материал изотропный, упругий и подчиняется закону Гука. Для гомогенизации системы ребер по поверхности панели применяется континуальная модель Г. И. Пшеничного. Рассматривается диссипативная механическая система. Дифференциальная задача в частных производных сводится к обыкновенной дифференциальной задаче по пространственным координатам методом Бубнова – Галеркина в высших приближениях. Задача Коши решается методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности. Используя метод установления, в качестве примера проведено исследование влияния геометрии сетки и учета микрополярной теории на поведение сетчатой панели, состоящей из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер.



Ключевые слова: цилиндрическая панель, микрополярная теория, сетчатая структура, модель Кирхгофа – Лява, метод Бубнова – Галеркина, метод установления, континуальная модель Г. И. Пшеничнова

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00351а).

Для цитирования: Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Крысько В. А. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 48–59. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels

E. Yu. Krylova^{1✉}, I. V. Papkova², O. A. Saltykova², V. A. Krysko²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

Ekaterina Yu. Krylova, kat.krylova@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7593-0320>

Irina V. Papkova, ikravzova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4062-1437>

Olga A. Saltykova, olga_a_saltykova@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3880-6662>

Vadim A. Krysko, tak@sun.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Abstract. In this paper, a mathematical model of complex oscillations of a flexible micropolar cylindrical mesh structure is constructed. Equations are written in displacements. Geometric nonlinearity is taken into account according to the Theodore von Karman model. A non-classical continual model of a panel based on a Cosserat medium with constrained particle rotation (pseudocontinuum) is considered. It is assumed that the fields of displacements and rotations are not independent. An additional independent material parameter of length associated with a symmetric tensor by a rotation gradient is introduced into consideration. The equations of motion of a panel element, the boundary and initial conditions are obtained from the Ostrogradsky – Hamilton variational principle based on the Kirchhoff – Love’s kinematic hypotheses. It is assumed that the cylindrical panel consists of n families of edges of the same material, each of which is characterized by an inclination angle relative to the positive direction of the axis directed along the length of the panel and the distance between adjacent edges. The material is isotropic, elastic and obeys Hooke’s law. To homogenize the rib system over the panel surface, the G. I. Pshenichnov continuous model is used. The dissipative mechanical system is considered. The differential problem in partial derivatives is reduced to an ordinary differential problem with respect to spatial coordinates by the Bubnov – Galerkin method in higher approximations. The Cauchy problem is solved by the Runge – Kutta method of the 4th order of accuracy. Using the establishment method, a study of grid geometry influence and taking account of micropolar theory on the behavior of a grid plate consisting of two families of mutually perpendicular edges was conducted.

Keywords: cylindrical panel, micropolar theory, mesh structure, Kirchhoff – Love model, Bubnov – Galerkin method, establishment method, G. I. Pshenichnov continuous model

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-00351A).



For citation: Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Krysko V. A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 48–59 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Пластины, панели, оболочки являются элементами инженерных конструкций во всех областях жизнедеятельности человека. Поэтому интерес к математическому моделированию влияния различных факторов на сложные колебания указанных механических объектов не ослабевает [1–4]. Быстрое развитие микроэлектро-механических технологий в приборостроении, робототехнике, медицине и других передовых отраслях привело к широкому использованию в качестве элементов конструкций микро- и наноразмерных панелей и оболочек. Этот факт обуславливает необходимость создания надежных математических моделей для анализа их динамического поведения и НДС. Классическая механика твердого тела не в состоянии учитывать масштабные эффекты. Поэтому при построении математических моделей микро- и наноразмерных механических объектов необходимо опираться на теории, позволяющие моделировать размерно-зависимое поведение, одно из ведущих мест среди которых занимает микрополярная (моментная, несимметричная) теория [5–10]. В работах [11–15] построены общие прикладные теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Для численного анализа в большинстве публикаций по данной тематике используются линейные модели [16–19]. Однако существуют экспериментальные данные, подтверждающие необходимость учета нелинейности при моделировании поведения рассматриваемых объектов [20]. Микро- и наноразмерные сетчатые панели и оболочки широко используются в электромеханических системах, в медицине для изготовления биологически совместимых имплантов, венозных шунтов. Исследований, посвященных анализу НДС и динамики сетчатых конструкций с учетом их размерно-зависимого поведения, очень мало [19, 21, 22]. В настоящей работе построена математическая модель сложных колебаний гибкой микрополярной сетчатой цилиндрической панели, состоящей из двух взаимно перпендикулярных систем ребер, находящейся под действием нормальной распределенной нагрузки. На основании полученной математической модели методом установления проведен анализ влияния геометрии сетки на поведение цилиндрической панели. Материал панели — псевдоконтинуум Коссера со стесненным движением частиц [23]. Сетчатая структура учитывается по феноменологической континуальной модели Г. И. Пшеничнова [24].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является цилиндрическая панель, занимающая в пространстве \mathbf{R}^3 область $\Omega = \{0 \leq x \leq c; 0 \leq y \leq b; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$. Панель состоит из n семейств густо расположенных ребер одного материала, что позволяет использовать континуальную модель. С учетом гипотез Кирхгофа – Лява и геометрической нелинейности в форме Т. фон Кармана компоненты тензора деформаций запишутся



в виде:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - k_y w - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v — осевые смещения срединной поверхности панели в направлениях x, y соответственно, w — прогиб, k_y — геометрический параметр кривизны панели.

В работе рассматривается неклассическая континуальная модель на основе среды Коссера, где наряду с обычным полем напряжений учитываются также и моментные напряжения. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми [23]. В таком случае компоненты симметричного тензора изгиба-кручения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{xz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для материала панели определяющие соотношения примем в виде [25]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], \quad x \leftrightarrow y, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} e_{xy}, \quad m_{ij} = \frac{El^2}{1+\nu} \chi_{ij}, \quad i, j = x, y, z,$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, m_{ij} — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона для однородного материала, l — дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с тензором изгиба-кручения χ .

Уравнения движения в смешанной форме элемента гладкой панели, эквивалентной сетчатой, граничные и начальные условия получены из энергетического принципа Гамильтона – Остроградского [26, 27]. Напряжения, возникающие в эквивалентной гладкой панели, связанные с напряжениями в ребрах, составляющих углы φ_j с осью абсцисс, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{yy} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xx} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yy} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{xy} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \\ m_{xz} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \cos \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yz} = \sum_{j=1}^n \frac{m_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \end{aligned} \quad (3)$$

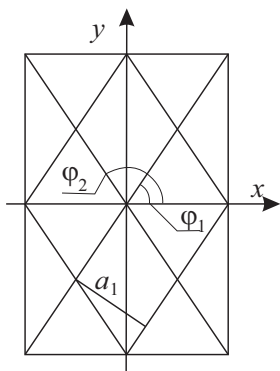
где n — количество семейств ребер, δ_j, a_j, φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью x и осью ребер j -го семейства. Напряжения с индексом j относятся к ребрам.



Физические соотношения для сетчатой панели определяются на основании метода множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \{\sigma^j, m^j\} &= \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \varphi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \varphi_j + \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \varphi_j \sin \varphi_j, \\ \{\sigma_z^j, m_z^j\} &= \{\sigma_{zx}, m_{zx}\} \cos \varphi_j + \{\sigma_{zy}, m_{zy}\} \sin \varphi_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим, что деформация оси какого-либо ребра равна деформации линии, совпадающей с осью этого ребра в расчетной модели. Будем считать, что одна из главных центральных осей поперечных сечений ребер панели совпадает с направлением нормали к срединной поверхности панели. Подставляя (3) и (4) в выражения для моментов и усилий, записанные для гладкой панели, получим выражения моментов и усилий панели с учетом сетчатой структуры. Подставляя (3) и (4) в выражения для моментов и усилий, записанные для гладкой панели, найдем выражения моментов и усилий панели с учетом сетчатой структуры. Тогда из уравнений движения гладкой панели, выведенных из вариационного принципа, получим уравнения движения микрополярной панели сетчатой структуры в смешанной форме [28]. В дальнейшем будем рассматривать панель с двумя семействами ребер $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $a_1 = a_2 = a$ (рис. 1).



С учетом безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} u &= \frac{h^2}{c} \bar{u}, & v &= \frac{h^2}{b} \bar{v}, & x &= c\bar{x}, & y &= b\bar{y}, \\ w &= h\bar{w}, & \delta &= h\bar{\delta}, & a &= h\bar{a}, & l &= h\bar{l}, \\ k_y &= \frac{h}{b^2} \bar{k}_y, & q &= \frac{Eh^4}{c^2 b^2} \bar{q}, \\ t &= b\sqrt{\frac{\rho}{E}} \bar{t}, & \varepsilon &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \bar{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5)$$

Рис. 1. Геометрия сетки
Fig. 1. The grid geometry

где ε — коэффициент диссипации среды, ρ — плотность материала панели, $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ — внешняя нормальная нагрузка, q_0 и ω_p — ее интенсивность и частота, t —

время. Уравнения движения элемента рассматриваемой микрополярной сетчатой цилиндрической панели примут вид (черта над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{aligned} l^2(\nu - 1) &\left[\frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} \right] + 2(\nu - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\ &- 2(3 + \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 4(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} \frac{\partial w}{\partial x} + 4(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ &- 8 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 4(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2 - 1)}{\delta} \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} l^2(\nu - 1) &\left[\frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^2}{b^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right] - k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \frac{\partial w}{\partial y} - \\ &- 4(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2(3 + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ &- 8 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4(\nu - 1) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{8a(\nu^2 - 1)}{\delta} \frac{h^2}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{c^2}{bh} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4[1 + l^2(\nu - 1)] \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + [(1 + \nu) + 6l^2(1 - \nu)] \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\
 & + 12k_y^2(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} w + 12k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \frac{\partial v}{\partial y} + 12k_y(1 + \nu) \frac{b^2}{h^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 6k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \\
 & - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 12k_y(1 + \nu) \frac{c^2}{bh} w \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\
 & - 18(1 + \nu) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 12(1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 12(\nu - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} - 6k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\
 & + 6(-5 + 3\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 24 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 24 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 24(\nu - 1) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & + 24(\nu - 1) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 24(3\nu - 5) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 12(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\
 & + 12(\nu - 1) \frac{b}{c} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 12k_y(1 + \nu) \frac{b}{h} w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 12(1 + \nu) \frac{c^2}{b^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 & + 6(3\nu - 5) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 12(1 + \nu) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 18(1 + \nu) \frac{b^2}{c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\
 & = \frac{24a(\nu^2 - 1)}{\delta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q \right). \tag{8}
 \end{aligned}$$

К уравнениям (6)–(8) следует присоединить начальные и граничные условия в зависимости от условий закрепления и загрузки панели.

В данной модели жесткость ребер на изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности панели, не учитывается, поэтому порядки систем дифференциальных уравнений, описывающих поведение сетчатых и сплошных панелей, совпадают. При этом совпадают и формулировки граничных условий соответствующих краевых задач [24].

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Статические задачи в теории пластин и оболочек традиционно решались с применением различных приближенных методов, которые позволяют свести систему уравнений в частных производных к системе нелинейных алгебраических уравнений. В данной работе решение статических задач будет представлено с помощью метода установления, впервые примененного для оболочек В. И. Феодосьевым [29]. В рассматриваемом методе решение системы уравнений в частных производных сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобный подход имеет некоторые преимущества. Метод установления обладает высокой точностью, так как его можно отнести к итерационным методам, здесь каждый шаг по времени является новым приближением к точному решению задачи. Кроме того, метод установления не имеет большой чувствительности к выбору начального приближения. Простота получения неединственных решений статических задач также является серьезным плюсом метода. Решая задачу Коши при $\varepsilon = \varepsilon_{кр}$ для ряда значений параметра нормальной постоянной во времени нагрузки q_i , получаем последовательность прогибов w_i для центральной точки панели. На основе этих данных строится зависимость $w(q)$ и исследуется напряженно-деформированное состояние системы. Здесь стоит отметить, что необходимо уделять



серьезное внимание выбору $\varepsilon_{кр}$, так как в некоторых случаях при отсутствии учета рассеяния энергии значение критической динамической нагрузки может равняться приблизительно половине значения статической критической нагрузки [30]. Следуя вышеописанному методу, исследуем поведение сетчатой микрополярной цилиндрической панели, жестко заземленной по торцам с параметрами сетки $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $a_1 = a_2 = a$. Начальные условия выбраны нулевыми. Математическая модель колебаний рассматриваемой системы представляет собой дифференциальную задачу в частных производных, для сведения которой к обыкновенной дифференциальной задаче используем метод Бубнова – Галеркина в высших приближениях. Для удовлетворения граничным условиям жесткой заделки компоненты перемещений возьмем в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{mn} U_{mn}(t) \sin^2\left(\frac{2m\pi x}{c}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \\
 v(x, y, t) &= \sum_{mn} V_{mn}(t) \cos^2\left(\frac{(2m-1)\pi x}{2c}\right) \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\right), \\
 w(x, y, t) &= \sum_{mn} W_{mn}(t) \sin^2\left(\frac{m\pi x}{c}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Задача Коши решается методом Рунге – Кутта 4-го порядка точности.

На рис. 2 приведена диаграмма зависимости прогиб-время для рассматриваемой задачи при $l = 0$, $k_y = 0$, $c = b = 1$, $h = 0.02$, $\delta = a = 0.02$, $q_0 = 550$.

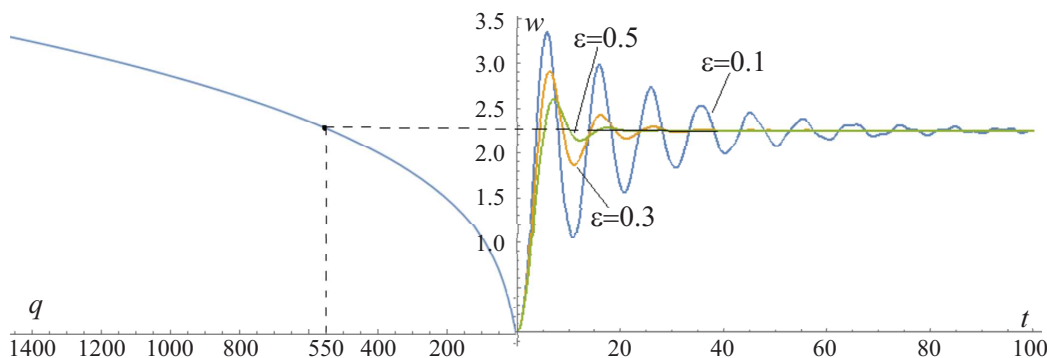


Рис. 2. Выбор коэффициента диссипации среды
 Fig. 2. The choice of the medium dissipation coefficient

В результате численного эксперимента выяснилось, что при коэффициенте диссипации $\varepsilon < 0.5$ не происходит установления колебаний довольно длительное время ($t > 40$), соответственно, количество итераций, необходимых для получения решения с абсолютной погрешностью $\bar{\varepsilon} = |w(t_i) - w(t_{i-1})| \leq 10^{-5}$, будет значительным. Для рассматриваемой задачи оптимальным является значение коэффициента диссипации $\varepsilon_{кр} = 0.5$.

На рис. 3 приведены диаграммы прогиб-нагрузка в зависимости от параметра кривизны панели k_y и дополнительного параметра длины l , связанного с учетом моментных напряжений, расстояния между ребрами семейств сетки a . Параметры эксперимента: $c = b = 1$, $h = 0.02$, $\delta = 0.02$, $\varepsilon = 0.5$, $q_0 \in [0; 1700]$, $t \in [0; 50]$.

На рис. 3, а приведены зависимости нагрузка-прогиб для сетчатой пластины $k_y = 0$ с расстоянием между ребрами $a = 0.02$. Данные на рис. 3, а показывают,



что увеличение дополнительного параметра l ($l = 0; 0.3; 1$) приводит к росту жесткости на изгиб и, как следствие, к уменьшению прогиба при одинаковых значениях нормальной нагрузки.

На рис. 3, б приведены графики нагрузка-прогиб для различных значений коэффициента кривизны сетчатой ($a = 0.02$) микрополярной ($l = 0.3$) панели $k_y = 0; 16; 24$. Графики качественно согласуются с аналогичными для гладких пластин. При $k_y = 16$ на графике наблюдается точка перегиба, при $k_y = 24$ — явление хлопка.

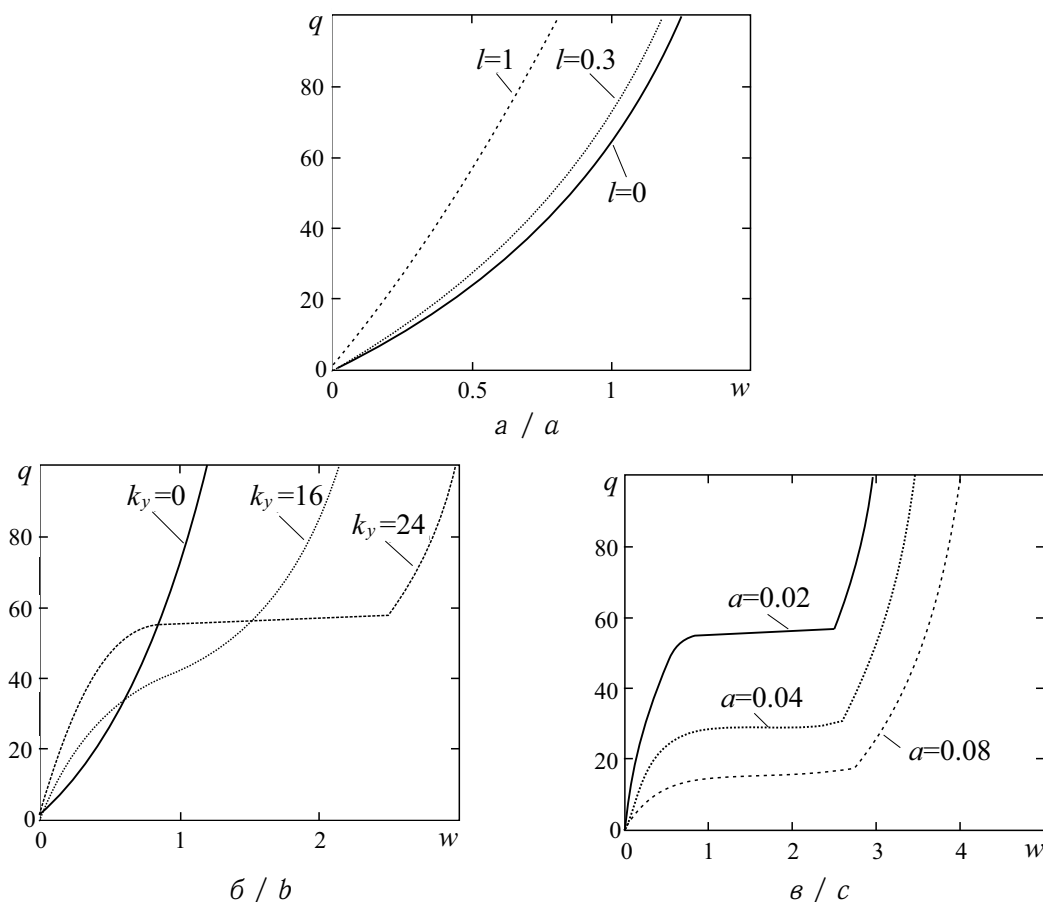


Рис. 3. График $w(q)$ в зависимости от: a — дополнительного параметра длины l ; b — параметра кривизны панели k_y ; c — расстояния между ребрами семейств сетки a

Fig. 3. The graph of $w(q)$ versus: a — additional length parameter l ; b — panel curvature parameter k_y ; c — distance between edges of a families

Графики $w(q)$, построенные для микрополярной панели с параметром кривизны $k_y = 24$ и значением дополнительного параметра длины $l = 0.3$ в зависимости от расстояния между ребрами ($a = 0.02; 0.04; 0.08$), приведены на рис. 3, в. Видно, что увеличение расстояния между ребрами решетки приводит к уменьшению жесткости панели на изгиб.

ВЫВОДЫ

На основании теории Г. И. Пшеничнова в работе построена математическая модель нелинейных колебаний сетчатых микрополярных цилиндрических панелей. Методом Феодосьева проведен анализ влияния разреженности сетки, значения дополнительного параметра длины, параметра кривизны на поведение цилиндрической



панели, состоящей из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер. Показано, что поведение сетчатой панели качественно совпадает с поведением гладкой панели. Учет теории микрополя приводит к увеличению жесткости панели, увеличение расстояния между ребрами решетки влечет уменьшение изгибной жесткости панели.

Список литературы

1. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 442–451. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки. 2018. Т. 22, № 4. С. 750–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57, № 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Krysko V. A., Papkova I. V., Awrejcewicz J., Krylova E. Y., Krysko A. V. Non-symmetric forms of non-linear vibrations of flexible cylindrical panels and plates under longitudinal load and additive white noise // Journal of Sound and Vibration. 2018. Vol. 423. P. 212–229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.065>
5. Еремеев В. И., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. Москва : Наука, 2008. 280 с.
6. Rubin M. B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points. Dordrecht : Kluwer, 2000. 488 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>
7. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: Existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2007. Vol. 17, № 3. P. 363–392. <https://doi.org/10.1142/S0218202507001954>
8. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells // International Journal of Engineering Science. 2007. Vol. 45, iss. 2–8. P. 187–198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.03.003>
9. Wang F. Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of other approximate equations // International Journal of Engineering Science. 1990. Vol. 28, iss. 9. P. 919–925. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90041-G](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90041-G)
10. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2009. Vol. 89, iss. 4. P. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
11. Саркисян С. О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады Национальной академии наук Армении. 2011. Т. 111, № 2. С. 121–128.
12. Саркисян С. О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 2011. Т. 64, № 1. С. 58–67.
13. Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14, вып. 1. С. 55–66.
14. Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады Академии наук. 2011. Т. 436, № 2. С. 195–198.



15. Саркисян С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2010. № 1. С. 99–111.
16. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid based on modified couple stress theory // Micro and Nano Letters. 2012. Vol. 7, iss. 7. P. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
17. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2017. Vol. 26, iss. 1–2. P. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
18. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory // Composites Part B : Engineering. 2013. Vol. 51. P. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
19. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Krysko-yang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates // Journal of Physics : Conference Series. 2019. Vol. 1210. P. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>
20. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route // Applied Physics Letters. 2002. Vol. 81. P. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
21. Еремеев В. А. Об одной нелинейной модели сетчатой оболочки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 4. С. 127–133. <https://doi.org/10.31857/S057232990000704-4>
22. Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Яковлева Т. В., Крысько В. А. Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 3. С. 305–316. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
23. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. Москва : Издательство Московского университета, 1999. 328 с.
24. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластин. Москва : Наука, 1982. 352 с.
25. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39, iss. 10. P. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
26. Остроградский М. Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. 1850. Vol. 8, no. 3. P. 33–48.
27. Professor Hamilton on the Application to Dynamics of a General Mathematical Method previously applied to Optics // Report of the British Association for the Advancement of Science. 4th meeting (1834). London : John Murray, Albemarle Street, 1835. P. 513–518.
28. Крылова Е. Ю., Папкина И. В., Салтыкова О. А., Синичкина А. О., Крысько В. А. Математическая модель колебаний размерно-зависимых цилиндрических оболочек сетчатой структуры с учетом гипотез Кирхгофа – Лява // Нелинейный мир. 2018. Т. 16, № 4. С. 17–28. <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
29. Феодосьев В. И. Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1966. С. 971–976.



30. Крысько В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов : Издательство Саратовского университета, 1976. 216 с.

References

1. Belostochny G. N., Myltcina O. A. The geometrical irregular plates under the influence of the quick changed on the time coordinate forces and temperature effects. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss 4, pp. 442–451 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451>
2. Belostochnyi G. N., Myltcina O. A. Dynamic stability of heated geometrically irregular cylindrical shell in supersonic gas flow. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Ser. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 750–761 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1653>
3. Krylova E. Y., Papkova I. V., Erofeev N. P., Zakharov V. M., Krysko V. A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>
4. Krysko V. A., Papkova I. V., Awrejcewicz J., Krylova E. Y., Krysko A. V. Non-symmetric forms of non-linear vibrations of flexible cylindrical panels and plates under longitudinal load and additive white noise. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, vol. 423, pp. 212–229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.065>
5. Eremeev V. I., Zubov L. M. *Mekhanika uprugikh obolochek* [Mechanics of Elastic Shells]. Moscow, Nauka, 2008. 280 p. (in Russian).
6. Rubin M. B. *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*. Dordrecht, Kluwer, 2000. 488 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>
7. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: Existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2007, vol. 17, no. 3, pp. 363–392. <https://doi.org/10.1142/S0218202507001954>
8. Birsan M. On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 2007, vol. 45, iss. 2–8, pp. 187–198. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.03.003>
9. Wang F. Y. On the solutions of Eringen's micropolar plate equations and of other approximate equations. *International Journal of Engineering Science*, 1990, vol. 28, iss. 9, pp. 919–925. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90041-G](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90041-G)
10. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2009, vol. 89, iss. 4, pp. 242–256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
11. Sargsyan S. H. Mathematical models of micropolar thin elastic bars. *Reports of NAS RA*, 2011, vol. 111, no. 2, pp. 121–128 (in Russian).
12. Sargsyan S. H. General mathematical models of micropolar thin elastic plates. *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia: Mechanics*, 2011, vol. 64, no. 1, pp. 58–67 (in Russian).
13. Sargsyan S. H. General theory of micropolar elastic thin shells. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2011, vol. 14, iss. 1, pp. 55–66 (in Russian).
14. Sargsyan S. H. The general dynamic theory of micropolar elastic thin shells. *Doklady Physics*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 39–42. <https://doi.org/10.1134/S102833581090115X>
15. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar elastic thin shells with independent fields of displacements and rotations. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, no. 1, pp. 99–111 (in Russian).
16. Zhou X., Wang L. Vibration and stability of micro-scale cylindrical shells conveying fluid



- based on modified couple stress theory. *Micro and Nano Letters*, 2012, vol. 7, iss. 7, pp. 679–684. <https://doi.org/10.1049/mnl.2012.0184>
17. Safarpour H., Mohammadi K., Ghadiri M. Temperature-dependent vibration analysis of a FG viscoelastic cylindrical microshell under various thermal distribution via modified length scale parameter: A numerical solution. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2017. vol. 26, iss. 1–2, pp. 9–24. <https://doi.org/10.1515/jmbm-2017-0010>
 18. Sahmani S., Ansari R., Gholami R., Darvizeh A. Dynamic stability analysis of functionally graded higher-order shear deformable microshells based on the modified couple stress elasticity theory. *Composites Part B: Engineering*, 2013, vol. 51, pp. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.02.037>
 19. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Sinichkina A. O., Yakovleva T. B., Kryskoyang V. A. Mathematical model of flexible dimension-dependent mesh plates. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1210, pp. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012073>
 20. Scheible D. V., Erbe A., Blick R. H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle–Takens route. *Applied Physics Letters*, 2002, vol. 81, pp. 1884–1886. <https://doi.org/10.1063/1.1506790>
 21. Eremeev V. A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 464–469. <https://doi.org/10.3103/S002565441804012X>
 22. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Yakovleva T. V., Krysko V. A. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2019, vol. 19, iss. 3, pp. 305–316 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
 23. Erofeev V. I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoi* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow, Moscow University Press, 1999. 328 p. (in Russian).
 24. Pshenichnov G. I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastin* [The Theory of Thin Elastic Mesh Shells and Plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p. (in Russian).
 25. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, iss. 10, pp. 2731–2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
 26. Ostrogradsky M. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg*, 1850, vol. 8, no. 3, pp. 33–48 (in Russian).
 27. Professor Hamilton on the Application to Dynamics of a General Mathematical Method previously applied to Optics. *Report of the British Association for the Advancement of Science*. 4th meeting (1834). London, John Murray, Albemarle Street, 1835, pp. 513–518.
 28. Krylova E. Yu., Papkova I. V., Saltykova O. A., Sinichkina A. O., Krysko V. A. Mathematical model of vibrations of the cylindrical shells, which are dimensionally dependent with the net structure, taking into account the Kirchhoff–Love hypotheses. *Nelineinyi mir* [Nonlinear World], 2018, vol. 16, no. 4, pp. 17–28 (in Russian). <https://doi.org/10.18127/j20700970-201804-03>
 29. Feodosiev V. I. Geometrically nonlinear problems in the theory of plates and shells. *Proceedings of the Sixth All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates*. Moscow, Nauka, 1966, pp. 971–976 (in Russian).
 30. Krysko V. A. *Nelineinaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Nonlinear Statics and Dynamics of Inhomogeneous Shells]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1976. 216 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 09.09.2019

Принята к публикации / Accepted 13.12.2019

Опубликована / Published 01.03.2021