



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75
Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75

Научная статья

УДК 539.374

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле

Э. И. Старовойтов[✉], Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, 246653, г. Гомель, ул. Кирова, д. 34

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой строительной механики, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>

Леоненко Денис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры строительной механики, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>

Аннотация. Рассмотрено осесимметричное деформирование трехслойной круговой пластины при повторном знакопеременном нагружении из пластической области локальной нагрузкой. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. В тонких упругопластических несущих слоях используются гипотезы Кирхгофа. Нелинейно упругий относительно толстый наполнитель несжимаем по толщине. Для него принимается гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Учтено воздействие теплового потока. Температурное поле в пластине рассчитывалось по формуле, полученной с помощью усреднения теплофизических параметров по толщине пакета. Система дифференциальных уравнений равновесия при нагружении пластины из естественного состояния получена вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение соответствующей краевой задачи сведено к нахождению трех искоемых функций: прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной поверхности наполнителя. Для этих функций выписана неоднородная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ее аналитическое итерационное решение получено в функциях Бесселя методом упругих решений Ильюшина. При повторном знакопеременном нагружении пластины решение краевой задачи строится с помощью теории переменного нагружения Москвитина. В этом случае используется гипотеза о подобии функций пластичности на каждом шаге нагружения. Их аналитический вид принимается не зависящим от точки разгрузки. Однако входящие в аппроксимационные формулы материальные константы будут другие. Учитывается циклическое упрочнение материала несущих слоев. Проведен параметрический анализ полученных решений при различных граничных условиях в случае локальной нагрузки, распределенной по кругу. Численно исследовано влияние температуры и нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, пластичность, повторное знакопеременное локальное нагружение, температурное поле, численный анализ НДС



Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Т20Р-047).

Для цитирования: Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Повторное знакопеременное нагружение упругопластической трехслойной пластины в температурном поле // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 60–75. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

Repeated alternating loading of a elastoplastic three-layer plate in a temperature field

E. I. Starovoitov[✉], D. V. Leonenko

Belarusian State University of Transport, 34 Kirova St., Gomel 246653, Belarus

Eduard I. Starovoitov, edstar0@yandex.by, <https://orcid.org/0000-0002-2550-5377>

Denis V. Leonenko, leoden@tut.by, <https://orcid.org/0000-0001-8003-9279>

Abstract. Axisymmetric deformation of a three-layer circular plate under repeated alternating loading from the plastic region by a local load is considered. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack is adopted the hypothesis of a broken line. In a thin elastic-plastic load-bearing layers are used the hypothesis of Kirchhoff. A non-linearly elastic relatively thick filler is incompressible in thickness. It is taken to be a hypothesis of Tymoshenko regarding the straightness and the incompressibility of the deformed normals with linear approximation of the displacements through the thickness layer. The work of the filler in the tangential direction is taken into account. The physical relations of stress-strain relations correspond to the theory of small elastic-plastic deformations. The effect of heat flow is taken into account. The temperature field in the plate was calculated by the formula obtained by averaging the thermophysical parameters over the thickness of the package. The system of differential equations of equilibrium under loading of the plate from the natural state is obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the corresponding boundary value problem is reduced to finding the three desired functions: deflection, shear and radial displacement of the shear surface of the filler. A non-uniform system of ordinary nonlinear differential equations is written for these functions. Its analytical iterative solution is obtained in Bessel functions by the method of elastic solutions of Ilyushin. In case of repeated alternating loading of the plate, the solution of the boundary value problem is constructed using the theory of variable loading of Moskvitin. In this case, the hypothesis of similarity of plasticity functions at each loading step is used. Their analytical form is taken independent of the point of unloading. However, the material constants included in the approximation formulas will be different. The cyclic hardening of the material of the bearing layers is taken into account. The parametric analysis of the obtained solutions under different boundary conditions in the case of a local load distributed in a circle is carried out. The influence of temperature and nonlinearity of layer materials on the displacements in the plate is numerically investigated.

Keywords: three-layer circular plate, plasticity, repeated alternating local loading, temperature field, numerical analysis SSS



Acknowledgements: This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (projects No. T20R-047).

For citation: Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Repeated alternating loading of a elasto-plastic three-layer plate in a temperature field. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 60–75 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-60-75>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

ВВЕДЕНИЕ

Композитные, в том числе трехслойные элементы конструкций нашли широкое применение в ракетно- и авиастроении, транспортном машиностроении, строительстве. В связи с этим возникает необходимость создания соответствующих расчетных механико-математических моделей, учитывающих физическую нелинейность материалов слоев и воздействие внешней среды.

В работах [1–13] содержатся различные математические модели динамического деформирования многослойных и трехслойных стержней, пластин и оболочек, приведены постановки начально-краевых задач, изложены методы решения. Рассмотрены свободные, вынужденные и резонансные колебания трехслойных композитных пластин; изучено прохождение волн в слоях и нестационарные взаимодействия в контактных задачах с подвижными границами. Термосиловое деформирование тонкостенных элементов конструкций рассмотрено в статьях [14, 15], где разработаны модели геометрически нерегулярных пластин и оболочек с термочувствительной толщиной. Публикации [16–20] посвящены изучению изотермического квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин, в том числе при локальных и переменных нагрузках. Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле исследован в статье [21]. Упругие и упругопластические пластины со сжимаемым наполнителем, а также взаимодействующие с упругим основанием изучались в работах [22–24].

Здесь получено аналитическое решение задачи о деформировании трехслойной круговой пластины с упругопластическими несущими слоями при повторном осесимметричном знакопеременном локальном нагружении. Учтено воздействие температурного поля. Решение получено в рамках теории переменного нагружения Москвитина [25]. Численная апробация проведена в случае металлополимерного пакета при равномерно распределенной круговой нагрузке.

1. НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина под действием локальной осесимметричной нагрузки (рис. 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость наполнителя принята за координатную, ось z направлена ей перпендикулярно вверх, к слою 1.

В тонких упругопластических несущих слоях толщиной $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине ($h_3 = 2c$) нелинейно упругом относительно толстом наполнителе выполняется гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя.

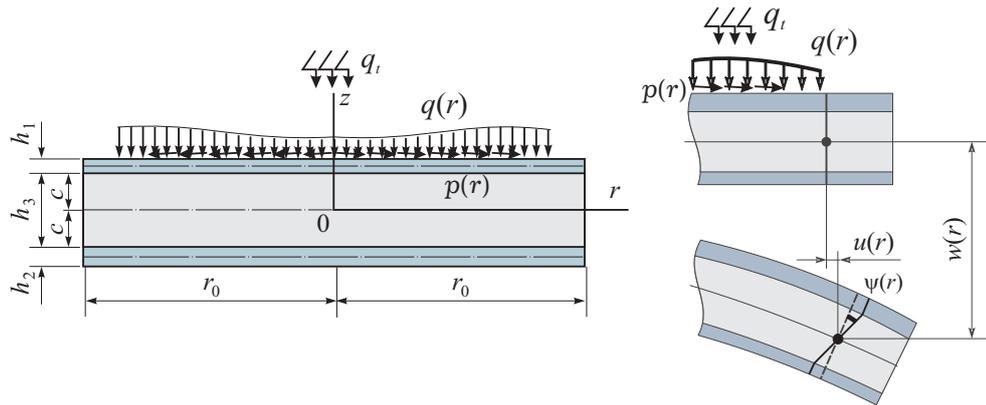


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины
Fig. 1. Design scheme of a three-layer plate

К наружной поверхности первого слоя ($z = c + h_1$) подводится тепловой поток q_t . Температурное поле $T(z)$ в пластине определяется формулой, полученной ранее [21], поэтому в дальнейшем считается известным. Осесимметричная поверхностная локальная нагрузка имеет вертикальную и горизонтальную составляющие, интенсивности которых $q(r)$, $p(r)$. Тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), а прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ и радиальное перемещение координатной поверхности $u(r)$ не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти три функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования следуют выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$, введем обобщенные внутренние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), & Q &= \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации в слоях пластины следуют из соотношений Коши и перемещений (1). Для связи напряжений и деформаций используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [26]:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T))e_\alpha^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}, T))e_{rz}^{(3)} & (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$



где $s_\alpha^{(k)}, e_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T), K_k(T)$ — температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$ — функции пластичности материалов несущих слоев, причем при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$ следует положить $\omega_k \equiv 0$; $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция физической нелинейности заполнителя, ($\omega_3 \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$), $\varepsilon_s^{(3)}$ — предел нелинейности; $s_{rz}^{(3)}, e_{rz}^{(3)}$ — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций.

В компонентах тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{rz}^{(3)}$, используя соотношения (3), выделим линейную и нелинейную составляющие:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, & \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \\ \sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k e_\alpha^{(k)} + 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T), & \sigma_{\alpha\omega}^{(k)} &= 2G_k \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T) e_\alpha^{(k)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 e_{rz}^{(3)}, & \sigma_{rz\omega}^{(3)} &= 2G_3 \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T) e_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщенные внутренние усилия и моменты также представим в виде разности линейной и нелинейной частей:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{\alpha e} - T_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k)}, & M_\alpha &= M_{\alpha e} - M_{\alpha\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), & H_{\alpha\omega} &= M_{\alpha\omega}^{(3)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)} - T_{\alpha\omega}^{(2)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Величины $T_{\alpha e}^{(k)}, T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha e}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha e}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_e, Q_\omega$ вычисляются по формулам (2), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно линейными $\sigma_{\alpha e}^{(k)}, \sigma_{rze}^{(3)}$ или нелинейными составляющими $\sigma_{\alpha\omega}^{(k)}, \sigma_{rz\omega}^{(3)}$ из соотношений (4).

Система уравнений равновесия в усилиях для упругой трехслойной пластины получена в [24] без использования соотношений связи напряжений и деформаций, поэтому она остается справедливой и в рассматриваемом случае. Подставив в нее выражения для внутренних усилий (5), приведем ее к виду

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= -p + p_\omega, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в левой части уравнений собраны линейные составляющие обобщенных внутренних усилий, причем индекс «e» опущен для удобства. Нелинейные добавки сосредоточены справа и включены в слагаемые с нижним индексом « ω »:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), & h_\omega &= H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega, \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}). \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение обобщенных усилий через искомые функции $u(r), \psi(r), w(r)$ получим, подставив (4) в (2) и выразив деформации через перемещения. Отправив затем их и



соотношения (7)) в систему (6), имеем

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p + p_\omega, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q + q_\omega, \end{aligned} \quad (8)$$

где a_i — коэффициенты, имеющие интегральный вид, так как модули упругости материалов изменяются по толщине слоев вместе с температурой ($m = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\ a_5 &= K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \\ K_{km} &= \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 1, 2, 3); \end{aligned}$$

L_2, L_3 — дифференциальные операторы:

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Полученная система дифференциальных уравнений (8) является нелинейной, поэтому для ее решения необходимо применять численные или приближенные методы. В дальнейшем используем метод упругих решений, сходимость которого доказана в широких пределах. В итерационном виде система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) &= -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3 \psi^{(n)} &= h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n — номер приближения, величины $p_\omega^{(n-1)}, h_\omega^{(n-1)}, q_\omega^{(n-1)}$ называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения по формулам типа (7), в которых во все слагаемые необходимо добавить индекс « $n - 1$ » вверху:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_\alpha^{(k, n-1)} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k, n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} e_\alpha^{(k, n-1)} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= M_{\alpha\omega}^{(3, n-1)} + c (T_{\alpha\omega}^{(1, n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2, n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi), \\ Q_\omega^{(n-1)} &= \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} e_{rz}^{(3, n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{(k, n-1)}, T_k). \end{aligned} \quad (10)$$



Линейная краевая задача определения функций $u^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $w^{(n)}$ замыкается присоединением к системе уравнений (9) граничных условий в итерациях. При $r = r_0$ должны выполняться требования:

- при заделке контура пластины

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0;$$

- при шарнирном опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{,r\omega}^{(n-1)}. \quad (11)$$

Процедура нахождения решения линейной системы (9) известна [24]. По аналогии получаем следующее рекуррентное решение задачи теории малых упруго-пластических деформаций для рассматриваемой упругопластической пластины при нагружении из естественного состояния:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) - \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi^{(n)} + C_7^{(n)} r + \frac{C_8^{(n)}}{r} \right], \\ w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[b_2 \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r^{(n)} dr \right) - \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) - L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} C_1^{(n)} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}, \right] \end{aligned} \quad (12)$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, ..., $C_8^{(n)}$ — константы интегрирования, определяемые из граничных условий; $\psi_r^{(n)}(r)$ — частное решение неоднородного модифицированного уравнения Бесселя, выделяемого из системы (9) для сдвига; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам L_2 , L_3

$$\begin{aligned} L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr, \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}. \end{aligned}$$

Все интегралы являются определенными с переменным верхним пределом и берутся от 0 до r .

2. ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассмотрим изгиб исследуемой пластины локальной нагрузкой, равномерно распределенной по кругу относительного радиуса $0 \leq b \leq r_0$. Используя функцию Хевисайда $H_0(r)$, нагрузку можно записать в виде

$$q(r) = q_0 H_0(b - r), \quad p(r) \equiv 0. \quad (13)$$



Входящее в перемещения (12) частное решение $\psi_r^{(n)}(r)$ при нагрузке (13) будет

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)}(r) = & \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2} r - \\ & - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\ & \quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \, dr \right] + \\ & + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\ & \quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \, dr \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь использован интегральный оператор от нагрузки

$$\int L_3^{-1}(q_0 H_0(b-r)) \, dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r).$$

В случае заделки или шарнирного опирания контура пластины из части граничных условий (11) ($\psi^{(n)} = w^{(n)} = 0$ при $r = r_0$) и условий ограниченности решения в начале координат следуют константы интегрирования $C_1^{(n)}$, $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_4^{(n)}$, $C_6^{(n)}$, $C_8^{(n)}$:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} = & -\frac{q_0 b^2}{2}, \quad C_2^{(n)} = -\frac{1}{I_1(\beta)} \left(C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\ & \times \left(-K_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \, dr \right] \Big|_{r=r_0} + \right. \\ & + I_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right] - \right. \\ & \quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \, dr \right] \Big|_{r=r_0} \Big), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C_3^{(n)} = & \frac{\gamma_1 \beta^2 b I_1(\beta b)}{q_0} + \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left(\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r \, dr - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r \, dr \right) \, dr \right] \Big|_{r=r_0}, \\ C_6^{(n)} = & \frac{q_0 b^4}{16 b_3}, \quad C_8^{(n)} = 0, \\ C_4^{(n)} = & -\frac{C_1^{(n)}}{4 b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4 b_3} - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} \, dr \Big|_{r=r_0} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0} + \\ & + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \, dr \Big|_{r=r_0}. \end{aligned}$$



Константы $C_5^{(n)}$, $C_7^{(n)}$ при шарнирном опирании получим из оставшихся условий на контуре ($u^{(n)} = 0$, $M = M_r^{(n-1)}$):

$$\begin{aligned}
 C_5^{(n)} &= 2 \frac{a_7 b_1 + a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + \\
 &+ \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2 \left(L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + M_r^{(n-1)} \right) \right) + \\
 &+ \left(b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left(\frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right), \\
 C_7^{(n)} &= -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - \\
 &- 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Аналогичные константы при заземленном контуре следуют из условий $u^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0$ при $r = 1$:

$$C_5^{(n)} = -2b_3 C_6^{(n)} - \frac{C_1^{(n)}}{2}, \quad C_7^{(n)} = -\frac{2}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}. \tag{17}$$

Следовательно, полученное рекуррентное решение (12)–(17) описывает деформирование трехслойной упругопластической круговой пластины в температурном поле при нагружении из естественного состояния непрерывно распределенной по кругу локальной поверхностной нагрузкой в случае различных граничных условий.

3. ПОВТОРНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляются мгновенная разгрузка и повторное нагружение усилиями $q''(r)$ обратного знака:

$$q''(r) = -q_0 H_0(b - r). \tag{18}$$

При этом будем предполагать, что за время разгрузки и последующего переменного нагружения температура во всех точках пластины остается неизменной, совпадающей с полем температуры к моменту начала разгрузки, т. е. $T_1(z) = T(z, t_1)$.

Эти усилия создадут в пластине поле перемещений u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ и напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$ ($\alpha = r, \varphi$). Повторяя методику Москвитина [25], примененную для трехслойных стержней [18], определим для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки разности ($\alpha = r, \varphi$):

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma'_\alpha^{(k)} - \sigma''_\alpha^{(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma'_{rz}^{(3)} - \sigma''_{rz}^{(3)}, \quad s_\alpha^{(k)*} = s'_\alpha^{(k)} - s''_\alpha^{(k)}, \\
 \sigma^{(k)*} &= \sigma'^{(k)} - \sigma''^{(k)}, \quad \varepsilon_\alpha^{(k)*} = \varepsilon'_\alpha^{(k)} - \varepsilon''_\alpha^{(k)}, \quad \varepsilon_{rz}^{(3)*} = \varepsilon'_{rz}^{(3)} - \varepsilon''_{rz}^{(3)}, \\
 e_\alpha^{(k)*} &= e'_\alpha^{(k)} - e''_\alpha^{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)*} = \varepsilon'^{(k)} - \varepsilon''^{(k)}, \quad u^* = u' - u'', \quad \psi^* = \psi' - \psi'', \\
 w^* &= w' - w'', \quad q^*(r) = q(r) - q''(r) = 2q_0 H_0(b - r),
 \end{aligned} \tag{19}$$

где величины с одним штрихом — напряжения, деформации и перемещения в пластине перед разгрузкой (полученные ранее (12)–(17)), двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла.



В силу линейной связи деформаций с перемещениями соотношения Коши будут справедливы и для соответствующих величин со звездочками. Для напряжений и деформаций (19), отмеченных звездочкой, примем физические уравнения состояния типа (3):

$$\begin{aligned} s_{\alpha}^{(k)*} &= 2G_k(1 - \omega_k^*)e_{\alpha}^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k\varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3(1 - \omega_k^*)e_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (20)$$

где значения модулей упругости зафиксированы в момент разгрузки $G_k(z) = G_k(T_1(z))$, $K_k(z) = K_k(T_1(z))$, а температура в явном виде в эти соотношения не входит.

Нелинейные характеристики упругого заполнителя не изменяются при циклическом деформировании. В несущих слоях универсальные функции нелинейности ω_k^* полагаем подобными функциям пластичности при нагружении из естественного состояния [25]:

$$\omega_k^* \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{k*}, \varepsilon_y^{k*}, T_1, A_k^*, \alpha_k^*) \quad (k = 1, 2), \quad (21)$$

где A_k^* , α_k^* — экспериментально определяемые параметры материала, входящие в аппроксимационную формулу функции нелинейности для величин со звездочками [27].

Используя физические соотношения (20), в компонентах тензора напряжений $\sigma_{\alpha}^{(k)*}$, $\sigma_{rz}^{(3)*}$ выделим линейную и нелинейную составляющие. Это позволит подобную операцию провести и для величин типа внутренних усилий со звездочками. В отличие от подобных соотношений (4), (5) температура здесь в явном виде входить не будет.

Нелинейные уравнения равновесия для величин со звездочками будут иметь вид типа (8). Соответствующие итерационные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1u^{(n)*} + a_2\psi^{(n)*} - a_3w_{,r}^{(n)*}) &= -p^* + p_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_2(a_2u^{(n)*} + a_4\psi^{(n)*} - a_5w_{,r}^{(n)*}) - 2cG_3\psi^{(n)*} &= h_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_3(a_3u^{(n)*} + a_5\psi^{(n)*} - a_6w_{,r}^{(n)*}) &= -q^* + q_{\omega}^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (22)$$

Дополнительные «внешние нагрузки» на первом шаге ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения:

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)*} &= T_{r\omega}^{(n-1)*},{}_{,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)*} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)*}), \\ h_{\omega}^{(n-1)*} &= H_{r\omega}^{(n-1)*},{}_{,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)*} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)*}) - Q_{\omega}^{(n-1)*}, \\ q_{\omega}^{(n-1)*} &= M_{r\omega}^{(n-1)*},{}_{,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)*},{}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)*},{}_{,r}), \end{aligned} \quad (23)$$

где величины $T_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, $M_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, $H_{\alpha\omega}^{(n-1)*}$, Q_{ω} вычисляются по формулам (10), в которых во всех слагаемых необходимо формально добавить звездочку в верхний индекс.

Задача нахождения функций $u^{(n)*}$, $\psi^{(n)*}$, $w^{(n)*}$ замыкается присоединением к уравнениям (22) граничных условий, подобных (11). В этом случае краевая задача для величин со звездочками совпадает с краевой задачей для некоторой фиктивной трехслойной линейно-упругой пластины, которая испытывает изотермическое нагружение из естественного состояния внешними p^* , q^* и дополнительными усилиями (23) с функциями нелинейности (21). Фиктивная пластина геометрически



совпадает с рассматриваемой. Ее упругие свойства характеризуются переменными по толщине модулями упругости $G_k(z)$, $K_k(z)$ за счет зафиксированной при разгрузке температуры.

Система дифференциальных уравнений для величин со звездочками (22) с точностью до обозначений совпадает с (9) и отличается только зафиксированной при разгрузке температурой T_1 . Ее аналитическое решение следует из (12), где необходимо провести соответствующие формальные замены функций нелинейности и нагрузок на величины со звездочками:

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)*} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q^*) dr - \\ &- \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)*}) dr - \frac{C_1^{(n)*}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1 w^{(n)*} r} - \frac{a_2}{a_1 \psi^{(n)*}} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)*} &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &- K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] + \\ &+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right], \\ \int L_3^{-1}(q^*) dr &= 2q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r). \end{aligned}$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$ формально вычисляются по формулам (15)–(17), в которых нужно в соответствующие величины ввести в верхний индекс звездочку и амплитуду нагрузки q_0 заменить на $2q_0$.

Искомые параметры НДС трехслойной упругопластической пластины при повторном знакопеременном нагружении найдем из соотношений (19) с учетом решений (14), (24). Например, перемещения будут

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

Численные результаты приводятся для трехслойной несимметричной по толщине пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Все необходимые функции нелинейности и упругие параметры этих материалов содержатся в [27]. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительные толщины слоев: $h_1 = 0.02$; $h_2 = 0.06$; $h_3 = 0.4$. Интенсивность распределенной нагрузки $q_0 = 8$ МПа.



Рисунок 2 иллюстрирует зависимость максимального прогиба пластины от радиуса b пятна нагрузки при различных температурах: 1, 2 — упругий и физически нелинейный при $T_1 = 293$ К; 3, 4 — упругий и физически нелинейный при $T_2 = 323$ К. С увеличением радиуса локальной нагрузки прогиб растет нелинейно, достигая максимума при $b = 1$. В случае изотермического нагружения учет физической нелинейности материалов слоев увеличивает расчетный максимальный прогиб на 16%, при повышенной температуре — на 22%.

На рис. 3 показаны a — прогиб, b — относительный сдвиг в заполнителе трехслойной пластины при повторном знакопеременном изгибе круговой нагрузкой радиуса $b = 0.5$ (один штрих — прямое нагружение, два штриха — обратное): 1 — упругая пластина, 2 — изотермическая упругопластичность, 3 — термоупругопластичность. Прогиб и сдвиг при повторном нагружении уменьшились на 2–3%, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности, что объясняется циклическим упрочнением материала Д16Т [26].

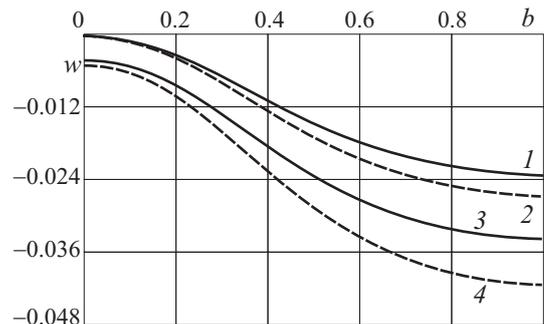


Рис. 2. Максимальный прогиб пластины в зависимости от радиуса b пятна нагрузки

Fig. 2. Maximum plate deflection depending on the radius b of the load spot

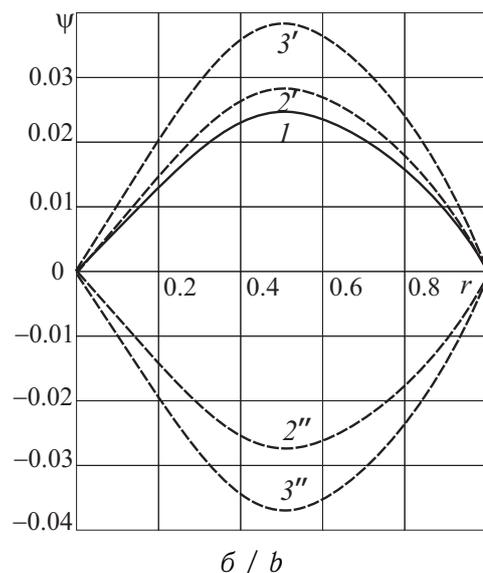
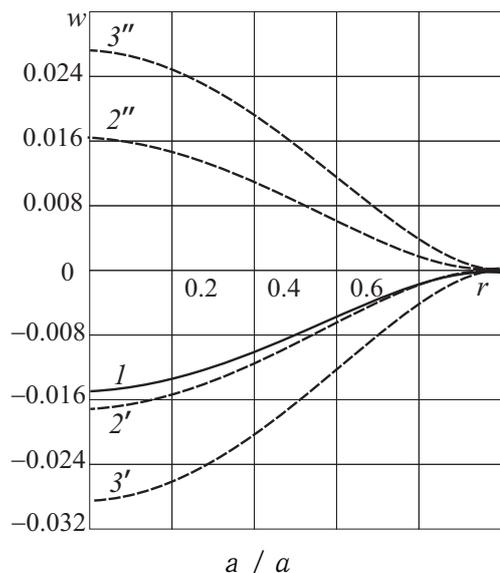


Рис. 3. Прогиб пластины (а) и относительный сдвиг в заполнителе при повторном нагружении (б)

Fig. 3. Plate deflection (a) and relative shear in a filled field under repeated loading (b)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругопластических трехслойных круговых пластин в температурном поле при прямых и знакопеременных непрерывных и локальных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине.



Список литературы

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. Москва : Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Ivanez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates // *Composite Structures*. 2015. № 133. P. 1127–1136. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
3. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // *Aerospace Science and Technology*. 2016. Vol. 52. P. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
4. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2015. Т. 50, № 2. С. 118–128.
5. Skec L., Jelenic G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mechanica*. 2014. Vol. 225, № 2. P. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43, № 2. P. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
7. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *Journal of Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 162, № 2. P. 246–253. <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4>
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46, № 5. P. 779–787. <https://doi.org/10.3103/S0025654411050128>
9. Мочалин А. А. Параметрические колебания неоднородной круговой цилиндрической оболочки переменной плотности при различных краевых условиях // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 210–214. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215>
10. Леоненко Д. В., Старовойтов Э. И. Импульсные воздействия на трехслойные круговые цилиндрические оболочки в упругой среде // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 202–209. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209>
11. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
12. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholi H. The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, № 11. P. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
13. Havaladar S., Sharma R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multilayer PU foam sandwich panels // *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*. 2013. Vol. 1, № 5. P. 201–206. <https://doi.org/10.4236/jmmce.2013.15031>
14. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // *Доклады РАЕН. Поволжское межрегиональное отделение*. 1999. № 1. С. 28–37.
15. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2011. № 2. С. 32–40.



16. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Materials Sciences and Applications*. 2013. Vol. 4, № 8. P. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
17. Starovoitov E. I. Variable loading of three-layer shallow viscoplastic shells // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 1980. Vol. 35, № 1–2. P. 54–58.
18. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Переменный изгиб трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 196–208. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
19. Янковский А. П. Исследование установившейся ползучести металлокомпозитных балок слоисто-волоконистой структуры с учетом ослабленного сопротивления поперечным сдвигам // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия : Физико-математические науки*. 2016. Т. 20, № 1. С. 85–108. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1459>
20. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2006. Vol. 1, № 1. P. 97–127. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.97>
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
22. Козел А. Г. Математическая модель деформирования круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // *Проблемы физики, математики и техники*. 2017. № 1 (30). С. 42–46.
23. Захарчук Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем // *Проблемы физики, математики и техники*. 2017. № 4 (33). С. 53–57.
24. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovski D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54, № 3. P. 299–312. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x>
25. Москвитин В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций. Москва : Наука, 1981. 344 с.
26. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. 376 с.
27. Starovoitov E. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // *Strength of Materials*. 1988. Vol. 20, № 4. P. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mekhanika mnogoslounykh konstruktсий* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p. (in Russian).
2. Ivanez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035>
3. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017>
4. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50. no. 2, pp. 208–217. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020107>



5. Skec L., Jelenic G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-0972-5>
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>
7. Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253. <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9635-4>
8. Kuznetsova E. L., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Propagation of unsteady waves in an elastic layer. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787. <https://doi.org/10.3103/S0025654411050128>
9. Mochalin A. A. The parametric oscillations of heterogeneous round cylindrical shell of variable density on different boundary conditions. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 210–214 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-210-215>
10. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Impulsive action on the three-layered circular cylindrical shells in elastic media. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 202–209 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-2-202-209>
11. Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave occurrences mathematical modeling in two geometrically nonlinear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible Liquid. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197>
12. Rabboh S., Bondok N., Mahmoud T., El Kholly H. The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 11, pp. 751–760. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.411095>
13. Havaladar S., Sharma R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multilayer PU foam sandwich panels. *Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206. <https://doi.org/10.4236/jmmce.2013.15031>
14. Belostochny G. N., Rusina E. A. Shells and geometrically irregular plates with heat-sensitive thickness. *Dokl. Ross. Akad. Estestv. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 28–37 (in Russian).
15. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>
16. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477. <https://doi.org/10.4236/msa.2013.48057>
17. Starovoitov E. I. Variable loading of three-layer shallow viscoplastic shells. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 1980, vol. 35, no. 1–2, pp. 54–58.
18. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Variable bending of a three-layer rod with a compressed filler in the neutron flux. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 196–208 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-196-208>
19. Yankovskii A. P. A Study of steady creep of layered metal-composite beams of laminated-fibrous structures with account of their weakened resistance to the transverse Shift. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 85–108 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1459>



20. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J. W. Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 97–127. <https://doi.org/10.2140/jomms.2006.1.97>
21. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Bending of a sandwich beam by local loads in the temperature field. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 69–83. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83>
22. Kozel A. G. Mathematical model of deformation of the circular three-layer plate on the basis of Pasternak. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2017, vol. 30, pp. 42–46 (in Russian).
23. Zakharchuk Yu. V. Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2017, vol. 33, pp. 53–57 (in Russian).
24. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovski D. V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 299–312. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9740-x>
25. Moskvitin V. V. *Tsiklichesкое nagruzhenie elementov konstruksii* [Cyclic Loading of Elements of Designs]. Moscow, Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
26. Il'iushin A. A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Pt. 1. Elastic-Plastic Deformation]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1948. 376 p. (in Russian).
27. Starovoitov E. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, no. 4, pp. 426–431. <https://doi.org/10.1007/BF01530849>

Поступила в редакцию / Received 12.09.2019

Принята к публикации / Accepted 26.11.2019

Опубликована / Published 01.03.2021