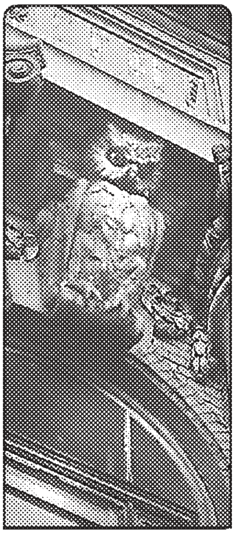

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142–150

Научная статья
УДК 512
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150

О квазимногочленах Капелли. III

С. Ю. Антонов✉, А. В. Антонова

Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, antonovst-vm@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0003-1705-3929

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, antonovakazan@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0001-7047-7275

Аннотация. В работе исследуются многочлены типа Капелли (двойные и квазимногочлены Капелли), принадлежащие свободной ассоциативной алгебре $F\{X \cup Y\}$, рассматриваемой над произвольным полем F и порожденной двумя непересекающимися счетными множествами X, Y. Показано, что двойные многочлены Капелли $C_{4k,\{1\}}$, $C_{4k,\{2\}}$ являются следствиями стандартного многочлена S^{-}_{2k}. Более того, доказано, что эти многочлены обнуляются как на квадратных, так и на прямоугольных матрицах соответствующих размеров. В статье также показано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k+1$ будут минимальными тождествами нечетной компоненты Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ при любых F и $m \neq k$.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли

Для цитирования: *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О квазимногочленах Капелли. III // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 142–150. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150

Окончание. Начало см.: Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382; 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150

Quasi-polynomials of Capelli. III

S. Yu. Antonov✉, **A. V. Antonova**

Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia

Stepan Yu. Antonov, antonovst-vm@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0003-1705-3929
Alina V. Antonova, antonovakazan@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0001-7047-7275

Abstract. In this paper polynomials of Capelli type (double and quasi-polynomials of Capelli) belonging to a free associative algebra $F\{X \cup Y\}$ considering over an arbitrary field F and generated by two disjoint countable sets X, Y are investigated. It is shown that double Capelli's polynomials $C_{4k,\{1\}}$, $C_{4k,\{2\}}$ are consequences of the standard polynomial S^{-}_{2k}. Moreover, it is proved that these polynomials equal to zero both for square and for rectangular matrices of corresponding sizes. In this paper it is also shown that all Capelli's quasi-polynomials of the $(4k+1)$ degree are minimal identities of odd component of Z_2-graded matrix algebra $M^{(m,k)}(F)$ for any F and $m \neq k$.

Keywords: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial

For citation: Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. III. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 142–150 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-142-150

The ending. The previous part was published in: Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382; 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16

Введение

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, которое представим в виде $Z = X \cup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in N}$, $Y = \{y_n\}_{n\in N}$ — непересекающиеся счетные множества, $f_{4k+1}, g_{4k+1}, b_{4k+1}, h_{4k+1}, a_{4k+1}, c_{4k+1}$, $f_{4k}, g_{4k}, b_{4k}, h_{4k}, a_{4k}, c_{4k}$ — квазимногочлены Капелли нечетной и четной степени соответственно. В статье [1] показано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k+1$ являются тождествами некоторых подпространств нечетной компоненты Z_2-градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$. Цель данной работы — доказать, что эти многочлены будут тождествами самой нечетной компоненты. Заметим, что, несмотря на отдельные имеющиеся результаты (см., например, [2–6]), описания идеала Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной алгебры $M_{m+k}(F)$ при произвольных m, k, F до сих пор нет.

1. Некоторые системы линейных алгебраических уравнений

Пусть $k \in \mathbf{N}$, S_{2k} — симметрическая группа степени $2k$, $\preceq_l$ — лексикографический порядок на S_{2k}. Определим на S_{2k} новое отношение порядка $\preceq$, положив для любых $\tau, \pi \in S_{2k}$ $\tau \preceq \pi$, если $\operatorname{sgn}\tau < \operatorname{sgn}\pi$, а если $\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn}\pi$, то $\tau \preceq \pi$ тогда и только тогда, когда $\tau \preceq_l \pi$.

Далее, пусть H, U — некоторые непустые подмножества группы $S_{2k}(\preceq)$, которые представим в виде $H = H_1 \cup H_2$, $U = U_1 \cup U_2$, где $H_1 = \{\sigma \in H \mid \operatorname{sgn}\sigma = -1\}$, $H_2 = \{\sigma \in H \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$, $U_1 = \{\sigma \in U \mid \operatorname{sgn}\sigma = -1\}$, $U_2 = \{\sigma \in U \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\}$, при этом мы считаем, что $|H_1| = p_1 \geqslant 0$, $|H_2| = p_2 \geqslant 0$, $|H| = p = p_1 + p_2 > 0$, $|U_1| = q_1 \geqslant 0$, $|U_2| = q_2 \geqslant 0$, $|U| = q = q_1 + q_2 > 0$. В частности, если $H = S_{2k}$, то $p_1 = p_2 = n = (2k)!/2$, а если $U = S_{2k}$, то $q_1 = q_2 = n = (2k)!/2$.

Кроме того, пусть $m \in \mathbf{N}$, $M_{k\times m}(F)$, $M_{m\times k}(F)$ — векторные пространства над F, элементами которых являются прямоугольные матрицы размера $k \times m$ и $m \times k$ соответственно, $M_k(F)$ — алгебра квадратных матриц размера $k \times k$, $T[M_k(F)]$ — идеал ее полиномиальных тождеств. Теорема Амицура – Левицкого утверждает [7], что стандартный многочлен $S_{2k}^-(\bar{x}) = S_{2k}^-(x_1, \ldots, x_{2k}) = \sum\limits_{\pi \in S_{2k}} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(2k)}$ является тождеством алгебры $M_k(F)$ и что если $0 \neq \Phi \in T[M_k(F)]$, то $\deg\Phi \geqslant 2k$, при этом если $\deg\Phi = 2k$ и $k > 2$, то $\Phi = \beta S_{2k}^-(\bar{x})$, где $\beta \in F$.

Рассмотрим четыре системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) от pq неизвестных $d_{\tau_j}^{\pi_i} \in F$, индексированных подстановками $\pi_i \in H$, $\tau_j \in U$, считая, что $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \ldots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_q$, и $p + q$ уравнений:

$$\sum_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1,p}, \qquad \sum_{r=1}^{p} d_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1,q}, \tag{1}$$

$$\sum_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_i} = 0, \quad i = \overline{1,p}, \qquad \sum_{r=1}^{p} d_{\tau_a}^{\pi_r} = -t, \quad a = \overline{1,q_1}, \qquad \sum_{r=1}^{p} d_{\tau_{q_1+j}}^{\pi_r} = t, \quad j = \overline{1,q_2}, \tag{2}$$

$$\sum_{r=1}^{p} d_{\tau_j}^{\pi_r} = 0, \quad j = \overline{1,q}, \qquad \sum_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_a} = -\beta, \quad a = \overline{1,p_1}, \qquad \sum_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_{p_1+i}} = \beta, \quad i = \overline{1,p_2}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{r=1}^{p} d_{\tau_a}^{\pi_r} = -t, \quad a = \overline{1,q_1}, & \sum\limits_{r=1}^{p} d_{\tau_{q_1+j}}^{\pi_r} = t, \quad j = \overline{1,q_2}, \\ \sum\limits_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_u} = -\beta, \quad u = \overline{1,p_1}, & \sum\limits_{s=1}^{q} d_{\tau_s}^{\pi_{p_1+i}} = \beta, \quad i = \overline{1,p_2}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Предложение 1. *Пусть многочлен* $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{\pi\in H}\sum\limits_{\tau\in U} \alpha_\tau^\pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)} \in T[M_k(F)]$ *и* $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$. *Тогда подстановка* $d_{\tau_j}^{\pi_i} = \alpha_{\tau_j}^{\pi_i}$, *где* $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \ldots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_q$, *является решением хотя бы одной из систем* (1)–(4).

Доказательство. Пусть

$$1, A_1, \ldots, A_{2k} \in M_k(F), \quad \bar{A} = (A_1, \ldots, A_{2k}), \quad \bar{1} = (1, \ldots, 1)_{1\times 2k},$$

тогда

$$\Phi_{4k}(\bar{A}; \bar{1}) = \sum_{\pi\in H}\sum_{\tau\in U} \alpha_\tau^\pi A_{\pi(1)} 1_{\tau(1)} A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(2k)} 1_{\tau(2k)} =$$

$$= \sum_{\pi \in H} (\alpha^{\pi}_{\tau_1} + \alpha^{\pi}_{\tau_2} + \ldots + \alpha^{\pi}_{\tau_q}) A_{\pi(1)} \cdots A_{\pi(2k)} = 0.$$

Положим $\gamma^{\pi} = \alpha^{\pi}_{\tau_1} + \alpha^{\pi}_{\tau_2} + \ldots + \alpha^{\pi}_{\tau_q}$, $\varphi_{2k}(\bar{x}) = \sum\limits_{\pi \in H} \gamma^{\pi} x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(2k)}$, тогда

$$\varphi_{2k}(\bar{A}) = \Phi_{4k}(\bar{A}; \bar{1}) = 0.$$

Отсюда и из теоремы Амицура – Левицкого следует одно из двух: 1) все коэффициенты $\gamma^{\pi} = 0$; 2) $H = S_{2k}$, и тогда $\gamma^{\pi} = \beta \operatorname{sgn} \pi$, где $\beta = \mathrm{const} \neq 0$.

Пусть имеет место случай 1), тогда справедливы равенства

$$\sum_{s=1}^{q} \alpha^{\pi_i}_{\tau_s} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \tag{5}$$

и, значит, многочлен $\varphi_{2k}(\bar{x}) \equiv 0$. Более того, из равенств (5) и определения многочлена $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$ вытекает, что $q > 1$. Для случая 2) приходим к равенствам

$$\sum_{s=1}^{q} \alpha^{\pi_i}_{\tau_s} = \beta \operatorname{sgn} \pi_i, \quad i = \overline{1, (2k)!},$$

и, значит, $\varphi_{2k}(\bar{x}) = \beta S^{-}_{2k}(\bar{x})$, при этом $q \geqslant 1$.

Аналогично для подстановки аргументов $\bar{x} = \bar{1}$, $\bar{y} = \bar{A}$ будем иметь

$$\Phi_{4k}(\bar{1}; \bar{A}) = \sum_{\tau \in U} (\alpha^{\pi_1}_{\tau} + \alpha^{\pi_2}_{\tau} + \ldots + \alpha^{\pi_p}_{\tau}) A_{\tau(1)} \cdots A_{\tau(2k)} = 0.$$

Положим $a_{\tau} = \alpha^{\pi_1}_{\tau} + \alpha^{\pi_2}_{\tau} + \ldots + \alpha^{\pi_p}_{\tau}$, $\psi_{2k}(\bar{y}) = \sum\limits_{\tau \in U} a_{\tau} y_{\tau(1)} y_{\tau(2)} \cdots y_{\tau(2k)}$, тогда $\psi_{2k}(\bar{A}) = \Phi_{4k}(\bar{1}; \bar{A}) = 0$. Рассуждая так же, как и для многочлена $\varphi_{2k}(\bar{x})$, придем к равенствам

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha^{\pi_r}_{\tau_j} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad p > 1,$$

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha^{\pi_r}_{\tau_j} = t \operatorname{sgn} \tau_j, \quad j = \overline{1, (2k)!}, \quad p \geqslant 1.$$

Учитывая теперь то, что многочлен $\Phi_{4k}(\bar{x}, \bar{y})$ зависит от двух групп аргументов, приходим к одной из систем возможных равенств для коэффициентов $\alpha^{\pi_i}_{\tau_j}$:

$$\sum_{s=1}^{q} \alpha^{\pi_i}_{\tau_s} = 0, \quad i = \overline{1, p}, \ q > 1, \quad \sum_{r=1}^{p} \alpha^{\pi_r}_{\tau_j} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \ p > 1, \tag{6}$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \alpha^{\pi_i}_{\tau_s} = 0, \ i = \overline{1, p}, \ p \geqslant 1, \quad \sum_{r=1}^{p} \alpha^{\pi_r}_{\tau_a} = -t, \ a = \overline{1, n}, \quad \sum_{r=1}^{p} \alpha^{\pi_r}_{\tau_{n+j}} = t, \ j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$\sum_{r=1}^{2n} \alpha^{\pi_r}_{\tau_j} = 0, \ j = \overline{1, q}, \ q \geqslant 1, \quad \sum_{s=1}^{q} \alpha^{\pi_a}_{\tau_s} = -\beta, \ a = \overline{1, n}, \quad \sum_{s=1}^{q} \alpha^{\pi_{a+i}}_{\tau_s} = \beta, \ i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

$$\sum_{s=1}^{2n} \alpha^{\pi_a}_{\tau_s} = -\beta, \quad \sum_{s=1}^{2n} \alpha^{\pi_{n+i}}_{\tau_s} = \beta, \quad \sum_{r=1}^{2n} \alpha^{\pi_r}_{\tau_j} = -t, \quad \sum_{r=1}^{2n} \alpha^{\pi_r}_{\tau_{n+m}} = t, \quad a, i, j, m = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Это значит, что подстановка $d_{\tau_j}^{\pi_i} = \alpha_{\tau_j}^{\pi_i}$, где $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, $\pi_1 \prec \pi_2 \prec \ldots \prec \pi_p$, $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_q$, будет решением хотя бы одной из систем (1)–(4). $\square$

Возникает вопрос: верно ли, что всякое решение одной из с.л.а.у. (1)–(4) определяет некоторый многочлен $\Phi \in T[M_k(F)]$? Ответ оказывается отрицательным. Действительно, при $p = 2n$ и $q = 1$ решение системы (3) $d_{\tau_1}^{\pi_i} = \operatorname{sgn}\pi_i$, где $i = \overline{1,2n}$, приводит к многочлену Капелли $C_{4k}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{\pi\in S_{2k}} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_1x_{\pi(2)}y_2\cdots x_{\pi(2k)}y_{2k}$, не являющемуся тождеством алгебры $M_k(F)$ (см. [8, 9]).

С другой стороны, нетрудно видеть, что при $char\, F = 0$ и $p = q = 2n$ решениями систем (1)–(4) будут $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\operatorname{sgn}\pi_i \operatorname{sgn}\tau_j)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\operatorname{sgn}\tau_j)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\operatorname{sgn}\pi_i)$, $(d_{\tau_j}^{\pi_i}) = (\operatorname{sgn}\pi_i\, \delta_{\operatorname{sgn}\pi_i \operatorname{sgn}\tau_j})$, этим решениям соответствуют многочлены

$$C_{4k}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}\cdots x_{\pi(2k)}y_{\tau(2k)},$$

$$C_{4k,\{1\}}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \operatorname{sgn}\tau x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}\cdots x_{\pi(2k)}y_{\tau(2k)},$$

$$C_{4k,\{2\}}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}\cdots x_{\pi(2k)}y_{\tau(2k)},$$

$$f_{4k}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \operatorname{sgn}\pi\delta_{\operatorname{sgn}\pi \operatorname{sgn}\tau} x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}\cdots x_{\pi(2k)}y_{\tau(2k)},$$

причем, согласно работам [10–12], C_{4k}, $C_{4k,\{1\}}$, $C_{4k,\{2\}}$, $f_{4k} \in T[M_k(F)]$ при любом поле F.

Замечание 1. В [13] доказано, что для любых матриц $A_1,\ldots,A_{2k} \in M_{k\times m}(F)$, $B_1,\ldots,B_{2k} \in M_{m\times k}(F)$ справедливо равенство $C_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$.

Ниже мы покажем, что этот результат остается верным и для многочленов $C_{4k,\{1\}}(\bar{x},\bar{y})$, $C_{4k,\{2\}}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{4k}(\bar{x},\bar{y})$.

2. Минимальные тождества подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$

Пусть $I_k = \{1,2,\ldots,k\}$, P, Q — какие-либо многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{P\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом P. Будем говорить, что многочлен Q является следствием многочлена P (следует из P), если $Q \in \{P\}^T$. В частности, если многочлен $P(x_1,\bar{y}) = P(x_1,y_1,\ldots,y_m)$ является однородным и $\deg x_1(P(x_1,\bar{y})) = n$, то полная линеаризация $Lin_{x_1}(P(x_1,\bar{y}))$ многочлена $P(x_1,\bar{y})$ по переменной x_1 будет следствием многочлена $P(x_1,\bar{y})$, здесь (см. [14, 15])

$$\begin{gathered}
Lin_{x_1}(P(x_1,\bar{y})) = P(x_1+x_2+\ldots+x_n,\bar{y})+\\
+\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^s \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_s\leqslant n} P(x_1+\ldots+x_{\hat{i}_1}+\ldots+x_{\hat{i}_2}+\ldots+x_{\hat{i}_s}+\ldots+x_n,\bar{y}) =\\
= P(x_1+x_2+\ldots+x_n,\bar{y}) - \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} P(x_1+\ldots+x_{\hat{i}_1}+\ldots+x_n,\bar{y})+\\
+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} P(x_1+\ldots+x_{\hat{i}_1}+\ldots+x_{\hat{i}_2}+\ldots+x_n,\bar{y}) - \ldots +\\
+(-1)^{n-1}(P(x_1,\bar{y})+\ldots+P(x_n,\bar{y})).
\end{gathered}$$

Лемма 1. *Многочлены*

$$P_{4k}(\bar{x}, y_1) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_1 x_{\pi(2)} y_1 \cdots x_{\pi(2k)} y_1,$$
$$Q_{4k}(x_1, \bar{y}) = \sum_{\tau \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \tau x_1 y_{\tau(1)} x_1 y_{\tau(2)} \cdots x_1 y_{\tau(2k)}$$

следуют из $S^-_{2k}(\bar{x})$.

Доказательство. Определим эндоморфизмы φ, ψ, χ алгебры $F\{Z\}$, положив

$$\varphi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \ldots, x_{2k}\}, \\ x_i y_1, & \text{если } z = x_i, i \in I_{2k}, \end{cases} \quad \psi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \ldots, x_{2k}\}, \\ y_i, & \text{если } z = x_i, i \in I_{2k}, \end{cases}$$
$$\chi(z) = \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{y_1, \ldots, y_{2k}\}, \\ x_1 y_i, & \text{если } z = y_i, i \in I_{2k}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$P_{4k}(\bar{x}, y_1) = \varphi(S^-_{2k}(\bar{x})) = S^-_{2k}(x_1 y_1, \ldots, x_{2k} y_1),$$
$$Q_{4k}(x_1, \bar{y}) = \chi\psi(S^-_{2k}(\bar{x})) = \chi(S^-_{2k}(\bar{y})) = S^-_{2k}(x_1 y_1, \ldots, x_1 y_{2k}).$$ □

Предложение 2. *Для любых матриц* $A_i \in M_{k\times m}(F)$, $B_j \in M_{m\times k}(F)$, *где* $i, j = \overline{1, 2k}$, *справедливы равенства*

$$P_{4k}(A_1, \ldots, A_{2k}; B_1) = 0, \quad Q_{4k}(A_1; B_1, \ldots, B_{2k}) = 0.$$

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлены $P_{4k}(\bar{x}, y_1)$, $Q_{4k}(x_1, \bar{y})$, будем иметь

$$P_{4k}(\bar{A}; B_1) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \operatorname{sgn} \pi A_{\pi(1)} B_1 A_{\pi(2)} \cdots A_{\pi(2k)} B_1 = S^-_{2k}(A_1 B_1, \ldots, A_{2k} B_1) = 0,$$
$$Q_{4k}(A_1; \bar{B}) = S^-_{2k}(A_1 B_1, \ldots, A_1 B_{2k}) = 0.$$ □

Лемма 2. *Многочлены* $C_{4k,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y})$, $C_{4k,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y})$ *являются следствиями стандартного многочлена* $S^-_{2k}(\bar{x})$.

Доказательство. Принимая во внимание работу [14], нетрудно видеть, что $C_{4k,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) = Lin_{x_1}(Q_{4k}(x_1, \bar{y}))$, $C_{4k,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) = Lin_{y_1}(P_{4k}(\bar{x}, y_1))$, и потому с учетом леммы 1 имеем включения

$$C_{4k,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{Q_{4k}(x_1, \bar{y})\}^T \subseteq \{S^-_{2k}(\bar{x})\}^T,$$
$$C_{4k,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{P_{4k}(\bar{x}, y_1)\}^T \subseteq \{S^-_{2k}(\bar{x})\}^T.$$ □

Замечание 2. При доказательстве леммы 2 были получены равенства

$$C_{4k,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y}) = Lin_{x_1}(Q_{4k}(x_1, \bar{y})), \quad C_{4k,\{2\}}(\bar{x}, \bar{y}) = Lin_{y_1}(P_{4k}(\bar{x}, y_1)).$$

Предложение 3. *Для любых матриц* $A_i \in M_{k\times m}(F)$, $B_j \in M_{m\times k}(F)$, *где* $i, j = \overline{1, 2k}$, *справедливы равенства* $C_{4k,\{1\}}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $C_{4k,\{2\}}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$.

Доказательство. Проведем для многочлена $C_{4k,\{1\}}(\bar{x},\bar{y})$, поскольку для $C_{4k,\{2\}}(\bar{x},\bar{y})$ оно аналогично. Согласно замечанию 2

$$C_{4k,\{1\}}(\bar{A};\bar{B}) = Q_{4k}(A_1+\ldots+A_{2k};\bar{B})+$$
$$+\sum_{s=1}^{2k-1}(-1)^s\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant 2k} Q_{4k}(A_1+\ldots+A_{\hat{i}_1}+\ldots+A_{\hat{i}_s}+\ldots+A_{2k};\bar{B}).$$

Учитывая теперь предложение 2, получаем, что $C_{4k,\{1\}}(\bar{A},\bar{B})=0$. □

Предложение 4. *Для любых матриц* $A_i\in M_{k\times m}(F)$, $B_j\in M_{m\times k}(F)$, *где* $i,j=\overline{1,2k}$, *справедливы равенства* $b_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$, $h_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$, $a_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$, $c_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$, $f_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$, $g_{4k}(\bar{A};\bar{B})=0$.

Доказательство. Пусть $char\,F\neq 2$, тогда в силу предложения 7 работы [12] справедливы равенства

$$2b_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = C_{4k,\{2\}}(\bar{A};\bar{B})+C_{4k}(\bar{A};\bar{B}),\quad 2h_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = C_{4k,\{2\}}(\bar{A};\bar{B})-C_{4k}(\bar{A};\bar{B}),$$
$$2a_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = C_{4k,\{1\}}(\bar{A};\bar{B})+C_{4k}(\bar{A};\bar{B}),\quad 2c_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = C_{4k,\{1\}}(\bar{A};\bar{B})-C_{4k}(\bar{A};\bar{B}).$$

Отсюда, а также из замечания 1 и предложения 3 следует, что при $char\,F\neq 2$

$$b_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = h_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = a_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = c_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0.$$

Из того, что последние равенства верны при любом поле F характеристики не два, и того, что многочлены $b_{4k}(\bar{x},\bar{y})$, $h_{4k}(\bar{x},\bar{y})$, $a_{4k}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{4k}(\bar{x},\bar{y})$ полилинейны и имеют коэффициенты ±1, вытекает, что эти равенства останутся верными и при $char\,F=2$.

Далее, согласно предложению 7 работы [12] справедливы равенства

$$g_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = b_{4k}(\bar{A};\bar{B})-a_{4k}(\bar{A};\bar{B}),\quad f_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = h_{4k}(\bar{A};\bar{B})+a_{4k}(\bar{A};\bar{B}).$$

Отсюда и из доказанного выше следует, что $g_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = f_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$. □

Пусть $M_{m+k}(F)$ — алгебра матриц, градуированная подпространствами

$$M_0^{(m,k)}(F)=\left\{\begin{pmatrix} C_{m\times m}(F) & 0_{m\times k}\\ 0_{k\times m} & D_{k\times k}(F)\end{pmatrix}\right\},\quad M_1^{(m,k)}(F)=\left\{\begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times k}(F)\\ A_{k\times m}(F) & 0_{k\times k}\end{pmatrix}\right\},$$

$T[M_1^{(m,k)}(F)]$ — идеал тождеств векторного подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

Теорема. *Для любых натуральных чисел* m,k *и произвольного поля* F *многочлены* $b_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})\in T[M_1^{(m,k)}(F)]$.

Доказательство. Вытекает из предложения 5 работы [1] и предложения 4. □

В работе [13] доказано, что если ненулевой многочлен $\Phi(\bar{x},\bar{y})\in T[M_1^{(m,k)}(F)]$ и $m\neq k$, то $\deg\Phi(\bar{x},\bar{y})\geqslant 4k+1$. Отсюда и из теоремы следует, что квазимногочлены Капелли $b_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$ являются минимальными тождествами подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при $m\neq k$.

Список литературы

1. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О квазимногочленах Капелли. II // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16
2. *Vincenzo O. M.* On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ // Israel Journal of Mathematics. 1992. Vol. 80, № 3. P. 323–335. https://doi.org/10.1007/BF02808074
3. *Mattina D.* On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3×3 matrices // Linear Algebra and its Applications. 2004. Vol. 384. P. 55–75. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5
4. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Математические заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. https://doi.org/10.4213/mzm4298
5. *Vincenzo O. M.* Z_2-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Mathematical Journal. 2004. Vol. 30, № 2–3. P. 111–134.
6. *Di Vincenzo O. M., Nardozza V.* Z_2-graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices // Journal of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 194, iss. 1–2. P. 193–211. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004
7. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
8. *Размыслов Ю. П.* О радикале Джекобсона в PI-алгебрах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 337–360.
9. *Гатева Т. В.* Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, вып. 1 (217). С. 203–204.
10. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proceedings of the American Mathematical Society. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0964846-8
11. *Giambruno A., Sehgal S. K.* On a polynomial identity for $n \times n$ matrices // Journal of Algebra. 1989. Vol. 126, № 2. P. 451–453.
12. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О кратных многочленах Капелли // Ученые записки Казанского университета. Серия : Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 1. С. 5–25.
13. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Известия вузов. Математика. 2012. № 11. С. 3–19.
14. *Латышев В. Н.* Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, вып. 2. С. 101–110.
15. *Белов А. Я.* Локальная конечная базируемость и локальная представимость многообразий ассоциативных колец // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 3–134. https://doi.org/10.4213/im1122

References

1. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. II. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16
2. Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel Journal of Mathematics*, 1992, vol. 80, no. 3, pp. 323–335. https://doi.org/10.1007/BF02808074
3. Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3×3 matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5
4. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Mathematical Notes*, 2009, vol. 85, pp. 467–483. https://doi.org/10.1134/S0001434609030195

5. Vincenzo O. M. Z_2-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Mathematical Journal*, 2004, vol. 30, no. 2–3, pp. 111–134.
6. Di Vincenzo O. M., Nardozza V. Z_2-graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2004, vol. 194, iss. 1–2, pp. 193–211. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004
7. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0036751-9
8. Razmyslov Yu. P On the Jacobson radical in PI algebras. *Algebra and Logic*, 1974, vol. 13, no. 3, pp. 337–360.
9. Gateva T. V. The complexity of a bundle of varieties of associative algebras. *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 233.
10. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0964846-8
11. Giambruno A., Sehgal S. K. On a polynomial identity for $n\times n$ matrices. *Journal of Algebra*, 1989, vol. 126, no. 2, pp. 451–453.
12. Antonov S. Yu., Antonova A. V. On multiple polynomials of Capelli type *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 5–25 (in Russian).
13. Antonov S. Y. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Mathematical* (Izvestiya VUZ. Matematika), 2012, no. 56, pp. 1–16. https://doi.org/10.3103/S1066369X12110011
14. Latyshev V. N. Combinatorial generators of the multilinear polynomial identities. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 149, iss. 2, pp. 1107–1112. https://doi.org/10.1007/s10958-008-0049-5
15. Belov A. Ya. The local finite basis property and local representability of varieties of associative rings. *Izvestiya: Mathematics*, 2010, vol. 74, iss. 1, pp. 1–126. http://dx.doi.org/10.1070/IM2010v074n01ABEH002481

Поступила в редакцию / Received 14.02.2020
Принята к публикации / Accepted 01.06.2020
Опубликована / Published 31.05.2021