Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 162–172
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 162–172

Научная статья
УДК 517.538.52+517.538.53
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172

О скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко✉

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Республика Беларусь, 246019, г. Гомель, ул. Советская, д. 104

Старовойтов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, svoitov@gsu.by, https://orcid.org/0000-0002-1067-5744

Кечко Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры вычислительной математики и программирования, ekechko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1882-8781

Аннотация. В работе изучается скорость равномерной сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде (совместных аппроксимаций Паде) $\{\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)\}_{j=1}^k$ для набора экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — различные не равные нулю комплексные числа. Исследование асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде в общем случае является достаточно сложной задачей. Это связано с тем, что при их изучении используются в основном асимптотические методы, в частности метод перевала. Важным этапом в применении этого метода является нахождение специального перевального контура (интегральная теорема Коши позволяет выбирать контур интегрирования достаточно произвольно), по которому должно осуществляться интегрирование. При этом, как правило, приходится опираться только на интуицию. В данной работе предложен новый подход изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде, опирающийся на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала, а также на полученный нами многомерный аналог тождества ван Россума. Доказанные теоремы обобщают и дополняют известные результаты других авторов.

Ключевые слова: интегралы Эрмита, аппроксимации Эрмита – Паде, система экспоненциальных функций, асимптотические равенства, метод перевала

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2016–2020 годы и при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф18М-025).

Для цитирования: *Старовойтов А. П., Кечко Е. П.* О скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 162–172. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172

About the convergence rate Hermite – Padé approximants of exponential functions

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko✉

Francisk Skorina Gomel State University, 104 Sovetskaya St., Gomel 246019, Belarus

Alexander P. Starovoitov, svoitov@gsu.by, https://orcid.org/0000-0002-1067-5744
Elena P. Kechko, ekechko@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-1882-8781

Abstract. This paper studies uniform convergence rate of Hermite – Padé approximants (simultaneous Padé approximants) $\{\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)\}_{j=1}^k$ for a system of exponential functions $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, where $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ are different nonzero complex numbers. In the general case a research of the asymptotic properties of Hermite – Padé approximants is a rather complicated problem. This is due to the fact that in their study mainly asymptotic methods are used, in particular, the saddle-point method. An important phase in the application of this method is to find a special saddle contour (the Cauchy integral theorem allows to choose an integration contour rather arbitrarily), according to which integration should be carried out. Moreover, as a rule, one has to repy only on intuition. In this paper, we propose a new method to studying the asymptotic properties of Hermite – Padé approximants, that is based on the Taylor theorem and heuristic considerations underlying the Laplace and saddle-point methods, as well as on the multidimensional analogue of the Van Rossum identity that we obtained. The proved theorems complement and generalize the known results by other authors.
Keywords: Hermite integrals, Hermite – Padé approximants, system of exponential functions, asymptotic equality, saddle-point method
Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus within the state program of scientific research for 2016–2020 and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project No. F18M-025).
For citation: Starovoitov A. P., Kechko E. P. About the convergence rate Hermite – Padé approximants of exponential functions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 162–172 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-162-172

Введение

Множество k-мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных наборов, состоящих из k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ — это сумма $|m| = m_1 + \ldots + m_k$. Зафиксировав индекс $n \in \mathbb{Z}^1_+$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}^k_+$, полагаем $n_j = n + |m| - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Рассмотрим систему экспоненциальных функций $F_\lambda = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — набор различных не равных нулю комплексных чисел (при $k = 1$ считаем $\lambda_1 = 1$). *Аппроксимациями Эрмита – Паде типа* $(n, \overrightarrow{m})$ *системы* F_λ называют рациональные дроби вида

$$\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = \pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z; F_\lambda) = \frac{P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)}{Q_{n,\overrightarrow{m}}(z)}, \;\; j = 1, 2, \ldots, k,$$

где алгебраические многочлены $Q_{n,\overrightarrow{m}}(z) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)$, $P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)$, $\deg Q_{n,\overrightarrow{m}} \leqslant |m|$, $\deg P^j_{n,\overrightarrow{m}} \leqslant n_j$ удовлетворяют условиям: при $j = 1,2,\ldots,k$

$$R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z)e^{\lambda_j z} - P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = A_j z^{n+|m|+1} + \ldots .$$

Многочлены $Q_{n,\overrightarrow{m}}$, $P^j_{n,\overrightarrow{m}}$ принято называть [1] *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для системы* F_λ. Впервые такие многочлены появились в работе [2] Ш. Эрмита в виде интегралов Эрмита, которые после небольших преобразований приводят к равенствам (подробнее см. [3]):

$$\begin{aligned} Q_{n,\overrightarrow{m}}(z) &= \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int_0^\infty T(x)\,e^{-zx}dx, \\ P^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int_{\lambda_j}^\infty T(x)\,e^{-zx}dx, \\ R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) &= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int_0^{\lambda_j} T(x)\,e^{-zx}dx, \end{aligned} \tag{1}$$

где $T(x) = x^n\prod_{\nu=1}^k (x-\lambda_\nu)^{m_\nu}$. В интеграле (1), определяющем остаточную функцию $R^j_{n,\overrightarrow{m}}$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j. Диагональному случаю соответствует набор индексов, при котором $n = m_1 = \ldots = m_k$.

О. Перрон [4] при $k = 1$, А. И. Аптекарев [5] при $k > 1$ показали, что при $n + |m| \to \infty$ дроби $\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Задача описания скорости этой сходимости в настоящее время является весьма актуальной [1], [6–13]. Имеющиеся результаты относятся в основном к диагональному случаю, и, по существу, единственным методом в таких исследованиях является *метод перевала (метод седловой точки)*. Здесь следует сказать, что близкая по содержанию задача рассматривалась ещё Эрмитом [2]. В этой связи напомним, что в диагональном случае при $\lambda_j = j$ значения $\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(1)$ являются рациональными числами и дают удачные приближения степеней e^j. Это и другие аналогичные свойства дробей $\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)$ были виртуозно использованы Эрмитом [2] для обоснования трансцендентности числа e, немного позже Линдеманом для доказательства трансцендентности π (см. [14]), а затем К. Малером [15–17] для решения ряда задач теории диофантовых приближений (см. также [18, 19]).

При $k = 1$ (в этом случае $\overrightarrow{m} = m_1 = m$, а $\pi_{n,m}(z;e^\xi) := \pi^1_{n,\overrightarrow{m}}(z)$ называют *аппроксимациями Паде функции* e^z) Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z;e^\xi)$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [6]: при $n + m \to +\infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^\xi) = \frac{(-1)^m\, n!\; m!\; e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\;(n+m+1)!}\; z^{n+m+1}\;(1+o(1)). \tag{2}$$

Здесь и далее в аналогичных равенствах предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в $\mathbb{C}$. Из теоремы 6.4 работы ван Россума [20] следует, что при $n + m \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^\xi) = (-1)^m\frac{m!\,n!\,e^{mz/(n+m)}z^{n+m+1}}{(n+m)!\;(n+m+1)!}\;{}_1F_1(m+1,n+m+2;z)\,. \tag{3}$$

Напомним, что
$$ {}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p}\,\frac{z^p}{p!}\,, $$
где $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ — символ Похгаммера. Из (2) и (3) вытекает, что при $n+m\to\infty$
$$ {}_1F_1(m+1,n+m+2;z)=\exp\left\{\frac{mz}{n+m}\right\}(1+o(1)). \tag{4} $$
Заметим, что асимптотическое равенство (4) нетрудно доказать и непосредственно.

В работе [7] в случае, когда $k=2$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, с помощью перехода к матричной задаче Римана – Гильберта найдена скорость сходимости «сжатых» диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде. При сжатии переменной $z=n\zeta$ полюсы таких рациональных аппроксимаций заметают некоторые кривые в комплексной плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. Вопросы, связанные с описанием этих кривых и с асимптотикой сжатых аппроксимаций, на сегодняшний день вызывают большой интерес у специалистов [7–10].

Отметим также, что при $k\geqslant 1$ и $\lambda_j=j$ асимптотическое поведение многочленов Эрмита – Паде 1-го рода описано Ф. Вилонским [21]. Для произвольных действительных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ аналогичный результат получен в работе [22], где так же, как и в [21], существенно задействован метод перевала.

При комплексных $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ и в недиагональном случае методы, применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде (в частности, методы Лапласа и перевала), не работают. В такой ситуации для исследования асимптотик соответствующих разностей в [13] применён новый подход, в своей существенной части опирающийся лишь на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала.

В данной статье доказан многомерный аналог теоремы 4 из работы [13], в которой рассматривался случай $k=2$. При доказательстве мы используем метод работы [13] и установленный нами многомерный аналог тождества ван Россума (3). Кроме того, при некоторых условиях на $\overrightarrow{m}$ и λ основное ограничение $\lim\limits_{n\to\infty} m(n)/\sqrt{n}=0$ теоремы 4 удаётся снять.

1. Основной результат: $|m|=o(\sqrt{n})$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k\subset\mathbb{C}$

Теорема 1. *Пусть* $\overrightarrow{m}=(m_1,\dots,m_k)$, *а* $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ *— набор различных комплексных чисел, отличных от нуля. Тогда если* $\lim_{n\to\infty}m(n)/\sqrt{n}=0$, *то равномерно по всем таким* $\overrightarrow{m}$, *что* $0\leqslant|m|\leqslant m(n)$, *при* $n\to+\infty$ *и* $j=1,2,\dots,k$
$$ e^{\lambda_j z}-\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)= $$
$$ =(-1)^{|m|}\,\lambda_j^{n+m_j+1}\,\Omega_j(k)\,\frac{m_j!\,n!\,z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!\,(n+m_j+1)!}\,(1+o(1)), $$
где $\Omega_j(1)=1$, $\Omega_j(k)=\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^k(\lambda_\nu-\lambda_j)^{m_\nu}$, *если* $k>1$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, заметим, что при сделанных в ней предположениях из известного асимптотического равенства А. И. Аптекарева (см. [5])
$$ Q_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)=\exp\left\{-\frac{\sum_{\nu=1}^k\lambda_\nu m_\nu}{n+|m|}\,z\right\}(1+o(1))\,, \tag{5} $$

справедливого при $n+|m|\to\infty$, следует, что $Q_{n,\vec{m}}(z)=1+o(1)$, если $n+|m|\to\infty$. Поэтому достаточно найти асимптотику остаточных функций $R^j_{n,\vec{m}}$. Для этого докажем следующий аналог тождества ван Россума в случае произвольного $k\geqslant 1$.

Теорема 2. *При любом $k\geqslant 1$ и $j=1,2,\ldots,k$*

$$R^j_{n,\vec{m}}(z;F_\lambda)=(-1)^{|m|}\,\lambda_j^{n+m_j+1}\;\Omega_j(k)\;\frac{n!\;z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{|m|-m_j}a_l\,\frac{(m_j+l)!}{(n+m_j+l+1)!}\;{}_1F_1(m_j+l+1,n+m_j+l+2;\lambda_j z),\tag{6}$$

где $a_0=1$, а при $l\geqslant 1$

$$a_l=\sum_{\substack{t_1+\ldots+t_k-t_j=l\\ t_\nu\geqslant 0}}\left\{\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}C_{m_\nu}^{t_\nu}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_\nu-\lambda_j}\right)^{t_\nu}\right\}.$$

Доказательство. При $k=1$ тождества (3), (6) совпадают. Поэтому далее считаем, что $k>1$. Сделав замену $x=\lambda_j t$ переменной интегрирования в интеграле, определяющем в (1) остаточную функцию, получим

$$R^j_{n,\vec{m}}(z)=\lambda_j^{n+m_j+1}\frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!}\int_0^1 t^n(t-1)^{m_j}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}(\lambda_j t-\lambda_\nu)^{m_\nu}\,e^{\lambda_j(1-t)z}dt.\tag{7}$$

Интеграл в (7) обозначим через $I_j(z)$. Сделаем в этом интеграле замену переменной интегрирования $u=1-t$, а затем вынесем за скобки множитель $\Omega_j(k)$. Тогда

$$I_j(z)=(-1)^{|m|}\;\Omega_j(k)\int_0^1(1-u)^n\,u^{m_j}\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}\Big(1+\frac{\lambda_j\,u}{\lambda_\nu-\lambda_j}\Big)^{m_\nu}e^{\lambda_j uz}du.\tag{8}$$

Обозначим интеграл в (8) через $J_j(z)$. Если теперь, применив биномиальную формулу Ньютона, воспользоваться известным тождеством (см., например, [5])

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}\left\{\sum_{t_\nu=0}^{m_\nu}C_{m_\nu}^{t_\nu}\left(\frac{\lambda_j u}{\lambda_\nu-\lambda_j}\right)^{t_\nu}\right\}=\sum_{l=0}^{|m|-m_j}a_l\,u^l,\tag{9}$$

то интеграл $J_j(z)$ можно представить в виде

$$J_j(z)=\int_0^1(1-u)^n\,u^{m_j}\left\{\sum_{l=0}^{|m|-m_j}a_l\,u^l\right\}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\lambda_j\,z)^p}{p!}\,u^p\,du=$$

$$=\sum_{l=0}^{|m|-m_j}a_l\left\{\sum_{p=0}^{\infty}B(m_j+p+l+1;n+1)\frac{(\lambda_j\,z)^p}{p!}\right\}=$$

$$=n!\sum_{l=0}^{|m|-m_j}a_l\,\frac{(m_j+l)!}{(n+m_j+l+1)!}\;{}_1F_1(m_j+l+1,n+m_j+l+2;\lambda_j z)\,.\tag{10}$$

Здесь и далее $B(u;v)$ — бета-функция Эйлера. Поэтому из равенств (7), (8) следует (6). Теорема 2 доказана. $\square$

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Обозначим через $H_j(z)$ сумму, стоящую в конце равенств (6) и (10). Тогда, вынося за скобки первое слагаемое этой суммы, получим

$$H_j(z) = \frac{m_j!}{(n+m_j+1)!}\,{}_1F_1(m_j+1, n+m_j+2; \lambda_j z)\times$$

$$\times\left\{1 + \sum_{l=1}^{|m|-m_j} a_l \,\frac{(m_j+l)!}{(n+m_j+l+1)!}\,\frac{(n+m_j+1)!}{m_j!}\,\frac{{}_1F_1(m_j+l+1, n+m_j+l+2; \lambda_j z)}{{}_1F_1(m_j+1, n+m_j+2; \lambda_j z)}\right\}.$$

Из (4) следует, что отношение двух гипергеометрических функций в правой части последнего равенства при $n \to \infty$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ сходится к 1. Поэтому для достаточно больших значений n модуль второго слагаемого суммы в фигурных скобках предыдущего равенства не превышает

$$2\sum_{l=1}^{|m|-m_j} a_l^* \,\frac{m_j+1}{n+m_j+2}\,\frac{m_j+2}{n+m_j+3}\cdots\frac{m_j+l}{n+m_j+l+1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l^* \left(\frac{|m|}{n+|m|}\right)^l - 1\right\},$$

где a_l^* определяется так же, как и a_l, с той лишь разницей, что вместо $\lambda_j/(\lambda_\nu - \lambda_j)$ следует взять $|\lambda_j|/|\lambda_\nu - \lambda_j|$. При доказательстве последнего неравенства воспользовались тем, что при $t \geqslant 1$ функция $\varphi(t) = (m_j+t)/(n+m_j+1+t)$ является монотонно возрастающей. Теперь, применяя ещё раз тождество (9), в котором вместо $\lambda_j/(\lambda_\nu - \lambda_j)$ стоит $|\lambda_j|/|\lambda_\nu - \lambda_j|$, придём к равенству

$$\sum_{l=0}^{|m|-m_j} a_l^* \left(\frac{|m|}{n+|m|}\right)^l = \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}\left(1 + \frac{|\lambda_j|}{|\lambda_\nu - \lambda_j|}\,\frac{|m|}{n+|m|}\right)^{m_\nu}.$$

Остаётся заметить, что, поскольку $\lim_{n\to\infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, правая часть последнего равенства при $n \to \infty$ стремится к 1. Теорема 1 доказана. $\square$

2. Основной результат: $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — корни уравнения $z^k = 1$

В условиях теоремы 1 имеются существенные ограничения на рост порядка мультииндекса: $|m| = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$. Рассмотрим один частный случай, когда эти ограничения удаётся снять.

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ — корни уравнения $z^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{11}$$

где i — мнимая единица. Заметим, что для любого $j = 1, 2, \ldots, k$

$$\lambda_j \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}(\lambda_\nu - \lambda_j) = \prod_{\nu=2}^{k}(\lambda_\nu - 1) = (-1)^{k-1}\,k. \tag{12}$$

Равенства (12) легко обосновать, если в левой и правой частях тождества

$$\frac{z^k-\lambda_j^k}{z-\lambda_j}=\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{k}(z-\lambda_\nu)$$

перейти к пределу при $z\to\lambda_j$.

Рассмотрим систему экспонент $F_\lambda=\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j определяются равенствами (11). В работе [13] в диагональном случае, когда $n=m_1=\ldots=m_k$, с помощью метода перевала получены следующие асимптотические равенства: при $k>1$ и $j=1,2,\ldots,k$

$$e^{\lambda_j z}-\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)=(-1)^n\,\lambda_j^{n+1}\,G_k(n)\frac{z^{n+kn+1}}{(n+kn)!}\,e^{\lambda_j\left(1-\sqrt[k]{1/(k+1)}\,\right)z}\,(1+o(1)), \tag{13}$$

где

$$G_k(n):=\sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}}\left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

Теорема 3. *Пусть* $m_1=\ldots=m_k=m$, *а* $n\in\mathbb{Z}^1_+$. *Тогда для любого* $k\geqslant 1$ *при* $n+m\to\infty$ *и* $j=1,2,\ldots,k$

$$e^{\lambda_j z}-\pi^j_{n,\overrightarrow{m}}(z;F_\lambda)=(-1)^m\,\lambda_j^{n+1}\times$$
$$\times\frac{1}{k}\,B\Big(m+1;\frac{n+1}{k}\Big)\,\frac{z^{n+km+1}}{(n+km)!}\,e^{\lambda_j\left(1-\sqrt[k]{n/(n+km)}\,\right)z}\,e^{(m\sum_{\nu=1}^k\lambda_\nu)z/(n+km)}(1+o(1)). \tag{14}$$

Доказательство. При $k=1$ асимптотическое равенство (14) совпадает с равенством Д. Браесса (2). Поэтому далее считаем, что $k>1$. В этом случае $\sum_{j=1}^k\lambda_j=0$. Тогда из (5) следует, что $Q_{n,\overrightarrow{m}}(z)=1+o(1)$ при $n+m\to\infty$. Необходимо найти асимптотику остаточной функции

$$R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z)=(-1)^m\,\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+km+1}}{(n+km)!}\int_0^{\lambda_j}x^n\,(1-x^k)^m\,e^{-zx}dx\,. \tag{15}$$

Обозначим через $I_j(z)$ интеграл в (15). Сделав в этом интеграле замену переменной интегрирования $x=\lambda_j u$, получим

$$I_j(z)=\lambda_j^{n+1}\int_0^1 u^n\,(1-u^k)^m\,e^{-\lambda_j uz}du\,. \tag{16}$$

Рассмотрим интегралы

$$J_p=\int_0^1(1-u^k)^m\,u^{n+p}\,du,\quad p=0,1,2,\ldots.$$

Легко заметить, что

$$J_p=\frac{1}{k}\int_0^1(1-u^k)^m\,(u^k)^{\frac{n-k+p+1}{k}}\,du^k=\frac{1}{k}\,B\Big(m+1;\frac{n+p+1}{k}\Big). \tag{17}$$

Определим теперь u_0 из равенства[1] $J_1 - u_0 J_0 = 0$. Выразив бета-функцию Эйлера через гамма-функцию и применив формулу Стирлинга, при $n+m \to \infty$ получим, что

$$u_0 = \frac{J_1}{J_0} = \sqrt[k]{\frac{n}{n+km}}\,(1+o(1)). \tag{18}$$

Отсюда, в частности, следует, что $u_0 \in (0,1)$ при достаточно большом $n+m$.

Для нахождения асимптотики интеграла $I_j(z)$ разложим функцию $\exp\{-\lambda_j uz\}$ в ряд Тейлора в окрестности точки u_0. Тогда

$$e^{-\lambda_j uz} = e^{-\lambda_j u_0 z} e^{-\lambda_j z(u-u_0)} = e^{-\lambda_j u_0 z}\{1 - \lambda_j z(u-u_0) + \rho_u(z)\},$$

где при $|z| < L$ и $u \in [0,1]$

$$|\,\rho_u(z)\,| \leqslant |\lambda_j|^2\,|\,u-u_0\,|^2 \left\{\frac{L^2}{2!} + \ldots + \frac{L^n}{n!} + \ldots\right\} \leqslant L_1\,|\,u-u_0\,|^2 .$$

Здесь и далее L, L_1 — абсолютные постоянные. Учитывая выбор u_0, (16)–(18), приходим к равенству

$$I_j(z) = \lambda_j^{n+1}\, e^{-\lambda_j u_0 z}\left\{\int_0^1 (1-u^k)^m\, u^n\, du + \int_0^1 (1-u^k)^m\, u^n\, \rho_u(z)\, du\right\} =$$
$$= \lambda_j^{n+1}\, e^{-\lambda_j u_0 z}\left\{\frac{1}{k}\, B\Big(m+1; \frac{n+1}{k}\Big) + A_\rho(z)\right\},$$

где

$$|A_\rho(z)| \leqslant L_1 \int_0^1 (1-u^k)^m\, u^n\, (u-u_0)^2\, du = L_1 \int_0^1 (1-u^k)^m\, u^n\, (u^2 - uu_0)\, du =$$
$$= L_1\left(\frac{J_2}{J_0} - \left(\frac{J_1}{J_0}\right)^2\right) J_0.$$

При доказательстве предыдущего неравенства воспользовались представлением $(u-u_0)^2 = (u^2 - uu_0) - u_0(u-u_0)$ и равенством $J_1 - u_0 J_0 = 0$. Учитывая равенства (17), известное выражение бета-функции Эйлера через гамма-функции Эйлера и используя формулу Стирлинга, при $n+m \to \infty$ получим

$$\frac{J_2}{J_0} \sim \left(\frac{n-k+3}{n+km+3}\right)^{2/k}, \qquad \left(\frac{J_1}{J_0}\right)^2 \sim \left(\frac{n-k+2}{n+km+2}\right)^{2/k}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что при $n+m \to \infty$

$$I_j(z) = \lambda_j^{n+1}\, e^{-\lambda_j u_0 z}\, \frac{1}{k}\, B\Big(m+1; \frac{n+1}{k}\Big)\,(1+o(1)). \tag{19}$$

Поскольку при $n+m \to \infty$ $Q_{n,\vec{m}}(z) = 1 + o(1)$, то из (15), (16) и (19) вытекает асимптотическое равенство (14). Теорема 3 доказана. $\square$

В заключение сделаем два замечания.

[1] Выбор точки u_0 определён тем, что она асимптотически близка к точке максимума $u_0^* = \sqrt[k]{n/(n+km)}$ функции $\ln u^n\,(1-u^k)^m$, $u \in (0,1)$ (подробнее см. [13]).

При $n \to \infty$

$$\frac{1}{k} B\Big(n+1; \frac{n+1}{k}\Big) \sim G_k(n).$$

Поэтому, если $m = n$, то асимптотические равенства (13) и (14) совпадают. Таким образом, теорема 1 работы [13] является следствием теоремы 3. Обращаем внимание на то, что эти теоремы доказаны совершенно разными методами.

Далее, нетрудно показать, что если $m = o(\sqrt{n})$, то при $n \to \infty$

$$\frac{1}{k} B\Big(m+1; \frac{n+1}{k}\Big) \sim k^m \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!}. \tag{20}$$

Принимая во внимание равенства (12), при $m_1 = \ldots = m_k = m$ получаем, что

$$(-1)^{|m|} \lambda_j^{n+m_j+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^{k} (\lambda_\nu - \lambda_j)^{m_\nu} = (-1)^m \lambda_j^{n+1} k^m .$$

Поэтому теоремы 1 и 3 согласуются. Отметим также, что если при $n \to \infty$ условие $m = o(\sqrt{n})$ не выполняется, то эквивалентность в (20) нарушается. Это значит, что условие $m = o(\sqrt{n})$ в теореме 1 необходимо.

Список литературы

1. *Stahl H.* Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2002. Vol. 14. P. 195–222.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle. Paris : Gauthier-Villars, 1874. 33 p.
3. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные функции и ортогональность. Москва : Наука, 1988. 256 с.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig ; Berlin : Teubner, 1929. 524 p.
5. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестник Московского университета. Серия 1 : Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.
6. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II // Journal of Approximation Theory. 1984. Vol. 40, iss. 4. P. 375–379. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90012-1
7. *Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F.* Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007. Vol. 207, iss. 2. P. 227–244. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.010
8. *Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F.* Asymptotique des approximants de Hermite – Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann – Hiebert // Comptes Rendus Mathematique. 2003. Vol. 336, iss. 11. P. 893–896. https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00221-8
9. *Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: A Riemann – Hiebert approach // Constructive Approximation. 2005. Vol. 21, iss. 3. P. 351–412. https://doi.org/10.1007/s00365-004-0579-0
10. *Stahl H.* Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function // Constructive Approximation. 2006. Vol. 23, iss. 2. P. 121–164. https://doi.org/10.1007/s00365-005-0606-9
11. *Старовойтов А. П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып 1, ч. 2. С. 87–91. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-87-91

12. *Старовойтов А. П.* Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера // Известия вузов. Математика. 2014. № 9. С. 59–68.
13. *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2018. Т. 301. С. 241–258. https://doi.org/10.1134/S0371968518020188
14. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. Москва : Наука, 1987. 432 с.
15. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 2009. Vol. 1932, iss. 166. P. 118–136. https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.118
16. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 2009. Vol. 1932, iss. 166. P. 137–150. https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.137
17. *Mahler K.* Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms // Mathematische Annalen. 1967. Vol. 168, iss. 1. P. 200–227. https://doi.org/10.1007/BF01361554
18. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio Mathematica. 1968. Vol. 19, iss. 2. P. 95–166.
19. *Chudnovsky G. V.* Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications : Lecture Notes in Mathematics / eds. D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky. Vol. 925. New York ; Berlin : Springer-Verlag, 1982. P. 299–322. https://doi.org/10.1007/BFb0093516
20. *Van Rossum H.* Systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with the Padé table. II // Indagationes Mathematicae (Proceedings). 1955. Vol. 58. P. 526–534. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(55)50072-2
21. *Wielonsky F.* Asymptotics of diagonal Hermite – Padé approximants to e^z // Journal of Approximation Theory. 1997. Vol. 90, iss. 2. P. 283–298. https://doi.org/10.1006/jath.1996.3081
22. *Астафьева А. В., Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 6. С. 3–26. https://doi.org/10.4213/sm8470

References

1. Stahl H. Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 2002, vol. 14, pp. 195–222.
2. Hermite C. *Sur la fonction exponentielle*. Paris, Gauthier-Villars, 1874. 33 p.
3. Nikishin E. M., Sorokin V. N. *Rational Approximations and Orthogonality*. Providence, AMS, 1991. 221 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1988. 256 p.).
4. Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig, Berlin, Teubner, 1929. 524 p.
5. Aptekarev A. I. On the convergence of rational-approximations to the set of exponents. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika*, 1981, no. 1, pp. 68–74 (in Russian).
6. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II. *Journal of Approximation Theory*, 1984, vol. 40, iss. 4, pp. 375–379. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90012-1
7. Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, vol. 207, iss. 2, pp. 227–244. https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.010.

8. Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F. Asymptotique des approximants de Hermite – Padé quadratiques de la fonction exponentielle et problèmes de Riemann – Hiebert. *Comptes Rendus Mathematique*, 2003, vol. 336, iss. 11, pp. 893–896. https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00221-8
9. Kuijlaars A. B. J., Van Assche W., Wielonsky F. Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: A Riemann – Hiebert approach. *Constructive Approximation*, 2005, vol. 21, iss. 3, pp. 351–412. https://doi.org/10.1007/s00365-004-0579-0
10. Stahl H. Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function. *Constructive Approximation*, 2006, vol. 23, iss. 2, pp. 121–164. https://doi.org/10.1007/s00365-005-0606-9
11. Starovoitov A. P. Hermitian approximation of two exponents. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 87–91 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-87-91
12. Starovoitov A. P. The asymptotic form of the Hermite – Padé approximations for a system of Mittag – Leffler functions. *Russian Mathematics*, 2014, vol. 58, no. 9, pp. 49–56. https://doi.org/10.3103/S1066369X14090060
13. Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximants of the Mittag – Leffler functions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 301, pp. 228–244. https://doi.org/10.1134/S0081543818040181
14. Klein F. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Vol. 1: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Berlin, Springer, 2016. 312 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1987. 432 p.).
15. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009, vol. 1932, iss. 166, pp. 118–136. https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.118
16. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, II. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 2009, vol. 1932, iss. 166, pp. 137–150. https://doi.org/10.1515/crll.1932.166.137
17. Mahler K. Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms. *Mathematische Annalen*, 1967, vol. 168, iss. 1, pp. 200–227. https://doi.org/10.1007/BF01361554
18. Mahler K. Perfect systems. *Compositio Mathematica*, 1968, vol. 19, iss. 2, pp. 95–166.
19. Chudnovsky G. V. Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π. In: Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V., eds. *The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications: Lecture Notes in Mathematics*, vol. 925. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1982, pp. 299–322. https://doi.org/10.1007/BFb0093516
20. Van Rossum H. Systems of orthogonal and quasi orthogonal polynomials connected with the Padé table. II. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 1955, vol. 58, 526–534. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(55)50072-2
21. Wielonsky F. Asymptotics of diagonal Hermite – Padé approximants to e^z. *Journal of Approximation Theory*, 1997, vol. 90, iss. 2, pp. 283–298. https://doi.org/10.1006/jath.1996.3081
22. Astafieva A. V., Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximation of exponential functions. *Sbornik: Mathematics*, 2016, vol. 207, no. 6, pp. 769–791. https://doi.org/10.1070/SM8470

Поступила в редакцию / Received 03.01.2020
Принята к публикации / Accepted 14.05.2020
Опубликована / Published 31.05.2021