Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 173–181
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 173–181

Научная статья
УДК 501.1
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181

О периодических решениях уравнения Рэлея

В. Б. Тлячев✉, А. Д. Ушхо, Д. С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Россия, 385000, г. Майкоп, ул. Первомайская, д. 208

Тлячев Вячеслав Бесланович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики, Tlyachev@adygnet.ru, https://orcid.org/0000-0001-6431-316X
Ушхо Адам Дамирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Uschho76@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-0453-7513
Ушхо Дамир Салихович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Damirubych@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1311-5785

Аннотация. Получены новые достаточные условия существования и единственности периодического решения системы дифференциальных уравнений, эквивалентной уравнению Рэлея. В отличие от известных результатов доказательство существования хотя бы одного предельного цикла системы основано на применении кривых топографической системы Пуанкаре, дополненной новыми конструкциями. Единственность предельного цикла, окружающего сложный неустойчивый фокус, доказывается методом Отрокова.

Ключевые слова: Пуанкаре, уравнение Рэлея, уравнение ван дер Поля, предельный цикл, существование, единственность

Для цитирования: *Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С.* О периодических решениях уравнения Рэлея // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 173–181. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181

On periodic solutions of Rayleigh equation

V. B. Tlyachev✉, A. D. Ushkho, D. S. Ushkho

Adyghe State University, 208 Pervomayskaya St., Maykop 385000, Russia

Vyacheslav B. Tlyachev, tlyachev@adygnet.ru, https://orcid.org/0000-0001-6431-316X
Adam D. Ushkho, Uschho76@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-0453-7513
Damir S. Ushkho, Damirubych@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1311-5785

Abstract. New sufficient conditions for the existence and uniqueness of a periodic solution of a system of differential equations equivalent to the Rayleigh equation are obtained. In contrast to

© Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С., 2021

the known results, the existence proof of at least one limit cycle of the system is based on applying curves of the topographic Poincare system. The uniqueness of the limit cycle surrounding a complex unstable focus is proved by the Otrokov method.

Keywords: Poincare, Rayleigh equation, van der Pol equation, limit cycle, existence, uniqueness

For citation: Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. On periodic solutions of Rayleigh equation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 173–181 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-173-181

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Введение

Английский физик J. W. Strutt, более известный как барон (лорд) Рэлей — один из основоположников теории колебаний, в книге [1, с. 137] выписал для моделирования звуковых колебаний тростникового кларнета уравнение

$$\ddot{u} + k\dot{u} + n^2 u = 0, \tag{1}$$

которое впоследствии было названо его именем. Это уравнение позволило решить основные задачи акустики.

Уравнение Рэлея модифицируют, обобщают и представляют в различных формах записи. Например, его записывают в виде

$$\ddot{y} - (\varepsilon - \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0. \tag{2}$$

Уравнение 2 путем замены $x = \sqrt{3}\dot{y}$ сводится к другому, весьма известному в теории колебаний, уравнению лампового генератора — уравнению ван дер Поля (см. обзор [2, с. 7] и фундаментальную монографию [3, с. 385]):

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{3}$$

Отметим, что из уравнения (3) можно получить уравнение (2). Таким образом, можно сказать, что уравнение Рэлея в определенном смысле равносильно уравнению ван дер Поля [4, с. 67].

Уравнение Рэлея порой записывают в более универсальном виде [5, с. 99]

$$x''(t) + f(x'(t)) + g(t, x(t)) = 0. \tag{4}$$

Это дает возможность расширить круг явлений, которые моделирует уравнение Рэлея. Например, в работе [6] это уравнение было обобщено на вязкие жидкости.

Основными вопросами, рассматриваемыми в исследованиях, связанных с уравнением Рэлея, были вопросы существования, единственности и устойчивости периодических решений [7]. При этом постоянно открываются новые стороны уравнения Рэлея. Например, в [8] уже рассматриваются разновидности неавтономных уравнений Рэлея с запаздывающим аргументом, а в работе [9] для возмущенного уравнения Рэлея выводятся некоторые критерии, гарантирующие существование, единственность и асимптотическую устойчивость по Ляпунову периодических решений этого уравнения. В работе [10] изучается уравнение Рэлея с сингулярностью, которое моделирует виброударные физические системы. Доказательство основного результата работы [10] опирается на топологические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В связи с развитием теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом возникло новое направление исследований уравнения Рэлея. Последние два десятилетия в основном все работы связаны именно с этим направлением (см. например, по этому поводу работу [11]). Кроме этого, рассматриваются различные модификации уравнения Рэлея. Например, добавляется ненулевая правая часть — сила. При этом для исследования привлекаются различные инструменты, например, такие, как функциональный анализ [12] и компьютерное (численное) моделирование [13], где приводится сравнение результатов численного исследования периодических решений уравнения Рэлея с известными решениями для квазилинейной постановки.

Таким образом, исследования, связанные с уравненим Рэлея, не теряют своей актуальности.

Основные результаты

В данной работе рассматривается уравнение Рэлея в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - F\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0, \tag{5}$$

где F — функция только одного аргумента $\frac{dx}{dt}$. Уравнение (5) возникает при анализе работы схемы электронного триода с обратной связью.

Автор монографии [14, с. 252] отмечает, что легко построить автоколебательные системы, имеющие любое число предельных циклов. Однако, по его утверждению, доказательство единственности предельного цикла для какого-либо конкретного случая является нелегкой задачей.

Один из методов доказательства единственности предельного цикла системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = F(v) - x, \end{cases} \tag{6}$$

эквивалентной уравнению Рэлея (5), основан, согласно утверждению Дж. Стокера, на идее известных математиков Левинсона и Смита [15]. Она предполагает доказательство единственности предельного цикла в два этапа.

На первом этапе доказывается утверждение: если изолированный устойчивый предельный цикл содержит внутри себя другой такой же устойчивый предельный цикл и при этом в кольце между ними нет состояний равновесия системы (6), то между этими циклами существует по крайней мере еще один предельный цикл.

На втором этапе доказывается, что все возможные предельные циклы будут изолированными и устойчивыми. В совокупности с доказанным на первом этапе утверждением это означает, что у системы (6) может существовать самое большее один цикл.

В качестве достаточных условий существования хотя бы одного предельного цикла системы (6), окружающего начало координат, в монографии [14, с. 253] приведены следующие условия:

1) $F(v) = G(v) - \alpha v \quad (\alpha > 0)$;
2) $G'(v) > 0$, $G'(0) > \alpha$;
3) $G(-v) = -G(v)$;
4) $|G(v)| < C$.

В этой же работе доказывается, что для существования единственного предельного цикла системы (6) наряду с выполнением указанных четырех условий добавляются еще два условия: $F(v)$ имеет непрерывную производную второго порядка и $G''(v) < 0$, $v > 0$.

Авторы монографии [7] и статьи [16] исследовали вопрос о периодических решениях уравнения Рэлея.

Для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - F(y), \end{cases} \tag{7}$$

эквивалентной уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(\frac{dx}{dt}\right) + g(x) = 0, \tag{8}$$

доказана теорема [7], согласно которой система (7) имеет, по крайней мере, один предельный цикл, если выполняются условия:

а) $F(y) \cdot y \leqslant 0$ для $|y| \leqslant \eta_1 \quad (\eta_1 > 0)$; $F(y)\operatorname{sgn} y \geqslant \varepsilon > 0$ для $|y| \geqslant \eta_2 > \eta_1$ $\max|F(y)| = M > 0$; $|y| < \eta 4$;

б) $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant M + \varepsilon$ для $|x| \geqslant \delta$.

Доказательство этой теоремы проводится путем построения кольцевой области, удовлетворяющей условиям теоремы Пуанкаре – Бендиксона [14].

В [16] доказана теорема о достаточных условиях существования хотя бы одного предельного цикла системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - yf(y), \end{cases} \tag{9}$$

эквивалентной уравнению (8), где $F\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $g(x) = \omega^2 x$.

Эти условия позволяют выделить кольцевую область Пуанкаре – Бендиксона, т. е. оценить местоположение предельного цикла системы (9) на фазовой плоскости.

В данной работе находятся достаточные условия существования периодического решения, а также условия существования и единственности такого решения системы (9). Доказательство существования хотя бы одного предельного цикла системы (9) основано на применении кривых топографической системы Пуанкаре [17] и некоторых конструкций авторов. Единственность предельного цикла, окружающего сложный фокус, доказывается с использованием результатов монографии [18].

Посредством преобразования

$$\begin{cases} x_1 = \omega x, \\ y_1 = y, \end{cases}$$

но с условием сохранения старых обозначений фазовых переменных перейдем от системы (9) к системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - yf(y) \equiv Q(x, y), \quad \omega > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условиям:*

1) f — дифференцируема;

2) $f(-y) = f(y)$, т. е. функция f четная;

3) $\lim\limits_{y \to \infty} f(y) = +\infty$;

4) $f(y) < 0$ для $|y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$, либо $f(y) < 0$ для $0 < |y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$ $(a > 0)$.

Тогда система (10) *имеет, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивое антиседло (узел или фокус).*

Доказательство. Рассмотрим в качестве топографической системы Пуанкаре семейство окружностей

$$G(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C. \tag{11}$$

Полная производная функции G в силу системы (10) запишется в виде

$$\frac{dG}{dt} = -2y^2 f(y). \tag{12}$$

Из (12) следует, что контакт траекторий системы (10) с окружностями семейства (11) на прямой $y = 0$ «ложный» [17]. Кроме этого, прямые $y = \pm a$ являются прямыми контакта траекторий системы (10) с кривыми семейства (11). В силу условия 4) выражение (12) неотрицательно внутри круга $\Omega : x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Отсюда следует, что $(0; 0)$ — неустойчивое антиседло и у системы (10) отсутствуют предельные циклы, окружающие точку $(0; 0)$ и расположенные внутри Ω.

Пусть $b > a$. Очевидно, $A(-\sqrt{b^2 - a^2}; a)$, $B(\sqrt{b^2 - a^2}; a)$ — точки пересечения прямой $y = a$ с окружностью $l : x^2 + y^2 = b^2$. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что $M(b^2/\sqrt{b^2 - a^2}; 0)$ — точка пересечения с осью Ox касательной, проведенной к окружности l в точке B.

Покажем, что существует число $b > a$ такое, что выполняется неравенство

$$b^2/\sqrt{b^2 - a^2} \leqslant \varphi(-b), \tag{13}$$

где $x = -\frac{y}{\omega} f(y) \equiv \varphi(y)$.

В самом деле, неравенство (13) равносильно неравенству

$$1/\sqrt{1 - a^2/b^2} \leqslant \frac{f(b)}{\omega}. \tag{14}$$

Из неравенства (14) и условия 3) следует существование такого числа $b > a$, что выполняется неравенство (13), каковы бы ни были фиксированные числа a и ω.

Заметим, что при $t \to +\infty$ траектории системы (10) входят внутрь окружностей семейства (11) в области $S = \{(x; y)/|y| > a, -\infty < x < +\infty\}$.

Обозначим через L траекторию системы (10), проходящую через точку $W\,(\varphi(b); b)$ в момент времени $t = t_0$, и проследим ее поведение при $t > t_0$. Для этого обратимся к рисунку.

Так как $\left(\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)'_x = -\frac{1}{y}$, то в полуплоскости $y > 0$ $(y < 0)$ траек-

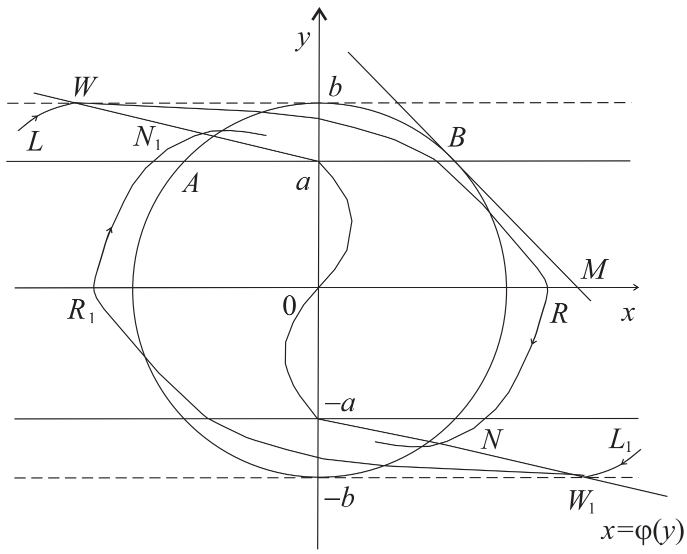

Рис. Картина движения по траекториям L и L_1

Fig. Motion pattern along the trajectories L and L_1

тория системы (10) имеет выпуклость вверх (вниз). Следовательно, траектория L при $t > t_0$ первый раз пересечет ось Ox в точке R, лежащей слева от точки M. В силу отмеченного характера выпуклости траектории L и неравенства (13) L пересечет изоклину нуля $x = \varphi(y)$ первый раз при $t > t_0$ в точке N, расположенной между прямыми $y = -b$ и $y = -a$. Поскольку векторное поле (10) симметрично относительно начала координат $O(0;0)$, траектория L_1, проходящая в момент $t = t_0$ через точку W_1, при $t > t_0$ пересечет изоклину нуля $x = \varphi(y)$ первый раз в точке N_1, расположенной между прямыми $y = a$ и $y = b$. Таким образом, траектории L и L_1 приближаются при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия $O(0;0)$ в виде спиралей. Так как $O(0;0)$ — неустойчивое антиседло, то существует хотя бы один устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат (нечетное число циклов с учетом их кратностей). Теорема доказана. □

Замечание. Предельный цикл, существование которого доказывается в теореме 1, расположен в области $\Omega = \left\{(x;y)/|x| < b_0^2/\sqrt{b_0^2 - a^2},\ |y| < b_0\right\}$, где b_0 — корень уравнения $b^2/\sqrt{b^2 - a^2} - \varphi(-b) = 0$ и пересекает прямые $y = \pm a$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - y[-ma^2 + (m - na^2)y^2 + (n - \delta a^2)y^4 + \delta y^6]. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь

$$\begin{gathered} f(y) = -ma^2 + (m - na^2)y^2 + (n - \delta a^2)y^4 + \delta y^6 \equiv (y^2 - a^2)(m + ny^2 + \delta y^4), \\ \omega > 0, \quad \delta > 0, \quad m > 0, \quad |n| < 2\sqrt{m\delta}. \end{gathered} \tag{16}$$

Система (15) при выполнении условий (16) удовлетворяет всем условиям теоремы 1. В частности, при конкретных численных значениях $b = 1/2$, $a = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{\sqrt[3]{4761}}} = a_0 \approx 0.111$ в области $\Omega = \{(x;y)/|x| < 1.05;\ |y| < 0.5\}$ расположен хотя бы один устойчивый предельный цикл, пересекающий прямые $y = \pm a_0$ и окружающий неустойчивое антиседло с координатами $(0;0)$.

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет условиям:*
1) имеет непрерывные производные до второго порядка включительно;
2) $f(-y) = f(y)$;
3) $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = +\infty$;
4) $f'(0) = f(0) = 0$;
5) $f(y) < 0$ для $0 < |y| < a$, $f(y) > 0$ для $|y| > a$ $(a > 0)$;
6) $\Phi(y) = y^2 f''(y) + yf'(y) - f(y) \geqslant 0$.
Тогда система (10) *имеет единственный, причем устойчивый, предельный цикл, окружающий сложный неустойчивый фокус $O(0;0)$.*

Доказательство. Согласно условию 4) $y = 0$ — нуль функции f, имеющий кратность не ниже второй, следовательно, $\Phi(y) \equiv y^2\Phi_0(y)$, где $\Phi_0(y) \geqslant 0$.

Рассмотрим пару функций $\alpha(x,y) = 0$, $\beta(x,y) = -\frac{Q'_y}{\omega y}$, удовлетворяющих функциональному уравнению $\alpha Q - \beta P = P'_x + Q'_y$ [18]. Здесь $P'_x = 0$. Функция $D(x,y) = \alpha'_x(x,y) + \beta'_y(x,y)$ задается формулой $D(x,y) = \frac{Q'_y - yQ''_{y^2}}{\omega y^2}$.

Учитывая, что $Q'_y - yQ''_{y^2} \equiv \Phi(y)$, получим $D(x,y) = \frac{\Phi_0(y)}{\omega}$ и

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\Phi_0(y)}{\omega}(x^2+y^2) = 0. \tag{17}$$

Из (17) согласно [18, теорема 4.4] следует, что система (10) либо совсем не имеет предельных циклов, либо имеет только простые циклы. Принимая во внимание теорему 1, приходим к выводу, что система (10) имеет только простые предельные циклы. Допустим, что система (10) имеет более одного предельного цикла. Тогда ближайший к точке $O(0;0)$ цикл $\bar{l}$ будет устойчивым, а следующий цикл $\bar{l_1}$ — неустойчивым.

Причем изображающая точка обходит циклы $\bar{l}$ и $\bar{l_1}$ по часовой стрелке.

Вычисления показывают, что

$$\left(\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)'_{|a|} = \frac{2|a|f_0(y)}{\omega}, \tag{18}$$

где $f_0(y) \geqslant 0$.

С учетом направления на циклах $\bar{l}$ и $\bar{l_1}$ и знака производной (18) приходим к выводу, что с увеличением $|a|$ векторное поле системы (10) вращается против хода часовой стрелки. Это в свою очередь означает, что цикл $\bar{l}$ расширяется, а $\bar{l_1}$ сужается с увеличением $|a|$. Поскольку полосу плоскости между прямыми $y = a$ и $y = -a$ можно расширять неограниченно, то найдется значение $|a|$, при котором циклы $\bar{l}$ и $\bar{l_1}$ исчезнут. Это возможно только при условии, что $\bar{l}$ и $\bar{l_1}$ в какой-то момент сольются в один, полуустойчивый предельный цикл. Это противоречит теореме 4.4 [18]. Теорема доказана. □

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega x - y^3(y^2-a^2)(\alpha+\beta y^2). \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $f(y) = y^2(y^2-a^2)(\alpha+\beta y^2)$, $\Phi(y) = 35\beta y^2(y^2-\mu)(y^2-\nu)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\mu = \frac{15\beta a^2 - 15\alpha + \sqrt{225\alpha^2 - 30\alpha\beta a^2 + 225\beta^2 a^4}}{70\beta}$$

и

$$\nu = \frac{15\beta a^2 - 15\alpha - \sqrt{225\alpha^2 - 30\alpha\beta a^2 + 225\beta^2 a^4}}{70\beta}.$$

Нетрудно проверить, что $0 < \mu < a^2$, $\nu < 0$. Следовательно, $\Phi(y) \geqslant 0$ для любого y, удовлетворяющего неравенству $|y| \geqslant a$. Система (19) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и поэтому имеет единственный устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый сложный фокус $O(0;0)$.

Список литературы

1. *Стретт Дж. В. (лорд Рэлей)*. Теория звука : в 2 т. Москва : ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 503 с.
2. *Кузнецов А. П., Селиверстова Е. С., Трубецков Д. И., Тюрюкина Л. В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 3–42. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42

3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. Москва : Физматгиз, 1959. 916 с.
4. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.* Лекции по нелинейной динамике. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 516 с.
5. *Gains R. E., Mawhin J. L.* Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1977. Vol. 568. 241 p. https://doi.org/10.1007/BFb0089537
6. *Plesset M. S., Prosperetti A.* Bubble dynamics and cavitation // Annual Review of Fluid Mechanics. 1977. Vol. 9. P. 145–185. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.09.010177.001045
7. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1974. 318 с.
8. *Wang Z.* On the existence of periodic solutions of Rayleigh equations // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. 2005. Vol. 56, № 4. P. 592–608. https://doi.org/10.1007/s00033-004-2061-z
9. *Wang Y., Dai X.-Z.* Existence and stability of periodic solutions of a Rayleigh type equation // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2009. Vol. 79, iss. 3. P. 377–390. https://doi.org/10.1017/S0004972708001135
10. *Guo Y., Wang Y., Zhou D.* A new result on the existence of periodic solutions for Rayleigh equation with a singularity // Advances in Difference Equations. 2017. Article number 394. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1449-y
11. *Alzabut J., Tunc C.* Existence of Periodic solutions for a type of Rayleigh equation with state-dependent delay // Electronic Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 77. P. 1–8.
12. *Li Y., Huang L.* New results of periodic solution for forced Rayleigh-type equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. Vol. 221, iss. 1. P. 98–105. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.10.005
13. *Кумакшев С. А.* Исследование регулярных и релаксационных колебаний осцилляторов Рэлея и ван дер Поля // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 203–205.
14. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1952. 264 с.
15. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
16. *Жительзейф Е. Д.* О предельных циклах уравнения Рэлея // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 7. С. 1309–1311.
17. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. Москва : Наука, 1966. 568 с.
18. *Отроков Н. Ф.* Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький : Волго-Вятское книжное издательство, 1972. 216 с.

References

1. Strutt J. (Rayleigh) *The Theory of Sound*. In 2 vols. Vol. I. London, Macmillan and C°, 1894. (Russ. ed.: Moscow, GITTL, 1955. Vol. 1. 503 p.)
2. Kuznetsov A. P., Seliverstova E. S., Trubetskov D. I., Tyuryukina L. V. Phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 22, no. 4, pp. 3–42 (in Russian). https://doi.org/10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42
3. Andronov A. A., Witt A. A., Haikin S. E. *Teoriia kolebanii* [Theory of Vibrations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 916 p. (in Russian).

4. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. *Lektsii po nelineinoi dinamike* [Lectures on Nonlinear Dynamics]. Moscow, Izhevsk, NITs “Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika”, 2011. 516 p. (in Russian).
5. Gains R. E., Mawhin J. L. *Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, Springer, 1977. Vol. 568. 241 p. https://doi.org/10.1007/BFb0089537
6. Plesset M. S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1977, vol. 9, pp. 145–185. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.09.010177.001045
7. Reissig R., Sansone G., Conti R. *Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen*. Rome, Edizioni Cremonese, 1963. 382 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1974. 318 p.).
8. Wang Z. On the existence of periodic solutions of Rayleigh equations. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 2005, vol. 56, no. 4, pp. 592–608. https://doi.org/10.1007/s00033-004-2061-z
9. Wang Y., Dai X.-Z. Existence and stability of periodic solutions of a Rayleigh type equation. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 2009, vol. 79, iss. 3, pp. 377–390. https://doi.org/10.1017/S0004972708001135
10. Guo Y., Wang Y., Zhou D. A new result on the existence of periodic solutions for Rayleigh equation with a singularity. *Advances in Difference Equations*, 2017. Article number 394. https://doi.org/10.1186/s13662-017-1449-y
11. Alzabut J., Tunc C. Existence of Periodic solutions for a type of Rayleigh equation with state-dependent delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012, vol. 77, pp. 1–8.
12. Li Y., Huang L. New results of periodic solution for forced Rayleigh-type equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, vol. 221, iss. 1, pp. 98–105. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.10.005
13. Kumakshev S. A. Investigation of regular and relaxation oscillations in the Rayleigh and van der Pol oscillators. *Bulletin of the Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2011, no. 4 (2), pp. 203–205 (in Russian).
14. Stoker J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*. New York, Interscience Publishers, 1950. 273 p. (Russ. ed.: Moscow, Izdatel’stvo inostrannoi literatury, 1952. 264 p.).
15. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, McGraw-Hill, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Izdatel’stvo inostrannoi literatury, 1958. 474 p.).
16. Zhitelzeif E. D. The limit cycles of the Rayleigh equation. *Differentsial’nye Uravneniya* [Differential Equations], 1972, vol. 8, no. 7, pp. 1309–1311 (in Russian).
17. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Jerusalem, New York, John Wiley, 1973, 524 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1966. 568 p.).
18. Otrokov N. F. *Analiticheskie integraly i predel’nye tsikly* [Analytical Integrals and Limit Cycles]. Gorky, Volgo-Viatskoe knizhnoe izdatel’stvo, 1972. 216 p.

Поступила в редакцию / Received 18.05.2020
Принята к публикации / Accepted 31.10.2020
Опубликована / Published 31.05.2021