



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 213–226  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 213–226

Научная статья

УДК 629.78

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

## Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях

Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков<sup>✉</sup>

Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Сапунков Яков Григорьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>

**Молоденков Алексей Владимирович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, [molalexei@yandex.ru](mailto:molalexei@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9040-8506>

**Аннотация.** В кватернионной постановке рассматривается классическая задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата без ограничения на вектор-функцию управления. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на разворот космического аппарата. Используя взаимно-однозначные замены переменных, исходная задача упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс. Упрощенная задача содержит одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В классе обобщенных конических движений эта задача модифицируется для получения аналитических решений уравнений движения. Решения содержат произвольные константы и две произвольные скалярные функции (обобщенные параметры конического движения). Предлагаемый подход хорошо согласуется с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела. При этом для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот, коническое движение, — решения классической и модифицированной задач полностью совпадают. Сформулирована и решена оптимизационная задача относительно параметров конического движения, вторые производные которых являются управлениями. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи можно рассматривать как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального разворота при произвольных граничных условиях. Дается квазиоптимальный алгоритм оптимального разворота космического аппарата. Приведен числовой пример, показывающий близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального разворота осесимметричного космического аппарата.

**Ключевые слова:** квазиоптимальное управление, разворот, космический аппарат, осесимметричное твердое тело, произвольные граничные условия



**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

**Для цитирования:** Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 213–226. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

## Analytical algorithm of energy and time quasioptimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov<sup>✉</sup>

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

**Yakov G. Sapunkov**, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>

**Alexei V. Molodenkov**, [molalexei@yandex.ru](mailto:molalexei@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9040-8506>

**Abstract.** The optimal attitude maneuver control problem without control constraints is studied in the quaternion statement for an axially symmetric spacecraft as a rigid body under arbitrary boundary conditions on angular position and angular velocity of a spacecraft. The performance criterion is given by a functional combining the time and energy used for the attitude maneuver. Using substitutions of variables, the original problem is simplified (in terms of dynamic Euler equations) to the optimal slew problem for a rigid body with a spherical mass distribution. The simplified problem contains one additional scalar differential equation. In the class of generalized conical motions, the traditional optimal slew problem is modified to obtain analytical solutions for motion equations. The solutions contain arbitrary constants and two arbitrary scalar functions (generalized conical motion parameters). The proposed approach fits well with the Poinsoit concept that any arbitrary angular motion of a rigid body around a fixed point can be considered as some generalized conical motion of a rigid body. Moreover, for the cases of analytic solvability of the classical problem of optimal reversal spherically symmetric spacecraft, when restrictions are imposed on the edge conditions of the problem (plane Euler turn, conical motion) solutions of the classical and modified tasks are completely the same. An optimization problem is formulated and solved with respect to these functions, the second derivatives of which serve as controls in the optimization problem. The resulting analytical solution of the modified problem can be treated as an approximate (quasioptimal) solution of the traditional optimal slew problem under arbitrary boundary conditions. The quasioptimal algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. Numerical example showing the closeness of the solutions of the traditional and modified optimal slew problems for an axially symmetric spacecraft is given.

**Keywords:** quasioptimal control, attitude maneuver, spacecraft, axially symmetric rigid body, arbitrary boundary conditions

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).



**For citation:** Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Analytical algorithm of energy and time quasioptimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 213–226 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## Введение

Явное аналитическое решение задачи оптимальной переориентации (оптимального разворота) космического аппарата (КА) для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные решения задачи (например, работы [1–8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем явное аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В статье рассматривается классическая задача оптимального разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на переориентацию КА. С помощью замен переменных исходная задача упрощается до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В классе обобщенных конических движений произведена модификация классической задачи оптимального разворота, которая позволила получить явные аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение исходной задачи оптимального разворота КА. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости классической задачи оптимального разворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот, коническое движение, — решения классической и модифицированной задач полностью совпадают [8]. Приводятся аналитический квазиоптимальный алгоритм и численные примеры, показывающие близость решений классической и модифицированной задач оптимальных разворотов КА при произвольных граничных условиях.

## 1. Постановка классической задачи

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}, \quad (1)$$



$$I_1 \dot{w}_1 = M_1, \quad I_2 \dot{w}_2 = M_2 - (I_1 - I_2) w_1 w_3, \quad I_2 \dot{w}_3 = M_3 + (I_1 - I_2) w_1 w_2. \quad (2)$$

Здесь фазовыми координатами являются  $\mathbf{L}(t)$  – нормированный кватернион поворота КА:

$$\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3 = [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^T, \\ \|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1,$$

где  $i_1, i_2, i_3$  – орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и  $\mathbf{w}(t)$  – вектор угловой скорости КА:

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T,$$

причем символ “ $\circ$ ” означает кватернионное умножение, а управление – вектор  $\mathbf{M}(t)$  действующего на КА внешнего момента

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ( $\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$  – непрерывные функции,  $\mathbf{M}(t)$  – кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (2) для КА с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта  $\mathbf{i}_1$  связанной с КА системы координат)  $I_1, I_2$  – главные центральные моменты инерции твердого тела,  $I_1, I_2 = \text{const} > 0$ .

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \quad (3)$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \quad (4)$$

Требуется определить оптимальное управление  $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$  системой (1), (2) при условиях (3)–(4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (1 + a \mathbf{M}^2) dt, \quad (5)$$

где  $a = \text{const} > 0$ , время  $T$  не задано. Функционал (5) представляет собой комбинацию двух критериев с размерным весовым множителем  $a$ : времени и энергии, затраченных на разворот КА.

## 2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + 2I_2^2) / 3)^{1/2}, \quad I_k^{\text{безраз}} = I_k / I^{\text{масш}}, \quad k = 1, 2; \\ \mathbf{w}^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{1/2} a^{1/4} \mathbf{w}, \quad t^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} t, \quad \mathbf{M}^{\text{безраз}} = a^{1/2} \mathbf{M}, \\ J^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} J,$$



при этом выражения (1)–(4) не изменятся, а критерий (5) примет вид

$$J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2) dt. \quad (6)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1)–(4), (6) в безразмерных переменных и верхние индексы у них будут опущены. Таким образом, безразмерная задача явно не зависит от параметра  $a$ . Зависимость возникнет лишь при обратном переходе к размерным переменным.

### 3. Замены переменных в задаче с осевой симметрией КА

С целью упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера) задачи (1)–(4), (6) осуществим замены переменных, сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этого перепишем уравнения (2) в виде

$$\dot{w}_1 = m_1, \quad \dot{w}_2 = b_1 m_2 - b w_1 w_3, \quad \dot{w}_3 = b_1 m_3 - b w_1 w_2,$$

где  $m_1 = M_1/I_1$ ,  $m_2 = M_2/I_1$ ,  $m_3 = M_3/I_1$ ,  $b = (I_1 - I_2)/I_2$ ,  $b_1 = I_1/I_2$ .

Заменим переменные  $w_1, w_2, w_3$  на новые  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тогда получим для уравнений Эйлера (2) в кватернионной записи

$$\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}, \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp \{ \mathbf{i}_1 \theta(t) / 2 \}, \quad (9)$$

где « $\tilde{\cdot}$ » — сопряжение кватерниона, « $\exp \{ \cdot \}$ » — кватернионная экспонента, вектор  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T$ ,

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \quad (10)$$

$b_2 = b b_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$ . Отметим, что  $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$ .

Кватернионное уравнение углового движения КА (1) при этом запишется так:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1} \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (11)$$

где кватернион  $\mathbf{B}$  определяется (9).

С учетом начального условия по угловой скорости КА (5) уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\omega} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (12)$$

$$\beta(t) = \exp \left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left( \int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{01} \right) d\tau / 2 \right\}. \quad (13)$$



Нелинейное выражение, стоящее в правой части (11) и зависящее только от переменных  $m_k(t)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , примем за новое управление  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\mathbf{u} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (14)$$

где  $\beta$  определяется (13). Отметим, что  $u_1(t) = b_1 m_1(t)$ , и поэтому в замене переменных (14) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной  $\mathbf{u}(t)$  (когда она будет известна) восстановить управление  $\mathbf{m}(t)$  задачи (1)–(4), (6).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = |\tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta| = b_1 |\tilde{\beta}| |\mathbf{m}| |\beta| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}| / I_1 = |\mathbf{M}| / I_2.$$

Исходя из (11), осуществим еще одну замену переменных:

$$\mathbf{L} = \Lambda \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (15)$$

где  $\Lambda = \Lambda(t)$  — новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА, при этом, так как  $\|\mathbf{B}(t)\| = |\mathbf{B}(t)|^2 = 1, \forall t$ , то  $\|\mathbf{L}(t)\| = \|\Lambda(t)\| = 1, \forall t$ .

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (1)–(4), (6) примет вид

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (16)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{u}, \quad (17)$$

$$\dot{\theta} = b_2 \omega_1, \quad (18)$$

$$\theta(0) = 0, \quad (19)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0 = \mathbf{L}_0, \quad (20)$$

$$\omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)), \quad (21)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)),$$

$$J = \int_0^T (1 + I_2^2 \mathbf{u}^2) dt \rightarrow \min, \quad (22)$$

где  $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{T1}, w_{T2}, w_{T3}$  — компоненты вектора угловой скорости КА  $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$  в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион  $\mathbf{B}(\theta(T))$  определяется по формуле (9).

Согласно (15), (21), задачу (16)–(22) можно переформулировать так: в восьми-мерном фазовом пространстве  $\Lambda \times \omega \times \theta$  управляемую систему (16)–(18) необходимо оптимально в смысле функционала (22) перевести из начального состояния (20), (21) на многообразии, которое определяется соотношениями

$$\text{vect}(\Lambda \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T) = 0, \quad \omega - \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta) = 0, \quad (23)$$

где «vect( $\cdot$ )» обозначает векторную часть кватерниона.

Из этой задачи найдем оптимальное управление  $\mathbf{u}^{\text{опт}}$  и траекторию  $\Lambda^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}$ . Как видно, векторное дифференциальное уравнение (17) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (16)–(22) ((23)).





#### 4. Модифицированная задача оптимального разворота КА

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения кватерниона  $\Lambda(t)$  из уравнения (16) при известных  $\Lambda_0, \omega(t)$ .

Для кватернионного дифференциального уравнения (16) при условии, что вектор угловой скорости  $\omega(t)$  задается выражением

$$\omega(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t), \quad (24)$$

в котором  $f(t)$  и  $g(t)$  — произвольные функции времени, известно решение, удовлетворяющее начальному условию (20)

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}. \quad (25)$$

Формулы (24), (25) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 5, 6, 8].

Заметим, что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости  $\omega(t)$  с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (16) с угловой скоростью

$$\omega^*(t) = -(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)),$$

отличающейся от (24) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе  $\omega(t)$ , неизвестно.

Следует отметить, что предлагаемая структура угловой скорости (24) хорошо соотносится с концепцией Пуансо, что всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Выражение (24) и решение (25) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона  $\mathbf{K}$ ,  $\|\mathbf{K}\| = 1$ . Тогда вектор  $\omega$  и кватернион  $\Lambda$  будут определяться соотношениями

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}, \quad (26)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \quad (27)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций  $f$  и  $g$  в качестве управляющих параметров. Тогда, если ввести обозначения

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad (28)$$

можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = \nu_1, \quad \dot{g}_1 = \nu_2, \quad (29)$$

где  $f, f_1, g, g_1$  — фазовые координаты,  $\nu_1, \nu_2$  — управляющие параметры. Ограничимся случаем, когда кватернион  $\mathbf{K}$  представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \quad (30)$$



где  $\alpha_1, \alpha_2$  — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  определяют поворот вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (24) вокруг осей  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ . Поворот вокруг оси  $\mathbf{i}_3$  уже включен в формулу (26), если учесть, что в функцию  $g(t)$  входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион  $\tilde{\mathbf{K}}$  будет представляться так:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}. \quad (31)$$

Условия того, что выражения для  $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}$  (26), (27) удовлетворяют граничным условиям (20), (21) ((23)) с учетом (30), (31), запишутся как

$$\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K} - b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3 = 0, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K} - \\ &- \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &\text{vect}(\mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \\ &\circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K} \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ \mathbf{L}_T) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая (30), компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (26) имеют в явной форме следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Компоненты вектора управления  $\mathbf{u}$ , который, согласно (17), является производной по времени от вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{\omega}_1 = (\nu_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - \nu_2 \sin \alpha_2, \\ u_2 &= \dot{\omega}_2 = \nu_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + \nu_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ u_3 &= \dot{\omega}_3 = \nu_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + \nu_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда для управляемой системы (29) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать (с учетом замен переменных раздела 3) как приближенное (квазиоптимальное) решение задачи (16)–(22) ((1)–(4), (6)): требуется найти оптимальные управления  $\nu_1(t), \nu_2(t)$ , которые переводят управляемую систему (29) из начального состояния

$$f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0) \quad (37)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T), \quad (38)$$

удовлетворяющие соотношениям (32)–(34), в которых  $\alpha_1, \alpha_2$  выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум комбинированному функционалу, где время  $T$  не задано:

$$J = \int_0^T (1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) dt. \quad (39)$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота осесимметричного КА.





## 5. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона – Понтрягина [9] для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 \nu_1 + \psi_4 \nu_2, \quad (40)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений:

$$d\psi_1/dt = 0, \quad d\psi_2/dt = 0, \quad d\psi_3/dt = -\psi_1, \quad d\psi_4/dt = -\psi_2. \quad (41)$$

Общее решение уравнений (41), содержащее произвольные постоянные  $c_1, \dots, c_4$ , имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \quad (42)$$

Из условия максимума [9] для функции Гамильтона – Понтрягина (40) определяется оптимальное управление

$$\nu_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad \nu_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \quad (43)$$

После подстановки (43) в систему уравнений (29) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных  $c_1, \dots, c_8$ :

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_7, & g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_6 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & g_1 &= -c_1 t^2/4 + c_4 t/2 + c_6. \end{aligned} \quad (44)$$

Так как в поставленной задаче оптимального управления конечный момент времени  $T$  не задается, то функция Гамильтона – Понтрягина (40) при  $t = T$  должна обращаться в нуль:

$$H = -(1 + \nu_1^2(T) + \nu_2^2(T)) + c_1 f_1(T) + c_2 g_1(T) + \psi_3(T) \nu_1(T) + \psi_4(T) \nu_2(T) = 0. \quad (45)$$

Для системы уравнений (29), (41) функция  $H$  является первым интегралом. По этой причине условие (45) выполняется для любого  $t \in [0, T]$ . В связи с тем, что  $c_7$  входит в функцию  $f$  как аддитивная постоянная, то из формулы (27) видно, что эта постоянная не оказывает влияния; поэтому  $c_7$  можно положить равной нулю. Таким образом, для определения десяти неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_6, c_8, T$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  служат девять уравнений системы (32)–(34) и условие (45). Если формулы (44) подставить в (26), (27), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории твердого тела. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума комбинированного функционала (39) разворот твердого тела в классе обобщенных конических движений. Далее по формулам (7), (10), (16) вычисляются вектор безразмерной угловой скорости  $\mathbf{w}$  и кватернион ориентации КА  $\mathbf{L}$ . По формулам (36) определяются компоненты вектора  $\mathbf{u}$ . Из выражений (8), (10), (13), (14) следует, что безразмерный управляющий момент  $\mathbf{M}$  выражается через вектор  $\mathbf{u}$  так:

$$\mathbf{M} = I_2 \tilde{\mathbf{V}}(\theta) \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{V}(\theta). \quad (46)$$

Формула (45) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота КА тем самым решена полностью. Полученные таким



способом кватернион  $\mathbf{L}$  и векторы  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{M}$  можно рассматривать как приближенное решение классической задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела).

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) квадрат модуля безразмерного управляющего момента традиционной задачи выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = \nu_1^2 + f_1^2 g_1^2 + \nu_2^2. \quad (47)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_T$  положить параллельными  $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$  (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в классической и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений (см. на примере задачи быстрогодействия в [8]). В этих случаях слагаемое  $f_1^2 g_1^2$  в (47) обращается в нуль и функционал (39) полностью переходит в функционал (6) классической задачи.

Приведем аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях в безразмерных переменных на основе формулировки задачи (16)–(22).

*Шаг 1.* По заданным граничным условиям по угловому положению  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_T$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_T$  КА из формул (30), (31), десяти уравнений (32)–(34), (45) определяются десять неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_6, c_8, T, \alpha_1, \alpha_2$  и строятся функции  $f, f_1, g, g_1$ .

*Шаг 2.* Используя формулы (30), находим компоненты кватерниона  $\mathbf{K}$ .

*Шаг 3.* По формуле (26)

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости КА.

*Шаг 4.* По формуле (27)

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации твердого тела.

*Шаг 5.* Используя формулы (36), (46), вычисляется вектор управляющего момента  $\mathbf{M}(t)$ . По формулам раздела 3 осуществляется возврат к безразмерным переменным  $\mathbf{L}(t)$ ,  $\mathbf{w}(t)$  исходной задачи оптимального разворота осесимметричного КА (1)–(4), (6).

*Шаг 6.* По формулам (6), (46) вычисляется значение безразмерного функционала оптимизации задачи оптимального разворота.

## 6. Числовой пример

На примере КА «Спейс Шаттл» [10], динамические характеристики которого такие же, как у почти осесимметричного твердого тела, приведем сравнительные результаты численных решений задачи оптимального разворота КА в классической и модифицированной постановках. Далее на рисунках приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА при произвольно выбранных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА по формулам разделов 4, 5. На рис. 1–3 представлен пример квазиоптимального разворота осесимметричного КА при  $T = 0.9850$ .

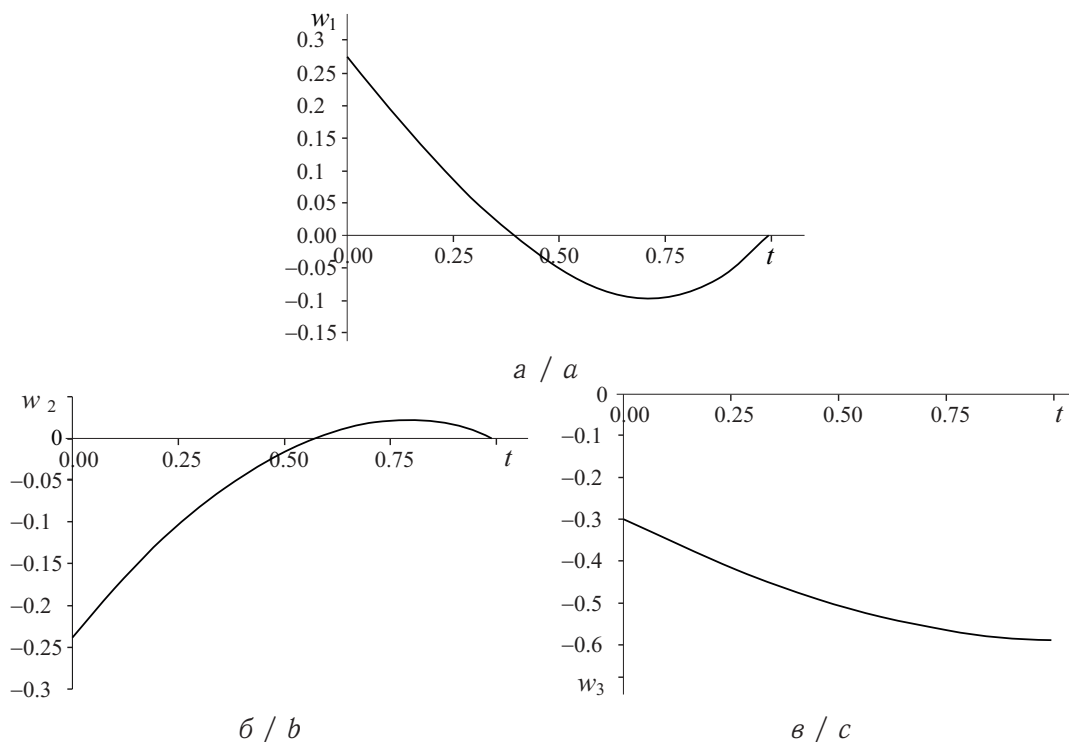


Рис. 1. Графики изменения во времени компонент угловой скорости  $w_1(t)$  (а),  $w_2(t)$  (б),  $w_3(t)$  (в)

Fig. 1. Graphs of changes in time of the components of angular velocity  $w_1(t)$  (a),  $w_2(t)$  (b),  $w_3(t)$  (c)

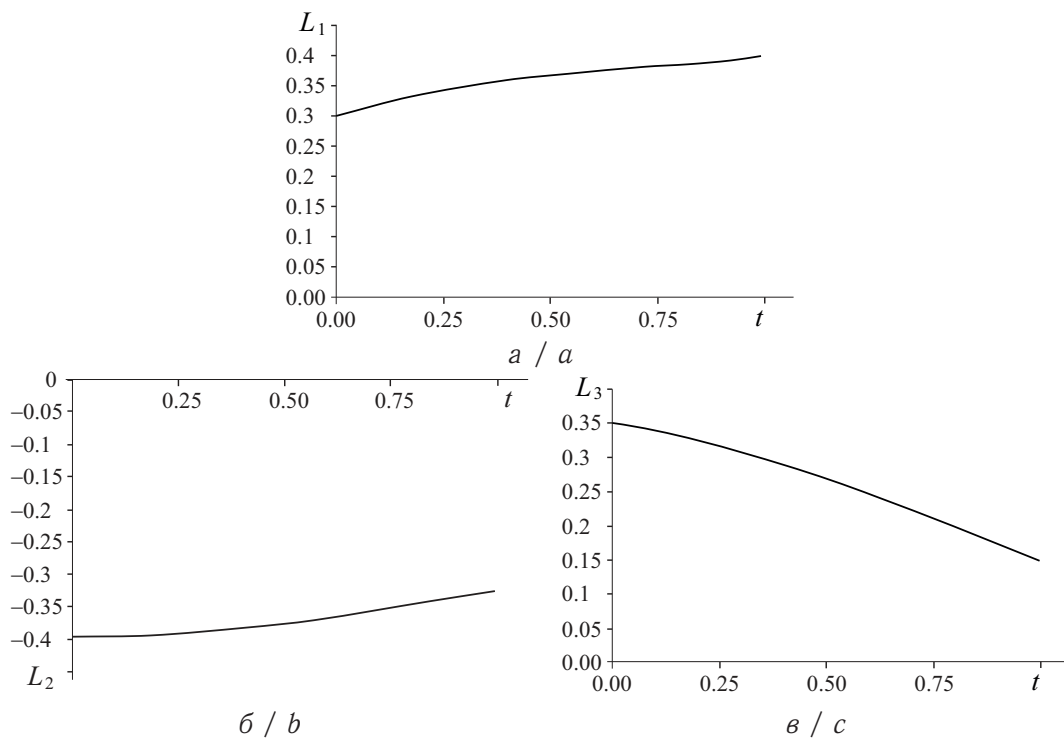


Рис. 2. Графики изменения во времени векторной части кватерниона ориентации  $L_1(t)$  (а),  $L_2(t)$  (б),  $L_3(t)$  (в)

Fig. 2. Graphs of changes in time of the vector part of the orientation quaternion  $L_1(t)$  (a),  $L_2(t)$  (b),  $L_3(t)$  (c)

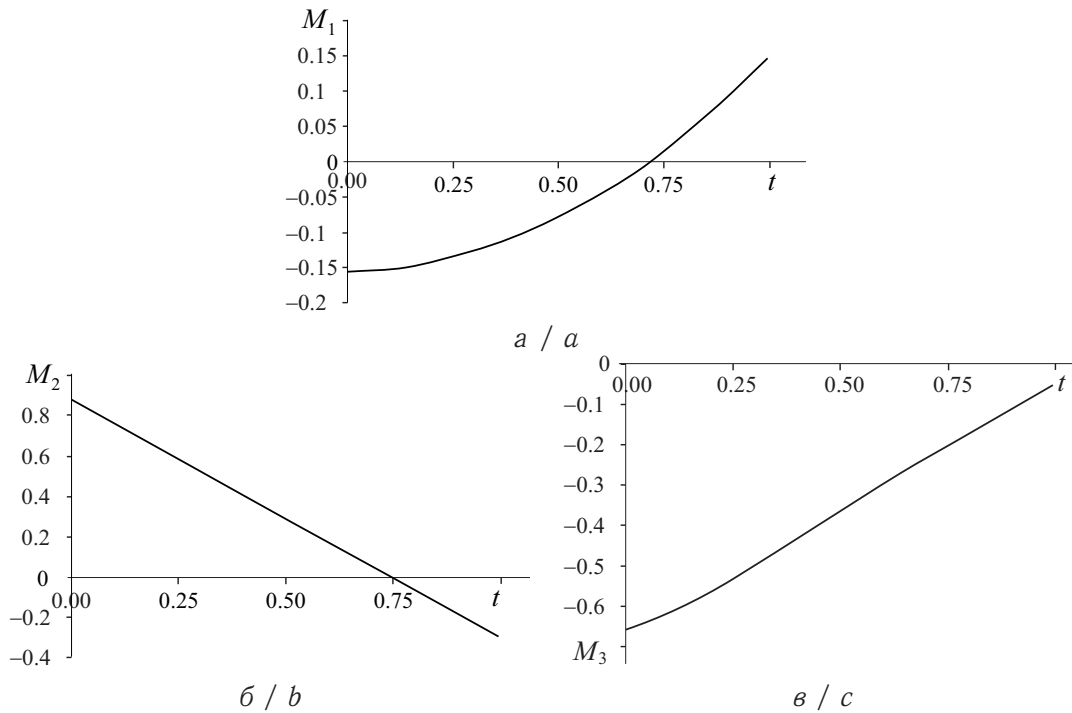


Рис. 3. Графики изменения во времени компонент вектора управляющего момента  $M_1(t)$  (а),  $M_2(t)$  (б),  $M_3(t)$  (в)

Fig. 3. Graphs of changes in time of the components of the vector of the control torque  $M_1(t)$  (a),  $M_2(t)$  (b),  $M_3(t)$  (c)

Расчеты проводились для значений:  $I_1 = 3400648 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_2 = 21041672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_3 = I_2 = 21041672 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$  или  $I_1 = 0.1967$ ,  $I_2 = 1.2168$ ,  $I_3 = I_2$  (безразмерные моменты инерции);

$$\mathbf{L}_0 = [0.79505, 0.29814, -0.39752, 0.34783]^T, \quad (48)$$

$$\mathbf{L}_T = [0.84434, 0.39846, -0.3260, 0.14848]^T,$$

$$\mathbf{w}_0 = [0.27388, -0.23883, -0.3]^T, \quad \mathbf{w}_T = [0, 0, -0.59]^T. \quad (49)$$

Значения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$ , входящих в аналитическое решение задачи, таковы:  $\alpha_1 = -1.22190$ ,  $\alpha_2 = -0.89091$ ,  $c_1 = -0.44648$ ,  $c_2 = -3.82943$ ,  $c_3 = -0.63861$ ,  $c_4 = -2.71375$ ,  $c_5 = -0.37172$ ,  $c_6 = 0.28961$ ,  $c_8 = -0.20978$ .

С граничными условиями (48), (49) при помощи универсальной программы численного решения, ранее полученной авторами, также решалась задача оптимального разворота КА в классической постановке (1)–(4), (6) в безразмерных переменных. Результаты решения двух задач практически совпали. Для примера в таблице приведем значения компонент вектора  $\mathbf{M}(t)$  на концах и в близких промежуточных точках интервалов времени движения КА  $[0, T]$  в этих двух решениях ( $T = 0.9850, 0.9679$  соответственно).

Таблица / Table

Значения компонент вектора  $\mathbf{M}(t)$  на интервале времени движения КА  $[0, T]$

Values of the components of the vector  $\mathbf{M}(t)$  on the spacecraft motion time interval  $[0, T]$

$t$	$M_1^{\text{традиц}}$	$M_2^{\text{традиц}}$	$M_3^{\text{традиц}}$	$t$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	-0.1574	0.8887	-0.6587	0	-0.2123	0.8856	-0.7918
0.4925	-0.0792	0.2893	-0.3699	0.4840	-0.0521	0.3001	-0.3691
0.9850	0.1460	-0.2898	-0.0539	0.9679	0.0881	-0.3024	0.0072



Значение функционала (6) для классической задачи в рассматриваемом примере составляет 1.35662. Значение того же функционала, вычисленного на основе решения модифицированной задачи, составляет  $J = 1.35928$ . Другими словами, в рассматриваемом примере расхождение между величинами функционала (6) для классической и модифицированной задачи составляет менее 0.00266. Таким образом, построено управление, которое сообщает функционалу значение, близкое к оптимальному для классической задачи. Из таблицы видно, что построенные управляющие моменты для этих двух задач близки друг к другу.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА  $\mathbf{L}(t)$  может быть двузначным [1], т. е.  $\mathbf{L}$  и  $-\mathbf{L}$  соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

## Заключение

Представленное в статье аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях можно использовать для построения систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА, полученное в классе плоских эйлеровых разворотов [1].

Отметим, что решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА, полученное на основе приведенной задачи (16)–(22), оказалось существенно точнее, чем решение [11] (применительно к случаю осевой симметрии КА). В [11] квазиоптимальный управляющий момент КА строился на основе обратной задачи динамики КА по результатам решения модифицированной задачи без приведения с помощью замен переменных системы уравнений Эйлера для осесимметричного твердого тела к такой же системе для тела со сферической динамической симметрией.

## Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва : Наука, 1973. 320 с.
2. *Scrivener S. L., Thompson R. C.* Survey of time-optimal attitude maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1994. Vol. 17, № 2. P. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 192, № 6. С. 1235–1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Т. 22, вып. 3. С. 352–360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1989. № 1. С. 36–47.
6. Челноков Ю. Н. Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 7–14.
7. Левский М. В. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144–157.
8. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе



конических движений // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 13–25. <https://doi.org/10.7868/S0002338814020139>

9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва : Наука, 1961. 391 с.
10. Li F., Bainum P. M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1990. Vol. 13, № 1. P. 38–45. <https://doi.org/10.2514/3.20515>
11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 131–141. <https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>

### References

1. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachax orientacii tverdogo tela* [The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies]. Moscow, Nauka, 1973. 320 p. (in Russian).
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225–233. <https://doi.org/10.2514/3.21187>
3. Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B. Analytical solution of the spatial slew maneuver. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1970, vol. 192, no. 6, pp. 1235–1238 (in Russian).
4. Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V. Optimal slew of a solid body with a single symmetry axis. *Kosmicheskie issledovaniya* [Space Research], 1984, vol. 22, iss. 3, pp. 352–360 (in Russian).
5. Sirotin A. N. Optimal reorientation of a symmetric solid body from a state of rest to another state of rest. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 1989, no. 1, pp. 36–47 (in Russian).
6. Chelnokov Yu. N. Quaternion solution of kinematic problems in rigid body orientation control – equations of motion, problem statement, programmed motion, and control. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela* [News of the Academy of Sciences. Mechanics of solids], 1993, no. 4, pp. 7–14 (in Russian).
7. Levskij M. V. Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 6, pp. 974–986. <https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
8. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical solution of the time-optimal slew problem of a spherically symmetric spacecraft in the class of conical motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 159–171. <https://doi.org/10.1134/S1064230714020130>
9. Pontryagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1961, 391 p. (in Russian).
10. Li F., Bainum P. M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38–45. <https://doi.org/10.2514/3.20515>
11. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical approximate solution of the problem of a spacecraft's turn with arbitrary boundary conditions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 458–468. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030144>

Поступила в редакцию / Received 05.07.2020

Принята к публикации / Accepted 14.08.2020

Опубликована / Published 31.05.2021