



ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 238–245
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 238–245

Научная статья

УДК 519.17

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16

М. Б. Абросимов^{1✉}, И. В. Лось¹, С. В. Костин²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²МИРЭА — Российский технологический университет, Россия, 119454, г. Москва, просп. Вернадского, д. 78

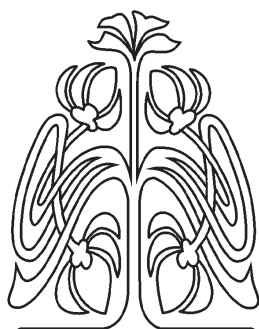
Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Лось Илья Викторович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, los.ilia.ru@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6393-7157>

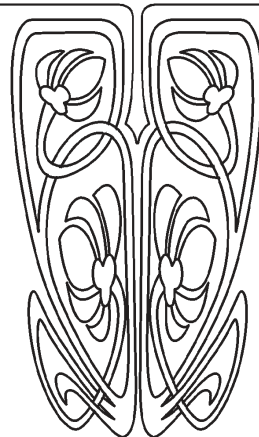
Костин Сергей Вячеславович, старший преподаватель, <https://orcid.org/0000-0003-3690-1233>, kostinsv77@mail.ru

Аннотация. Граф $G = (V, \alpha)$ называется *примитивным*, если существует натуральное k , такое что между любой парой вершин графа G существует маршрут длины k . В работе рассматриваются неориентированные графы с экспонентом 2. Доказывается критерий примитивности графа с экспонентом 2 и необходимое условие. Граф является примитивным с экспонентом 2 тогда и только тогда, когда его диаметр равен 1 или 2, а каждое его ребро входит в треугольник. Описывается вычислительный эксперимент по построению всех примитивных однородных графов с числом вершин до 16 и экспонентом 2, анализируются его результаты. Приводятся все однородные графы порядка 2, 3 и 4, которые являются примитивными с экспонентом 2, а для однородных графов порядка 5 определяется количество примитивных графов с экспонентом 2.

Ключевые слова: примитивные графы, экспонент графа, однородные графы, регулярные графы



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

Для цитирования: Абросимов М. Б., Лось И. В., Костин С. В. Примитивные однородные графы с экспонентом 2 и числом вершин до 16 // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 238–245. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Article

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

The construction of all nonisomorphic minimum vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives

M. B. Abrosimov^{1✉}, I. V. Los¹, S. V. Kostin²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²MIREA — Russian Technological University, 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russia

Mikhail B. Abrosimov, mic@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>

Ilya V. Los, los.ilia.ru@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6393-7157>

Sergej V. Kostin, kostinsv77@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3690-1233>

Abstract. A graph $G = (V, \alpha)$ is called *primitive* if there exists a natural k such that between any pair of vertices of the graph G there is a route of length k . This paper considers undirected graphs with exponent 2. A criterion for the primitivity of a graph with the exponent 2 and a necessary condition are proved. A graph is primitive with the exponent 2 if and only if its diameter is 1 or 2, and each of its edges is included in a triangle. A computational experiment on the construction of all primitive homogeneous graphs with the number of vertices up to 16 and the exponent 2 is described, its results are analyzed. All homogeneous graphs of orders 2, 3, and 4, which are primitive with the exponent 2, are given, and for homogeneous graphs of order 5, the number of primitive graphs with the exponent 2 is determined.

Keywords: primitive graphs, exponent of graph, regular graphs

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the state task (project No. FSRR-2020-0006).

For citation: Abrosimov M. B., Los I. V., Kostin S. V. The construction of all nonisomorphic minimum vertex extensions of the graph by the method of canonical representatives. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 238–245 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-238-245>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Матрица A называется *неотрицательной*, если все ее элементы являются неотрицательными действительными числами, и *положительной*, если все ее элементы — положительные числа. Неотрицательная квадратная матрица A называется *примитивной*, если существует натуральное k такое, что A^k положительна [1]. Минимальное такое значение k называется *экспонентом* матрицы A . Если рассматривать квадратную матрицу как матрицу смежности графа, то понятие примитивности естественным образом переносится на графы. В работе [2] была



получена универсальная оценка экспонента n -вершинного примитивного орграфа. Обзор по оценкам экспонентов матриц и графов можно найти в работе [3]. Ряд работ посвящен исследованию экспонентов однородных примитивных матриц [4,5]. В работе [6] рассматриваются примитивные матрицы с экспонентом 2. С точки зрения графов рассматриваемые в этих работах матрицы соответствуют орграфам. В данной работе мы будем рассматривать простые неориентированные однородные графы с экспонентом 2. Примитивные графы представляют большой интерес как с прикладной, так и с теоретической точек зрения [7–10].

Вершина v достижима из вершины u за $k \geq 1$ шагов, если существует последовательность ребер (маршрут) $\{u, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \dots, \{w_{k-1}, v\}$. Если A — матрица смежности графа $G = (V, \alpha)$, т. е. двоичная булева матрица отношения смежности α , то достижимость вершины v из вершины u за k шагов означает, что на пересечении строки и столбца, соответствующих вершинам u и v , в матрице A^k стоит 1.

Граф $G = (V, \alpha)$ называется *примитивным*, если существует натуральное k такое, что между любой парой вершин графа G существует маршрут длины k (иначе говоря, в матрице A^k все элементы равны 1). Минимальное такое значение k называется *экспонентом* графа G и обозначается $\text{exp}(G)$.

Однородным или *регулярным* n -вершинным графом порядка p называется простой неориентированный n -вершинный граф, все вершины которого имеют степень p . Множество n -вершинных однородных графов порядка p будем обозначать $R_{n,p}$.

Очевидно, что любой примитивный граф является связным. Цикл длины 3 называют треугольником. Через $g(G)$ будем обозначать обхват графа G , т. е. наименьшую из длин циклов графа G . Напомним, что *эксцентриситетом* вершины называется расстояние до максимально удаленной от нее вершины, а *диаметром* графа G называется максимальный эксцентриситет его вершин и обозначается $d(G)$. Так как в неориентированных графах нет петель, то примитивных графов с экспонентом, равным 1, не существует, т. е. $\text{exp}(G) > 1$. Нас будут интересовать однородные графы с $\text{exp}(G) = 2$. Очевидно, что диаметр таких графов $d(G) \leq 2$, однако это условие не является достаточным. Например, полный граф K_2 имеет диаметр 1, но не является примитивным, а цепь P_3 имеет диаметр 2, но также не является примитивным графом.

Теорема 1. *Граф G является примитивным с $\text{exp}(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $d(G) \leq 2$ и каждое ребро графа G входит в треугольник.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — примитивный граф с $\text{exp}(G) = 2$. Рассмотрим две произвольные различные вершины u, v . В силу примитивности между ними есть путь длины 2, следовательно, эксцентриситет этих вершин не превосходит 2. В силу произвольности выбора вершин получаем, что и диаметр графа $d(G) \leq 2$. Заметим, что $d(G) = 1$ только для полного графа. Полный n -вершинный граф K_n является однородным графом порядка $n - 1$ и при $n > 2$ примитивным с экспонентом $\text{exp}(K_n) = 2$.

Рассмотрим две произвольные смежные вершины u, v . Между ними должен быть путь длины 2, который не может содержать ребро $\{u, v\}$. Следовательно, есть отличная от u и v вершина w , смежная с u и v . Таким образом, ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник, образованный вершинами u, v и w .

Достаточность. Пусть в произвольном графе G с диаметром $d(G) \leq 2$ каждое ребро графа G входит в треугольник. Тогда граф G — связный, и очевидно, что в нем



есть маршрут длины 2 из любой вершины в саму себя. Покажем, что такой маршрут есть и между любыми двумя различными вершинами u и v . Так как $d(G) \leq 2$, то $d(u, v) \leq 2$. Если вершины u и v несмежны, то между ними нет маршрута длины 1, следовательно, есть маршрут длины 2.

Если вершины u и v смежны, то по условию ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник, следовательно, есть отличная от u и v вершина w , смежная с u и v , получаем маршрут длины 2: uvw . □

Заметим, что второе условие теоремы отдельно также не является достаточным.

На рис. 1 представлен 10-вершинный однородный граф порядка 4. Каждое ребро этого графа входит в треугольник, граф является примитивным, однако его экспонент равен 3.

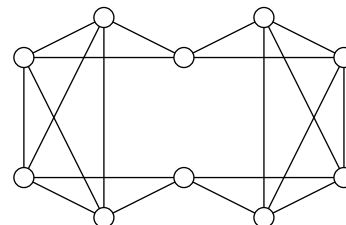


Рис. 1. 10-вершинный однородный граф порядка 4 с $\text{exp}(G) = 3$

Fig. 1. A 4-regular graph with 10 vertices and $\text{exp}(G) = 3$

Если рассматривать произвольные графы, то можно найти пример с меньшим числом вершин. На рис. 2 представлен 7-вершинный граф с $\text{exp}(G) = 3$, каждое ребро которого входит в треугольник.

Следующий результат можно использовать как необходимое условие примитивности графа с $\text{exp}(G) = 2$.

Следствие 1. Пусть G — примитивный граф с $\text{exp}(G) = 2$. Тогда его обхват $g(G) = 3$.

Легко заметить, что любой полный граф K_n при $n > 2$ является примитивным, и $\text{exp}(K_n) = 2$. Так как каждое ребро примитивного графа G с $\text{exp}(G) = 2$ входит в треугольник, то степень всех вершин графа G не ниже 2. Оказывается, оценку минимальной степени вершин графов с экспонентом, равным 2, можно уточнить. В работе [6] получен следующий результат: для неориентированных графов с экспонентом 2 минимальное число ребер есть $\frac{3n-3}{2}$ для нечетного n и $\frac{3n-2}{2}$ для четного n . Из этого сразу следует

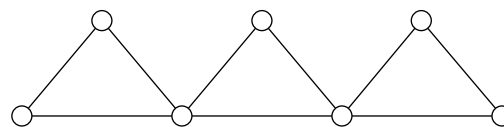


Рис. 2. 7-вершинный граф с $\text{exp}(G) = 3$

Fig. 2. A graph with 7 vertices and $\text{exp}(G) = 3$

Теорема 2. Среди однородных графов $R_{n,2}$ только граф K_3 имеет экспонент, равный 2.

Кубические графы (напомним, что это однородные графы порядка 3) содержат $\frac{3n}{2}$ ребер и удовлетворяют условию из работы [6]. Однако и кубический граф с экспонентом 2 только один.

Теорема 3. Среди кубических графов $R_{n,3}$ только граф K_4 имеет экспонент, равный 2.

Доказательство. Пусть G — примитивный кубический n -вершинный граф с $\text{exp}(G) = 2$, причем $n > 4$. По следствию 2 обхват графа G равен 3. Рассмотрим произвольный треугольник в графе G : u_1, u_2, u_3 . Так как граф G кубический, то вершина u_1 кроме вершин u_2 и u_3 смежна еще с одной вершиной w . Рассмотрим



ребро $\{u_1, w\}$. По теореме 1 это ребро должно входить в треугольник. Так как кроме w вершина u_1 смежна только с вершинами u_2 и u_3 , то w должна быть смежна с одной из них. Если вершина w смежна и с u_2 и с u_3 , то получаем граф K_4 . Не ограничивая общности, будем считать, что вершина w смежна с u_2 , но несмежна с u_3 . Следовательно, вершина w смежна еще с некоторой вершиной v , отличной от u_1, u_2 и u_3 . Снова по теореме 1 ребро $\{w, v\}$ должно входить в некоторый треугольник. Однако вершина w кроме v смежна только с u_1 и u_2 , а вершина v с ними смежной быть не может, так как вершины u_1 и u_2 имеют степень 3, причем смежны между собой и с вершинами w и u_3 . Получили противоречие. \square

Теорема 4. Если $p > n/2$, то любой n -вершинный однородный граф порядка p является примитивным с экспонентом, равным 2.

Доказательство. Пусть $G = (V, \alpha)$ — произвольный p -однородный n -вершинный граф, причем $p > n/2$.

Выберем две произвольные несмежные вершины u и v . Так как $d(u) + d(v) = 2p > n$, то существует, по крайней мере, одна вершина, смежная с u и v , следовательно, расстояние между произвольными несмежными вершинами графа G равно 2. В частности, это означает, что $d(G) \leq 2$.

Выберем две произвольные смежные вершины u и v . В этом случае есть $p - 1$ вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с u . Аналогично, есть $p - 1$ вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с v . Так как $p - 1 + p - 1 = 2p - 2 > n - 2$, то существует, по крайней мере, одна вершина из $V \setminus \{u, v\}$, смежная с u и с v , следовательно, между двумя произвольными смежными вершинами графа G есть путь длины 2. В частности, это означает, что произвольное ребро $\{u, v\}$ входит в треугольник. Таким образом, и непосредственно по определению, и по теореме 1 получаем, что граф G является примитивным и имеет $\text{exp}(G) = 2$. \square

Результат этой теоремы является неулучшаемым. Например, на рис. 3 приведены все кубические 6-вершинные графы. Первый граф является примитивным, но имеет экспонент 3, а второй — не является примитивным. 8-вершинных однородных графов порядка 4 всего 6 [11], но только 2 являются примитивными с экспонентом 2.

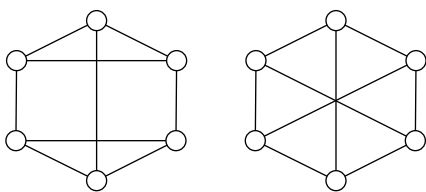


Рис. 3. Два 6-вершинных кубических графа

Fig. 3. Two cubic graphs with 6 vertices

В работе [4] доказывается, что однородные ориентированные графы порядка p (степени исхода и захода каждой вершины равны p) с экспонентом, равным 2, могут быть при следующих значениях n :

$$p + 1 \leq n \leq 2p - 1.$$

Если рассматривать каждое ребро неориентированного графа как пару встречных дуг, то однородный неориентированный граф порядка p можно рассматривать как однородный ориентированный граф порядка $2p$. Тогда оценка для неориентированных графов принимает вид

$$p + 1 \leq n \leq 4p - 1.$$

Нижняя оценка достигается для полных графов K_n .

Был произведен вычислительный эксперимент с использованием кластера высокопроизводительных вычислений ПРЦ НИТ СГУ (<http://prcnit.sgu.ru>) по подсчету однородных графов с экспонентом, равным 2, и числом вершин до 16 [12].



Результаты представлены в таблице. Темным цветом выделены ячейки, которые соответствуют полным графам: $n = p - 1$. Выше этих ячеек стоят нули, так как однородных графов с такими значениями n и p не существует. Серым цветом в таблице выделены значения, которые подпадают под действие теоремы 4: все соответствующие однородные графы являются примитивными с экспонентом 2, непосредственных вычислений для таких значений n и p можно не производить. Остальные значения вычислялись в рамках эксперимента. Для генерации однородных графов использовалась программа GENREG [11].

Таблица / Table

Число однородных графов с экспонентом 2 для различных n и p
 The number of p -regular graphs with the exponent 2 for different values n and p

$n \backslash p$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	2	3	1	1	0	0	0	0	0	0
9	3	0	4	0	1	0	0	0	0	0
10	0	24	21	5	1	1	0	0	0	0
11	1	0	266	0	6	0	1	0	0	0
12	0	210	5457	1547	94	9	1	1	0	0
13	0	0	135775	0	10786	0	10	0	1	0
14	0	116	2806846	18851867	3459386	88193	540	13	1	1
15	0	0	40242765	0	1470293676	0	805579	0	17	0
16	0	2	337592332	214047388578	733351105935	113314233813	2585136741	8037796	4207	21

Для выявления примитивности применялось возведение матрицы смежности графа в степень 2 и проводилась последующая проверка полученной в результате матрицы на отсутствие нулей. При текущих ограничениях на $n \leq 16$ строки матрицы можно хранить в виде двоичных масок в любом 32-битном типе данных, например в типе int. В этом случае легко свести перемножение двух матриц, представленных в таком виде, к последовательному применению побитовой операции И (&) к парам чисел, хранящих нужные строки матриц, если вторую матрицу хранить в транспонированном виде. Это позволяет выполнять умножение двух матриц за время порядка $O(n^2)$.

Отдельно были обработаны связанные однородные 18-вершинные графы порядка 5. Заметим, что всего таких графов 2 807 105 250 897 (<https://oeis.org>, Sequence A006821), и их полный перебор чрезвычайно затруднителен, поэтому проводился целенаправленный поиск графов с обхватом 3, удовлетворяющих теореме 1. Среди них не оказалось примитивных графов с экспонентом 2. Таким образом, если оценить количество примитивных однородных графов порядка p с экспонентом 2, то при $p = 2$ и $p = 3$ есть только по одному графу K_3 и K_4 соответственно. При $p = 4$ есть 10 графов с числом вершин n при $5 \leq n \leq 11$: полный граф K_5 , граф $R_{6,4}$, который получается из полного графа K_6 удалением трех ребер между тремя парами различных вершин, и 8 графов, приведенные на рис. 4. Изображение 11-вершинного 4-однородного графа с экспонентом 2 приводится по работе [13]. Наконец, при $p = 5$ есть только 356 примитивных однородных графов порядка 5 с экспонентом 2 при $5 \leq n \leq 11$.

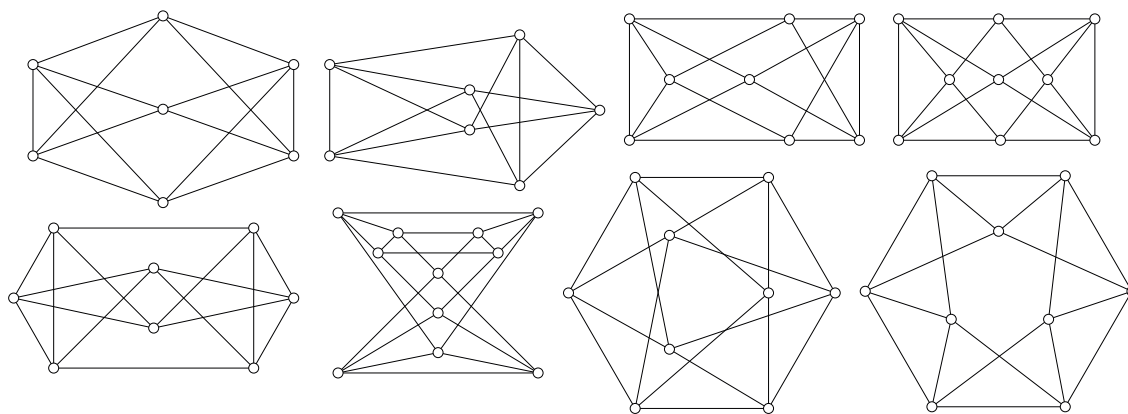


Рис. 4. Однородные примитивные графы порядка 4 с $\exp(G) = 2$
 Fig. 4. The number of p -regular graphs with the exponent 2 for different values n and p

Список литературы

1. Frobenius F. G. Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Berlin : Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1912. 22 p.
2. Wielandt H. Unzerlegbare, nicht negative Matrizen // Mathematische Zeitschrift. 1950. Vol. 52. P. 642–648. <https://doi.org/10.1007/BF02230720>
3. Фомичев В. М., Аvezова Я. Э., Коренева А. М., Кязин С. Н. Примитивность и локальная примитивность орграфов и неотрицательных матриц // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, вып. 3. С. 95–125. <https://doi.org/10.17377/daio.2018.25.595>
4. Jin M., Lee S. G., Seol H. G. Exponents of r -regular primitive matrices // Information Center for Mathematical Sciences. 2003. Vol. 6, № 2. P. 51–57.
5. Bueno M. I., Furtado S. On the exponent of R -regular primitive matrices // ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra. 2008. Vol. 17. P. 28–47. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1247>
6. Kim B., Song B., Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2 // Linear Algebra and its Applications. 2005. № 407. P. 162–168. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.05.018>
7. Сачков В. Н., Ошкин И. Б. Экспоненты классов неотрицательных матриц // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 2. P. 150–159.
8. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. № 1 (1). P. 116–119.
9. Фомичев В. М. Оценки экспонентов примитивных графов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). P. 101–112.
10. Фомичев В. М., Аvezова Я. Э. Точная формула экспонентов перемешивающих орграфов регистровых преобразований // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. Т. 27, вып. 2 (27). P. 117–135. <https://doi.org/10.33048/daio.2020.27.670>
11. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages // Journal of Graph Theory. 1999. Vol. 30, iss. 2. P. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
12. Абросимов М. Б., Костин С. В. К вопросу о примитивных однородных графах с экспонентом равным 2 // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2017. № 10. С. 131–134. <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/51>
13. Костин С. В. Об использовании задач по теории графов для интеллектуального развития учащихся // Математика в образовании. 2014. Вып. 10. С. 68–74.



References

1. Frobenius F. G. *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*. Berlin, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1912. 22 p.
2. Wielandt H. Unzerlegbare nicht negative Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, 1950, vol. 52, pp. 642–648. <https://doi.org/10.1007/BF02230720>
3. Fomichev V. M., Avezova Y. E., Koreneva A. M., Kyazhin S. N. Primitivity and local primitivity of digraphs and nonnegative matrices. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, iss. 3, pp. 453–469. <https://doi.org/10.1134/S1990478918030067>
4. Jin M., Lee S. G., Seol H. G. Exponents of r-regular primitive matrices. *Information Center for Mathematical Sciences*, 2003, vol. 6, no. 2, pp. 51–57.
5. Bueno M. I., Furtado S. On the exponent of R-regular primitive matrices. *ELA. The Electronic Journal of Linear Algebra*, 2008, vol. 17, pp. 28–47. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1247>
6. Kim B., Song B., Hwang W. Nonnegative primitive matrices with exponent 2. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, no. 407, pp. 162–168. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.05.018>
7. Sachkov V. N., Oshkin I. B. Exponents of classes of non-negative matrices. *Discrete Mathematics and Applications*, 1993, vol. 3, iss. 4, pp. 365–375.
8. Salii V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2008, no. 1 (1), pp. 116–119 (in Russian).
9. Fomichev V. M. The estimates of exponents for primitive graphs. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2011, no. 2 (12), pp. 101–112 (in Russian).
10. Fomichev V. M., Avezova Y. E. The exact formula for the exponents of the mixing digraphs of register transformations. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2020, vol. 14, iss. 2, pp. 308–319. <https://doi.org/10.1134/S199047892002009X>
11. Meringer M. Fast generation of regular graphs and construction of cages. *Journal of Graph Theory*, 1999, vol. 30, iss. 2, pp. 137–146. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199902\)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199902)30:2<137::AID-JGT7>3.0.CO;2-G)
12. Abrosimov M. B., Kostin S. V. About primitive regular graphs with exponent 2. *Applied Discrete Mathematics. Supplement*, 2017, no. 10, pp. 131–134 (in Russian). <https://doi.org/10.17223/2226308X/10/51>
13. Kostin S. V. On the use of graph theory problems for the intellectual development of students. *Matematika v obrazovanii* [Mathematics in Education], 2014, iss. 10, pp. 68–74 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 24.07.2020

Принята к публикации / Accepted 12.10.2020

Опубликована / Published 31.05.2021