Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 294–304
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 294–304
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-294-304

Научная статья
УДК 517.912+514.1

Аналитическое вложение псевдогельмгольцевой геометрии

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет, Россия, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1
Кыров Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, kyrovVA@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

Аннотация. Для современной геометрии большое значение имеет изучение геометрий максимальной подвижности. Некоторые из таких геометрий хорошо изучены (геометрия Евклида, псевдоевклидова, симплектическая, сферическая, Лобачевского и т.д.), а другие плохо изучены (гельмгольцевы, псевдогельмгольцевы и т. д.). Полной классификации геометрий максимальной подвижности пока нет. В данной работе решается часть этой большой классификационной задачи. Решение ищется методом вложения, суть которого состоит в нахождении функций пары точек $f = \chi(g, w_i, w_j)$, задающей $(n + 1)$-мерную геометрию максимальной подвижности, по известной функции пары точек g n-мерной геометрии максимальной подвижности. В этой статье g — это либо функция пары точек двумерной псевдогельмгольцевой геометрии $g = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j|$, либо функция пары точек трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии $g = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j| + 2z_i + 2z_j$. Обе эти геометрии являются геометриями максимальной подвижности. В результате вложения двумерной псевдогельмгольцевой геометрии получаем трехмерную псевдогельмгольцеву геометрию, а в результате вложения трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии — геометрии максимальной подвижности не получаются. Решение задачи вложения сводится к решению специальных функциональных уравнений в классе аналитических функций.

Ключевые слова: геометрия максимальной подвижности, группа движений, псевдогельмгольцева геометрия, функциональное уравнение

Для цитирования: *Кыров В. А.* Аналитическое вложение псевдогельмгольцевой геометрии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 294–304. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-294-304

Article

Analytic embedding of pseudo-Helmholtz geometry

V. A. Kyrov

Gorno-Altaisk State University, 1 Lenkin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia
Vladimir A. Kyrov, kyrovVA@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-5925-7706

Abstract. For modern geometry, the study of maximal mobility geometries is of great importance. Some of these geometries are well studied (Euclidean, pseudo-Euclidean, symplectic, spherical, Lobachevsky, etc.), and others are poorly understood (Helmholtz, pseudo-Helmholtz, etc.). There is no complete classification of geometries for maximum mobility. In this paper, part of this large classification problem is solved. The solution is sought by the embedding method, the essence of which is to find the functions of a pair of $f = \chi(g, w_i, w_j)$, specifies $(n+1)$-dimensional geometries of maximum mobility, using the well-known function of a pair of g n-dimensional geometries of maximum mobility. In this paper, g is either a function of a pair of points of two-dimensional pseudo-Helmholtz geometry $g = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j|$, or the function of a pair of points of three-dimensional pseudo-Helmholtz geometry $g = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j| + 2z_i + 2z_j$. Both of these geometries are maximum mobility geometries. As a result of embedding a two-dimensional pseudo-Helmholtz geometry, we obtain a three-dimensional pseudo-Helmholtz geometry, but as a result of embedding a three-dimensional pseudo-Helmholtz geometry, geometries of maximum mobility are not obtained. Solving the embedding problem is reduced to solving special functional equations in the class of analytic functions.

Keywords: maximum mobility geometry, group of motions, pseudo-Helmholtz geometry, functional equation

For citation: Kyrov V. A. Analytic embedding of pseudo-Helmholtz geometry. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 294–304 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-294-304

Введение

Известна псевдогельмгольцева геометрия, задаваемая в двумерном и трехмерном случаях функциями пары точек [1]:

$$g_2 = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j|, \tag{1}$$

$$g_3 = \beta \ln |y_i - y_j| + \varepsilon \ln |x_i - x_j| + 2z_i + 2z_j, \tag{2}$$

где, например, (x_i, y_i) — координаты точки i в двумерном случае, а (x_i, y_i, z_i) — координаты точки i в трехмерном случае, причем $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\beta \neq 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Эта геометрия впервые появилась при классификации феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий [1–3] и является геометрией локальной максимальной подвижности, т. е. в двумерном случае размерность группы движений максимальна и равна 3, а в трехмерном случае также максимальна и равна 6.

В данной статье решаются две задачи.

1. Задача вложения двумерной псевдогельмгольцевой геометрии в трехмерную геометрию локальной максимальной подвижности. Она является частью более общей задачи вложения: *требуется найти все трехмерные геометрии локальной максимальной подвижности, задаваемые функциями пары точек вида $f = \chi(g, w_i, w_j)$, которые являются двухточечными инвариантами групп движений размерности 6, причем g — функция пары точек, задающая известную двумерную геометрию локальной максимальной подвижности из классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий* (*геометрий локальной максимальной подвижности*) [4]. В качестве g можно взять, например, метрическую функцию гельмгольцевой или дуальногельмгольцевой геометрий [4]. В данной работе вместо g берется функция пары точек двумерной псевдогельмгольцевой геометрии (1). Результатом решения этой задачи является трехмерная псевдогельмгольцева геометрия (2).

2. Задача вложения трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии в четырехмерные геометрии локальной максимальной подвижности, которая является час-

тью более общей задачи: *требуется найти все четырехмерные геометрии локальной максимальной подвижности, задаваемые функциями пары точек вида $f(i,j) = \chi(g, w_i, w_j)$ и являющиеся двухточечными инвариантами групп движений размерности 10, где g — функция пары точек известной трехмерной геометрии локальной максимальной подвижности из классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий (геометрий локальной максимальной подвижности)* [1, 3]. Ниже в качестве g берется функция пары точек трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии (2). В этом случае, решая поставленную задачу, получаем геометрии, не являющиеся локально максимально подвижными.

Решение сформулированной выше задачи вложения сводится к нахождению решений функционального уравнения специального вида, возникающего из требования локальной максимальной подвижности. Подобные уравнения обобщают известные функциональные уравнения Коши.

1. Метод вложения

Рассмотрим $(s+1)$-мерное аналитическое многообразие M_{s+1}, $s = 2, 3$, s-мерное аналитическое многообразие N_s и одномерное аналитическое многообразие L. Пусть $\pi_1 : N_s \times L \to N_s$ и $\pi_2 : N_s \times L \to L$ — проекции. Определим проекции $p_1 : M_{s+1} \times M_{s+1} \to M_{s+1}$ и $p_2 : M_{s+1} \times M_{s+1} \to M_{s+1}$, которые на точках действуют так: $p_1 : \langle i,j\rangle \mapsto i$ и $p_2 : \langle i,j\rangle \mapsto j$, где $\langle i,j\rangle$ — произвольная точка в $M_{s+1} \times M_{s+1}$.

Гипотеза вложения. *Пусть в аналитическом многообразии M_{s+1} задана функция пары точек $f : M_{s+1} \times M_{s+1} \to R^1$ с открытой и плотной областью определения $S_f \subset M^2_{s+1}$, которая является инвариантом локальной группы движений размерности $(s+1)(s+2)/2$. Тогда существует аналитическое отображение $h_s : M_{s+1} \to N_s \times L$, которое в некоторой окрестности произвольной точки из M_{s+1} задается диффеоморфизмом в некоторую окрестность из $N_s \times L$, а также функция пары точек $g_s : N_s \times N_s \to R^1$ с открытой и плотной областью определения $S_{g_s} \subset N^2_s$, задающая в аналитическом многообразии N_s геометрию локальной максимальной подвижности (g является двухточечным инвариантом локальной группы движений размерности $s(s+1)/2$), такая, что справедлива формула*

$$f = \chi\left(g_s\Big(\pi_1\big(h_s(p_1)\big), \pi_1\big(h_s(p_2)\big)\Big), \pi_2\big(h_s(p_1)\big), \pi_2\big(h_s(p_2)\big)\right),$$

где $\chi : R^1 \times L \times L \to R^1$ — некоторая аналитическая функция во всех точках своей области определения S_χ, причем $(0,0,0) \in S_\chi$.

Последняя формула на точках записывается так:

$$f(i,j) = \chi\left(g_s\bigg(\pi_1\Big(h_s\big(p_1(\langle i,j\rangle)\big)\Big), \pi_1\Big(h_s\big(p_2(\langle i,j\rangle)\big)\Big)\bigg),\right.$$
$$\left.\pi_2\Big(h_s\big(p_1(\langle i,j\rangle)\big)\Big), \pi_2\Big(h_s\big(p_2(\langle i,j\rangle)\big)\Big)\right), \quad (3)$$

где i, j — произвольные две точки из M_{s+1}, причем $\langle i,j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M_{s+1} рассмотрим координатную окрестность $U_{s+1} \subset M_{s+1}$, в которой h_s является диффеоморфизмом. Из вышесказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h_s : U_{s+1} \to V_s \times W$, где V_s, W — некоторые координатные окрестности в N_s и L соответственно. Координаты в окрестности V_2

обозначим (x, y), в окрестности V_3 — (x, y, z), а в окрестности W — (w). Тогда в локальных координатах функция (3) принимает следующий вид:

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \tag{4}$$

причем в этой работе для двумерного случая

$$g_2\Big(\pi_1\big(h(i)\big), \pi_1\big(h(j)\big)\Big) = \theta(x_i, y_i, x_j, y_j) = \beta \ln|y_i - y_j| + \varepsilon \ln|x_i - x_j|,$$

а для трехмерного случая

$$g_3\Big(\pi_1\big(h(i)\big), \pi_1\big(h(j)\big)\Big) = \theta(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \beta \ln|y_i - y_j| + \varepsilon \ln|x_i - x_j| + 2z_i + 2z_j,$$

где $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$.

Аксиома невырожденности. Для функции χ в произвольной точке из S_χ справедливы неравенства

$$\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \neq 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial w_i} \neq 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial w_j} \neq 0. \tag{5}$$

Выше сформулированная гипотеза неявно доказана В. Х. Левом [3] при $s = 2$. При $s \geqslant 3$ подробного доказательства пока еще нет. В данной работе решается задача вложения исходя из предположения справедливости этой гипотезы.

Метод вложения основан на гипотезе вложения и сводится к *нахождению всех функций пары точек вида* (4)*, являющихся инвариантом группы движений размерности* $(s+1)(s+2)/2$. Этот метод ранее апробирован на нескольких задачах [4].

2. Основные результаты

Рассмотрим $(s+1)$-мерное аналитическое многообразие M_{s+1}, $s = 2, 3$.

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U_{s+1} \subset M_{s+1}$ [1, 2]. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие) $\lambda : U_{s+1} \times G \to U'_{s+1}$, где $U'_{s+1} \subset M_{s+1}$ — область, причем выполняются свойства:

1) $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U_{s+1}$;

2) $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$ для любых $a, b \in G$ и $i \in U_{s+1}$;

3) для любого $i \in U_{s+1}$ равенство $\lambda(i, a) = i$ выполняется, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U_{s+1}$ таких, что $\langle i, j\rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j)\rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f\big(\lambda_a(i), \lambda_a(j)\big) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U_{s+1}(i)$ и $U_{s+1}(j)$ произвольных точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G равна $(s+1)(s+2)/2$.

Алгебра Ли действия группы Ли G при $s = 2$ состоит из операторов

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + P\partial_w, \tag{6}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, w)$, $P = P(x, y, w)$ — аналитические функции в U_3, $\alpha = 1, 2$ [1, 5], а при $s = 3$ — из операторов

$$X = X_1\partial_x + X_2\partial_y + X_3\partial_z + P\partial_w, \tag{7}$$

причем $X_\beta = X_\beta(x, y, z, w)$, $P = P(x, y, z, w)$ — аналитические функции в U_4, $\beta = 1, 2, 3$ [1, 5]. Через операторы (6) и (7) записывается условие локальной инвариантности [1, 5]:

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \tag{8}$$

которое выполняется в окрестностях $U_{s+1}(i') \subset U_{s+1}$ и $U_{s+1}(j') \subset U_{s+1}$ произвольных точек i' и j', причем i, j — произвольные точки из окрестностей $U_{s+1}(i')$ и $U_{s+1}(j')$.

Основной результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Рассмотрим произвольную точку из M_{s+1} и ее координатную окрестность U_{s+1}. Возьмем также две произвольные точки $i', j' \in U_{s+1}$ с окрестностями $U_{s+1}(i')$ и $U_{s+1}(j')$ такие, что*

$$U_{s+1}(i') \cup U_{s+1}(j') \subset U_{s+1}, \quad \text{причем} \ \ \langle i, j\rangle, \langle i', j'\rangle \in S_f, \quad \forall\, i \in U_{s+1}(i'), \quad \forall\, j \in U_{s+1}(j').$$

Тогда в предположении справедливости гипотезы вложения функция пары точек (4) в трехмерном аналитическом многообразии M_3 ($s = 2$), с точностью до масштабного преобразования (аналитическая функция от функции пары точек $\varphi(f) \to f$), совпадает с (2), а в четырехмерном аналитическом многообразии M_4 ($s = 3$) вырождена, т. е. не задает геометрию локальной максимальной подвижности.

Как сказано выше, функция (4) является двухточечным инвариантом действия группы Ли G размерности $(s+1)(s+2)/2$, поэтому условие локальной инвариантности (8) соответственно при $s = 2$ и при $s = 3$ в явном виде записывается так:

$$\Big[\beta u\big(X_2(i) - X_2(j)\big) + \varepsilon v\big(X_1(i) - X_1(j)\big)\Big]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + uv\left(P(i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i} + P(j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\Big[\beta u\big(X_2(i) - X_2(j)\big) + \varepsilon v\big(X_1(i) - X_1(j)\big) + 2uv\big(X_3(i) + X_3(j)\big)\Big]\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + \\ + uv\left(P(i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i} + P(j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right) = 0, \tag{10}$$

где $\beta = \mathrm{const} > 0$, $\beta \neq 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Здесь и везде ниже введены сокращающие обозначения: $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Заметим, что выражения (9) и (10) выполняются тождественно по координатам произвольных точек i и j из окрестностей $U_{s+1}(i')$ и $U_{s+1}(j')$.

3. Вспомогательные утверждения

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений, которые справедливы не только для аналитических функций, но также и для функций класса C^2.

Лемма 1. *В некоторой окрестности $U_{s+1}(i') \times U_{s+1}(j')$ произвольной точки $\langle i', j'\rangle \in M_{s+1} \times M_{s+1}$, где $U_{s+1}(i') \cup U_{s+1}(j') \subset U_{s+1}$, для тождества (9) выполняется неравенство*

$$\beta u\big(X_2(i) - X_2(j)\big) + \varepsilon v\big(X_1(i) - X_1(j)\big) \neq 0,$$

а для тождества (10) — *неравенство*

$$\beta u\big(X_2(i)-X_2(j)\big)+\varepsilon v\big(X_1(i)-X_1(j)\big)+2uv\big(X_3(i)+X_3(j)\big)\neq 0,$$

причем $i\in U_{s+1}(i')$ *и* $j\in U_{s+1}(j')$.

Доказательство леммы 1 проводится по схеме доказательства леммы 1 из [4].

Лемма 2. *В некоторой окрестности* $U_{s+1}(i')\subset U_{s+1}$ *произвольной точки* $i'\in U_{s+1}\subset M_{s+1}$ *функция* P *из тождеств* (9) *и* (10) *отлична от нуля.*

Доказательство леммы 2 проводится по схеме доказательства леммы 1 из [4].

Лемма 3. *В некоторой окрестности* $U_3(i')\subset U_3$ *произвольной точки* $i'\in U_3\subset M_3$ *функция* $P(x,y,w)$*, входящая в тождество* (9)*, зависит от* x *и* y *существенно, т. е.* $\left(\frac{\partial P(x,y,w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P(x,y,w)}{\partial y}\right)^2\neq 0$.

Лемма 4. *В некоторой окрестности* $U_4(i')\subset U_4$ *произвольной точки* $i'\in U_4\subset M_4$ *функция* $P(x,y,z,w)$*, входящая в тождество* (10)*, зависит от* x *и* y *существенно, т. е.* $\left(\frac{\partial P(x,y,z,w)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P(x,y,z,w)}{\partial y}\right)^2\neq 0$.

Доказательство. Леммы 3 и 4 доказываются аналогично, поэтому подробное доказательство приведем для леммы 4.

Предположим противное. Тогда тождество (10) для произвольной точки $\langle i,j\rangle$ из окрестности $U_4(i')\times U_4(j')$ представим в виде

$$\varepsilon v\big(X_1(i)-X_1(j)\big)+\beta u\big(X_2(i)-X_2(j)\big)+2uv\big(X_3(i)+X_3(j)\big)=uvF(\theta,w_i,w_j)=\overline{F},\quad (11)$$

где введено обозначение $F=F(\vartheta,z_i,z_j,w_i,w_j)=-\left(P(z_i,w_i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i}+P(z_j,w_j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\right)/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}$, причем аргумент θ имеет вид (2), $\vartheta=\varepsilon\ln|u|+\beta\ln|v|$, $F\neq 0$ (лемма 1), $P\neq 0$ (лемма 2). Продифференцируем равенство (11) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$\begin{gathered}
\beta\big(X_2(i)-X_2(j)\big)+\varepsilon vX'_{1x}(i)+\beta uX'_{2x}(i)+2uvX'_{3x}(i)+2v\big(X_3(i)+X_3(j)\big)=\overline{F}'_u,\\
\beta\big(X_2(i)-X_2(j)\big)+\varepsilon vX'_{1x}(j)+\beta uX'_{2x}(j)-2uvX'_{3x}(j)+2v\big(X_3(i)+X_3(j)\big)=\overline{F}'_u,\\
\varepsilon\big(X_1(i)-X_1(j)\big)+\varepsilon vX'_{1y}(i)+\beta uX'_{2y}(i)+2uvX'_{3y}(i)+2u\big(X_3(i)+X_3(j)\big)=\overline{F}'_v,\\
\varepsilon\big(X_1(i)-X_1(j)\big)+\varepsilon vX'_{1y}(j)+\beta uX'_{2y}(j)-2uvX'_{3y}(j)+2u\big(X_3(i)+X_3(j)\big)=\overline{F}'_v.
\end{gathered}$$

Далее комбинируем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$\begin{cases}\varepsilon v\big(X'_{1x}(i)-X'_{1x}(j)\big)+\beta u\big(X'_{2x}(i)-X'_{2x}(j)\big)+2uv\big(X'_{3x}(i)+X'_{3x}(j)\big)=0,\\ \varepsilon v\big(X'_{1y}(i)-X'_{1y}(j)\big)+\beta u\big(X'_{2y}(i)-X'_{2y}(j)\big)+2uv\big(X'_{3y}(i)+X'_{3y}(j)\big)=0.\end{cases}\qquad (12)$$

Затем дифференцируем по z_i и w_i, после чего дифференцируем по x_j и y_j и интегрируем: $X_1=X_1(x,y)+p(z,w)$, $X_2=X_2(x,y)+q(z,w)$, $X_3=X_3(x,y)+r(z,w)$.

Далее уравнения в системе (12) дифференцируем одновременно по x_i и x_j; по x_i и y_j; по y_i и y_j:

$$\begin{gathered}
-\beta V'_x(i)-\beta V'_x(j)-2vW'_x(i)+2vW'_x(j)=0,\\
-\varepsilon U'_y(i)-\varepsilon U'_y(j)-2uW'_y(i)+2uW'_y(j)=0,
\end{gathered}$$

$$-\varepsilon U'_x(i) - \beta V'_y(j) - 2uW'_x(i) + 2vW'_y(j) - 2\big(W(i) + W(j)\big) = 0,$$

где $U = X'_{1x}$ или X'_{1y}, $V = X'_{2x}$ или X'_{2y}, $W = X'_{3x}$ или X'_{3y}. Дифференцируя в последней системе по координатам точек i и j, затем разделяя переменные и интегрируя, имеем $W = ax + by + c,\ a, b, c = \mathrm{const}$. Тогда

$$\beta V'_x(i) + \beta V'_x(j) = 0, \quad U'_y(i) + U'_y(j) = 0, \quad \varepsilon U'_x(i) + \beta V'_y(j) + 4ax_i + 4by_j + 4c = 0,$$

после разделения переменных и интегрирования получаем

$$-\varepsilon U = 2ax^2 + 2cx + dx + p, \quad \beta V = -2by^2 - 2cy + dy + q,$$

причем $a, b, c, d, p, q = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$-\varepsilon X'_{1x} = 2a_1x^2 + 2c_1x + d_1x + p_1, \quad \beta X'_{2x} = -2b_1y^2 - 2c_1y + d_1y + q_1,$$
$$X'_{3x} = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$-\varepsilon X'_{1y} = 2a_2x^2 + 2c_2x + d_2x + p_2, \quad \beta X'_{2y} = -2b_2y^2 - 2c_2y + d_2y + q_2,$$
$$X'_{3y} = a_2x + b_2y + c_2,$$

где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p_1, p_2, q_1, q_2 = \mathrm{const}$. Из независимости частной производной от порядка дифференцирования вытекает: $a_2 = b_1 = 0$, $d_1 = 2c_1$, $d_2 = -2c_2$. Тогда

$$-\varepsilon X'_{1x} = 2a_1x^2 + 4c_1x + p_1, \quad \beta X'_{2x} = q_1, \quad -\varepsilon X'_{1y} = p_2, \quad \beta X'_{2y} = -2b_2y^2 - 4c_2y + q_2,$$
$$X_3 = a_1x^2/2 + b_2y^2/2 + c_1x + c_2y + r(z, w).$$

Продифференцируем равенство (12) дважды: по x_i и x_j, по x_i и y_j, по y_i и y_j, затем подставляем явные выражения для X_1, X_2 и X_3:

$$-2q_1 - 2a_1uv = -\frac{\varepsilon v}{u}\big(F'_\vartheta + \varepsilon F''_{\vartheta\vartheta}\big), \quad 2p_2 - 2b_2uv = -\frac{\beta u}{v}\big(F'_\vartheta + \beta F''_{\vartheta\vartheta}\big),$$
$$p_1 - q_2 - a_1u^2 - b_2v^2 - 2r(z_i, w_i) - 2r(z_i, w_j) = -\big(F + (\varepsilon + \beta)F'_\vartheta + \varepsilon\beta F''_{\vartheta\vartheta}\big).$$

Из первых двух уравнений следует: $q_1 = p_2 = a_1 = b_2 = 0$, $F'_\vartheta = F''_{\vartheta\vartheta} = 0$. Тогда

$$F = q_2 - p_1 + 2r(z_i, w_i) + 2r(z_i, w_j),$$
$$-\varepsilon X_1 = 2c_1x^2 + p_1x + p(z, w), \quad \beta X_2 = -2c_2y^2 + q_2y + q(z, w),$$
$$X_3 = c_1x + c_2y + r(z, w).$$

Подставляя найденное в (11), получаем $p(z, w) = p = \mathrm{const}$, $q(z, w) = q = \mathrm{const}$. Тогда приходим к алгебре Ли, произвольный оператор которой имеет вид

$$X = -\varepsilon(2c_1x^2 + p_1x + p)\partial_x + \frac{1}{\beta}(-2c_2y^2 + q_2y + q)\partial_y + \big(c_1x + c_2y + r(z, w)\big)\partial_z + X_4(z, w)\partial_w.$$

Придавая постоянным значения 0 и 1, выделяем базис: $X_1 = -2\varepsilon x^2\partial_x + x\partial_z$, $X_2 = -y^2\partial_y + \beta y\partial_z$, $X_3 = x\partial_x$, $X_4 = y\partial_y$, $X_5 = \partial_x$, $X_6 = \partial_y$, $X' = r(z, w)\partial_z + X_4(z, w)\partial_w$, причем $X' = \alpha X_7 + \alpha_2 X_8 + \cdots$. Алгебра Ли должна быть замкнута относительно операции коммутирования, поэтому $[X_1, X'] = xr'_z\partial_z + xX'_{4z}\partial_w = \alpha X' + \beta X_1 + \gamma X_2$, следовательно, $r'_z = X'_{4z} = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тогда $r = r(w)$, $X_4 = X_4(w) \neq 0$. Далее, вводится замена координат: $\overline{z} = z - \int \frac{r(w)dw}{X_4(w)}$, $\overline{w} = \int \frac{dw}{X_4(w)}$, поэтому $X' = \partial_{\overline{w}}$. Значит, размерность алгебры Ли меньше 10. Противоречие. Лемма доказана. $\square$

4. Доказательство теоремы

Функциональные уравнения (9) и (10) в некоторой окрестности $U_{s+1}(i') \times U_{s+1}(j')$ произвольной точки $\langle i', j' \rangle \in M_{s+1} \times M_{s+1}$ удобно переписать в виде

$$\beta u\big(X_2(i) - X_2(j)\big) + \varepsilon v\big(X_1(i) - X_1(j)\big) + uv\big(P(i)F_1 + P(j)F_2\big) = 0, \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\beta u\big(X_2(i) - X_2(j)\big) + \varepsilon v\big(X_1(i) - X_1(j)\big) + 2uv\big(X_3(i) + \\ + X_3(j)\big) + uv\big(P(i)F_1 + P(j)F_2\big) = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $i \in U_{s+1}(i') \subset U_{s+1}$, $j \in U_{s+1}(j') \subset U_{s+1}$, U_{s+1} — координатная окрестность произвольной точки $k_s \in M_{s+1}$. В (13) и (14) введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \Big/ \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \Big/ \frac{\partial \chi}{\partial \theta}. \tag{15}$$

Из аналитичности функции χ в S_χ и аксиомы невырожденности очевидно следуют аналитичность функций (15) в S_χ и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда имеем разложения в ряд Тейлора [6] в S_χ

$$\begin{cases} F_1 = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2 = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \end{cases} \tag{16}$$

где $f_1(w_i, w_j)$, $D_1(f_1)(w_i, w_j)$, $1/2D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j), \ldots$ — коэффициенты разложений функции F_1, а $f_2(w_i, w_j)$, $D_1(f_2)(w_i, w_j)$, $1/2D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j), \ldots$ — коэффициенты разложений для F_2.

В окрестности произвольной точки k_2 из U_3 решаем уравнение (13). Для этого разложения (16) подставляем в (13), после чего группируем по степеням $\theta = \beta \ln|v| + \varepsilon \ln|u|$ и вводим удобные обозначения для коэффициентов, в результате получим тождество

$$A + uv(A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + A_3\theta^3 + \cdots) = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered} A_0 = P(i) f_1(w_i, w_j) + P(j) f_2(w_i, w_j), \\ A_\alpha = P(i) D_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha}}(f_1)(w_i, w_j) + P(j) D_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha}}(f_2)(w_i, w_j), \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \end{gathered}$$

а через A обозначено все остальное. Из построения следует аналитичность коэффициентов A, A_0, A_1, A_2, $A_3, \ldots$ как функций координат x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j точки $\langle i, j \rangle$ в окрестности $U_3 \times U_3$ точки $\omega = (k_2, k_2)$.

Дифференцируя (17) по x_i и y_i, при этом учитывая, что $\partial\theta/\partial x_i = \varepsilon/(x_i - x_j)$, $\partial\theta/\partial y_i = \beta/(y_i - y_j)$, получаем:

$$B_0 + B_1\theta + B_2\theta^2 + B_3\theta^3 + \cdots = 0, \tag{18}$$

где B_0, B_α — аналитические функции переменных x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j в окрестности $U_3 \times U_3$ точки $\omega = (k_2, k_2)$, $B_\alpha = A_\alpha + (\alpha+1)(\beta+\varepsilon)A_{\alpha+1} + (\alpha+1)(\alpha+2)\beta\varepsilon A_{\alpha+2} + uM'_\alpha + {} + vN'_\alpha + uvS'_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$, а M'_α, N'_α, S'_α — некоторые аналитические функции, выражаемые через A_0, A_α и их производные.

Можно всегда считать $B_0 = 0$ в точке ω, поскольку иначе уравнение (18) умножаем на θ и получаем уравнение такого же вида, но с нулевым свободным членом.

Лемма 5. *Функциональное уравнение*

$$C_0 + C_1\sigma + C_2\sigma^2 + C_3\sigma^3 + \dots = 0,$$

в котором коэффициенты C_0, C_1, C_2, $C_3, \dots$ — аналитические функции в окрестности точки $\omega \in U_3 \times U_3$ и $C_0 = 0$, $C_1 \neq 0$ в ω, имеет аналитическое решение σ в окрестности этой же точки.

Доказательство этой леммы является следствием теоремы о неявной функции [6, 7] в классе аналитических функций.

Сначала полагаем $B_0 = 0$, а $B_1 \neq 0$ в точке ω. Согласно лемме 5, функция $\theta = \beta \ln|y_i - y_j| + \varepsilon \ln|x_i - x_j|$ не обращает левую часть уравнения (18) в ноль, поскольку в ω нарушается ее аналитичность ($x_i \neq x_j$ и $y_i \neq y_j$). Поэтому $B_1 = 0$ в ω.

Пусть теперь $B_0 = B_1 = 0$, а $B_2 \neq 0$ в точке ω.

Тогда уравнение (18) умножаем на u, а затем дифференцируем по x_i. Получим новое функциональное уравнение:

$$B_0 + uB'_{0x_i} + \varepsilon B_1 + (B_1 + uB'_{1x_i} + 2\varepsilon B_2)\theta + (B_2 + uB'_{2x_i} + 3\varepsilon B_3)\theta^2 + \dots = 0. \qquad (19)$$

Коэффициенты левой части этого уравнения представляют собой аналитическую функцию переменных x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j в окрестности точки $\omega \in U_3 \times U_3$, свободный коэффициент равен нулю в точке ω, а коэффициент перед θ отличен от нуля. Тогда, согласно лемме 5, функция θ не является решением уравнения (19). Поэтому $B_2 = 0$ в точке ω.

Продолжая этот процесс, получаем $B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + \dots = 0$ в точке ω. В таком случае из определения B_α следует, что $A_1 = A_2 = \dots = 0$ в точке $\omega = (k_2, k_2) \in U_3 \times U_3$, причем k_2 — произвольная точка из U_3.

Воспользовавшись формулами для A_α, получим:

$$P(i)D_{\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha}}(f_1)(w_i, w_j) + P(j)D_{\underbrace{1,\dots,1}_{\alpha}}(f_2)(w_i, w_j) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Используя разложения функции P в ряд Тейлора [6], будем иметь

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(P)(w_i)\overline{F_1}(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(P)(w_j)\overline{F_2}(w_i, w_j) = 0,$$
$$\alpha_n = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Перед выражениями

$$\overline{F_1} = \big(D_1(f_1), D_{1,1}(f_1), D_{1,1,1}(f_1), \dots\big), \quad \overline{F_2} = \big(D_1(f_2), D_{1,1}(f_2), D_{1,1,1}(f_2), \dots\big)$$

стоят коэффициенты разложения для P в ряд Тейлора. Поэтому из леммы 3 следует

$$F_1 = f_1(w_i, w_j) \neq 0, \quad F_2 = f_2(w_i, w_j) \neq 0.$$

Далее полученные результаты и разложения функций X_1, X_2 и P в ряд Тейлора [6] подставим в (13), затем сравниваем коэффициенты со степенями 3 и выше при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, в результате будем иметь:

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(P)(w_i)f_1(w_i, w_j) = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(w_i), \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(P)(w_j)f_2(w_i, w_j) = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots}(w_j),$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что задача сравнения коэффициентов существенно упрощается с применением пакета математических программ MAPLE 15 [8].

Воспользовавшись леммой 3, имеем $f_1(w_i, w_j) = \phi(w_i)$, $f_2(w_i, w_j) = \phi(w_j)$. Затем идем в (15), откуда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\phi(w_i)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial\chi}{\partial w_i} = 0, \quad \phi(w_j)\frac{\partial\chi}{\partial\theta} - \frac{\partial\chi}{\partial w_j} = 0.$$

Полученная система имеет решение: $f = \overline{\psi}\big(\theta + \overline{w}_i + \overline{w}_j\big)$, $\quad \overline{w} = \int \phi(w)dw$. С точностью до переобозначения $\overline{w} = 2\overline{z}$ получим невырожденную функцию пары точек (2).

Аналогично рассуждая относительно уравнения (14), также получаем решение $f = \overline{\psi}\big(\theta + \overline{w}_i + \overline{w}_j\big)$. С точностью до переобозначения $\overline{w} + 2z = 2\overline{z}$ эта функция пары точек вырожденна, т. е. не удовлетворяет аксиоме невырожденности (выпадает четвертая координата точки). Теорема доказана. □

Заключение

Таким образом, поставленная задача об аналитическом вложении псевдогельмгольцевой геометрии в двумерном и трехмерном случаях полностью решена. Результатом вложения двумерной псевдогельмгольцевой геометрии является трехмерная псевдогельмгольцева геометрия, а результатом вложения трехмерной псевдогельмгольцевой геометрии — четырехмерная геометрия с вырожденной функцией пары точек, которая не является геометрией максимальной подвижности.

Список литературы

1. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2016. 297 с. URL: https://arxiv.org/pdf/1602.02795 (дата обращения: 20.10.2020).
2. *Михайличенко Г. Г.* О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
3. *Лев В. Х.* Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. 1988. № 125. С. 90–103.
4. *Кыров В. А.* Аналитическое вложение некоторых двумерных геометрий максимальной подвижности // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 16. С. 916–937. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061
5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1978. 400 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Москва : Физматлит, 1963. Т. 2. 524 с.
7. *Schwartz L.* Analyse mathematique. T. I. Paris : Hermann, 1967. 824 p.
8. *Дьяконов В.* Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. Москва : ДМС Пресс, 2014. 640 с.

References

1. Mikhailichenko G. G. *The Mathematical Basics and Results of the Theory of Physical Structures*. Gorno-Altaisk, Publishing house of Gorno-Altaisk State University, 2016. 267 p. Avaiable at: https://arxiv.org/pdf/1602.02795 (accessed 20 October 2020).
2. Mikhailichenko G. G. Group and phenomenological symmetries in geometry. *Siberian Mathematical Journal*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 764–774. https://doi.org/10.1007/BF00968690

3. Lev V. Kh. Three-dimensional geometries in the theory of physical structures. *Computing Systems*, 1988, no. 125, pp. 90–103 (in Russian).
4. Kyrov V. A. Analytic embedding of some two-dimensional geometries of maximum mobility. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 16, pp. 916–937 (in Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061
5. Ovsyannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equation*. New York, Academic Press, 1982. 400 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1978. 400 p.).
6. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Fizmatlit, 1963. Vol. 2. 524 p. (in Russian).
7. Schwartz L. *Analyse mathematique. T. I*. Paris, Hermann, 1967. 824 p. (in French).
8. Dyakonov V. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in Mathematical Calculations]. Moscow, DMS Press, 2014. 640 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 21.12.2020
Принята к публикации / Accepted 26.04.2021
Опубликована / Published 31.08.2021