Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 326–335
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335

Научная статья
УДК 517.544.8

О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях

К. М. Расулов, Т. Р. Нагорная✉

Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4

Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447

Нагорная Татьяна Романовна, аспирант кафедры математического анализа, tani7n@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5976-7391

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача типа задачи Неймана для решений одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. На основе общего представления решений рассматриваемого дифференциального уравнения через две аналитические функции комплексного переменного, а также с учетом свойств уравнений Шварца для окружностей устанавливается, что в случае круговых областей исследуемая краевая задача решается в явном виде, т. е. ее общее решение можно найти, используя лишь формулы Ф. Д. Гахова для решения скалярной задачи сопряжения для аналитических функций комплексного переменного, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Бауэра, краевая задача Неймана, уравнение Шварца, явное решение, круговая область

Для цитирования: *Расулов К. М., Нагорная Т. Р.* О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 326–335. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335

Article

The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains

K. M. Rasulov, T. R. Nagornaya✉

Smolensk State University, 4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russia

Karim M. Rasulov, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447

Tatyana R. Nagornaya, tani7n@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-5976-7391

Abstract. The article is devoted to the boundary value problem of Neumann problem's type for solutions of one second-order elliptic differential equation. Based on the general representation of the solutions of the differential equation as two analytical functions of a complex variable, and also taking into account the properties of the Schwarz equations for circles, it is established that in the case of circular domains, the boundary value problem is solved explicitly, i.e., its general solution can be found using only the F. D. Gakhov formulas for solving the scalar Riemann problem for analytic functions of a complex variable, as well as solving a finite number of linear differential equations and (or) systems of linear algebraic equations for which the matrix of the system can be written out in quadratures.

Keywords: Bauer differential equation, Neumann boundary value problem, explicit solution, circular domain

For citation: Rasulov K. M., Nagornaya T. R. The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 326–335 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335

1. Постановка задачи

Пусть $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, а T^+ — односвязная область, лежащая в круге U_1^+ (т. е. $T^+ \subset U_1^+$) и ограниченная простой гладкой замкнутой кривой L. Рассмотрим в области T^+ следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1-z\bar{z})^2} W = 0, \tag{1}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$, n — некоторое неотрицательное целое число, а $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ — неизвестная функция.

Поскольку впервые на некоторые качественные свойства решений дифференциального уравнения (1) обратил внимание К. В. Бауэр (K. W. Bauer) [1], то уравнение (1) в дальнейшем будем называть дифференциальным уравнением Бауэра. В монографии [2] достаточно подробно излагаются функциональные свойства решений дифференциального уравнения Бауэра, в частности, в ней установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n (\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}})^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^{n} B_k^n (\frac{\bar{z}}{1-z\bar{z}})^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \tag{2}$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические (голоморфные) в области T^+ функции.

Так как при $n = 0$ решения уравнения (1) являются гармоническими функциями в области T^+, то в дальнейшем в случае $n \geqslant 1$ регулярные решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+, а функции $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), для удобства назовем соответственно первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции $W(z)$. При этом класс всех обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ будем обозначать символом $G_n(T^+)$, а через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+, для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$, $f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. $\varphi^+(z), f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гельдера) продолжаются на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача. Требуется найти все функции $W(z) \in G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$, удовлетворяющие на L условию

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n_-} = h(t), \quad t \in L, \tag{3}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_-}$ — производная по внешней нормали к L, а $h(t) = a(t) + ib(t)$ — заданная на L функция класса Гельдера $H(L)$.

Сформулированную задачу кратко будем называть задачей GN_n (или задачей Неймана для обобщенных гармонических функций порядка n).

Используя комплексно-аналитические методы решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений (см., например, [3–6]), а также свойства уравнения Шварца для аналитических кривых [7], в настоящей работе устанавливается, что в круговых областях задача GN_n в классах $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ допускает решение в явном виде (см., например, [8,9]), т. е. ее общее решение можно найти, используя лишь формулы Ф. Д. Гахова для решения скалярной задачи сопряжения для аналитических функций комплексного переменного, а также решая конечное число линейных дифференциальных уравнений и (или) систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах. Поскольку логическая схема и алгоритм предлагаемого метода решения задачи GN_n полностью «раскрывается» уже при $n = 1$, то ради краткости мы в данной работе ограничиваемся решением задачи GN_n при $n = 1$ и $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $0 < r < 1$.

Основной целью настоящей статьи является построение явного метода решения задачи GN_n в классах $G_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ в случае, когда $n = 1$ и $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $0 < r < 1$.

2. О решении в явном виде задачи GN_n в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$ при $n = 1$

Пусть $L_r = \{t : |t| = r\}$ — граница круга $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$. В силу (2) при $n = 1$ и $T^+ = T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ всякую обобщенную гармоническую функцию $W(z)$ из класса $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ можно задавать в виде

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}}\varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz}} + \frac{2z}{1 - z\bar{z}}\overline{f^+(z)}, \quad z \in T^+, \tag{4}$$

где $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ — аналитические в круге T_r^+ функции, принадлежащие классу $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$. Следовательно, в силу (4) и того, что на окружности $L_r = \{t : |t| = r\}$ выполняется тождество $\bar{t} = \frac{r^2}{t}$ и справедливо соотношение (см., например, [9, с. 37] или [10, с. 303])

$$\frac{\partial W}{\partial n_-} = t\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{r^2}{t}\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}, \tag{5}$$

краевое условие (3) можно записать так:

$$t^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \frac{2r^2}{1 - r^2} \cdot t \cdot \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{2r^2(1 + r^2)}{(1 - r^2)^2} \cdot \varphi^+(t) +$$

$$+\frac{t^2}{r^2}\cdot(\overline{t^2\cdot\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}}+\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot\overline{t\cdot\frac{df^+(t)}{dt}}+\frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\cdot\overline{f^+(t)})=t\cdot h(t). \tag{6}$$

Таким образом, для полного решения краевой задачи GN_n при $n=1$ требуется найти всевозможные пары аналитических в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$ функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, граничные значения которых на окружности $L_r=\{t:|t|=r\}$ удовлетворяют соотношению (6).

Далее построим конструктивный алгоритм, позволяющий получить полное решение краевой задачи GN_n при $n=1$ в круге $T_r^+=\{z:|z|<r\}$.

Шаг 1. Вводя в рассмотрение голоморфные в круге T_r^+ функции

$$\begin{gathered}\Phi^+(z)=z^2\cdot\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2}+\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot z\cdot\frac{d\varphi^+(z)}{dz}+\frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\cdot\varphi^+(z),\\ F^+(z)=z^2\cdot\frac{d^2f^+(z)}{dz^2}+\frac{2r^2}{1-r^2}\cdot z\cdot\frac{df^+(z)}{dz}+\frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\cdot f^+(z),\quad z\in T_r^+,\end{gathered} \tag{7}$$

перепишем равенство (6) в виде

$$\Phi^+(t)=-\frac{t^2}{r^2}\overline{F^+(t)}+t\cdot h(t),\quad t\in L_r. \tag{8}$$

Шаг 2. Вводим в рассмотрение вспомогательную голоморфную в T_r^- функцию $F^-(z)$, связанную с $F^+(z)$ по формуле

$$F^-(z)=\overline{F^+}(\frac{r^2}{z}),\quad z\in T_r^-, \tag{9}$$

где T_r^- дополнение замкнутого круга $T_r^+\cup L_r$ до расширенной комплексной плоскости (т. е. $T_r^-=\bar{C}\backslash(T_r^+\cup L_r)$).

Шаг 3. Так как во всех точках окружности $L_r=\{t:|t|=r\}$ справедливо соотношение $F^-(t)=\overline{F^+(t)}$, то равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\Phi^+(t)=-\frac{t^2}{r^2}F^-(t)+t\cdot h(t),\quad t\in L_r. \tag{10}$$

Но равенство (10) является граничным условием задачи сопряжения относительно ограниченной на бесконечности кусочно аналитической функции $\Phi(z)=\{\Phi^+(z),F^-(z)\}$ (см., например, [10, с. 106]).

Так как индекс задачи сопряжения (10) равен двум ($\chi=Ind(\frac{t^2}{r^2})=2$), то она безусловно разрешима и ее общее решение (т. е. всевозможные пары аналитических функций $\Phi^+(z)$ и $F^-(z)$, граничные значения которых удовлетворяют равенству (10), можно задавать в виде (см., например, [10, с. 112])

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\tau\cdot h(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{r^2}(C_0+C_1z+C_2z^2),\quad z\in T_r^+, \tag{11}$$

$$F^-(z)=-\frac{r^2z^{-2}}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\tau\cdot h(\tau)}{\tau-z}d\tau+\frac{C_0}{z^2}+\frac{C_1}{z}+C_2,\quad z\in T_r^-, \tag{12}$$

где $C_k=a_k+ib_k$ $(k=0,1,2)$ — произвольные комплексные постоянные.

Шаг 4. Теперь, на основании формул (9) и (12), находим аналитическую в T_r^+ функцию $F^+(z)$:

$$F^+(z) = \overline{F^-}(\frac{r^2}{z}), \quad z \in T_r^+. \tag{13}$$

Шаг 5. Далее покажем, как по уже известным аналитическим в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ функциям $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ можно найти всевозможные пары аналитических функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (4) (т. е. найти решения исходной задачи GN_n при $n = 1$).

Для этого заметим, что в силу равенств (7) относительно аналитических функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ получаем следующие линейные дифференциальные уравнения Эйлера (см., например, [11, с. 136]):

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \tag{14}$$

$$z^2 \cdot \frac{d^2 f^+(z)}{dz^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cdot f^+(z) = F^+(z), \quad z \in T_r^+, \tag{15}$$

где $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ — аналитические функции, определяемые по формулам (11) и (13) соответственно.

Так как дифференциальные уравнения (14) и (15) отличаются лишь правыми частями, то подробно остановимся на исследовании дифференциального уравнения (14).

Сначала исследуем соответствующее (14) однородное дифференциальное уравнение Эйлера, т. е. уравнение вида

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2r^2}{1-r^2} \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cdot \varphi^+(z) = 0, \quad z \in T_r^+. \tag{16}$$

Как известно (см., например, [11, с. 136]), при помощи подстановки $z = e^s$ уравнение (16) приводится к следующему линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}^+(s)}{ds^2} - \frac{1-3r^2}{1-r^2}\frac{d\tilde{\varphi^+}(s)}{ds} + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cdot \tilde{\varphi^+}(s) = 0, \tag{17}$$

где $\tilde{\varphi}^+(s) = \varphi^+(e^s)$.

Характеристическое уравнение для (17) имеет вид

$$\lambda^2 - \frac{1-3r^2}{1-r^2} \cdot \lambda + \frac{2r^2(1+r^2)}{(1-r^2)^2} = 0, \tag{18}$$

где $r \in (0, 1)$.

Нетрудно проверить, что для всех $r \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}, 1)$ квадратное уравнение (18) имеет два различных корня λ_1 и λ_2, которые определяются формулами

$$\lambda_1 = \frac{1-3r^2-\sqrt{1-14r^2+r^4}}{2(1-r^2)}, \lambda_2 = \frac{1-3r^2+\sqrt{1-14r^2+r^4}}{2(1-r^2)}. \tag{19}$$

Если же $r = r_0 = 2-\sqrt{3}$, то уравнение (18) имеет один (двукратный) корень $\lambda_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, общее решение однородного дифференциального уравнения (16) в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, можно задавать так (см, например, [11, с. 137]):

$$\varphi^+(z) = \begin{cases} l_1 z^{\lambda_1} + l_2 z^{\lambda_2}, & \text{если } r \neq 2 - \sqrt{3}, \\ l_1 z^{\lambda_0} + l_2 z^{\lambda_0} \cdot \ln z, & \text{если } r = 2 - \sqrt{3}, \end{cases} \tag{20}$$

где $l_k = \mu_k + i\upsilon_k$ $(k = 1, 2)$ — произвольные комплексные постоянные, а под $\ln z$ здесь и далее понимается главная ветвь логарифмической функции.

Легко проверить, что для $r \in (0, 1)$ числа λ_1 и λ_2, определяемые по формулам (19), не могут быть целыми положительными числами. Отсюда следует, что при всех $r \in (0, 1)$ и $|l_1| + |l_2| \neq 0$ в точке $z = 0$ функция вида (20) не будет аналитической. Значит, однородное дифференциальное уравнение (16) не имеет аналитических в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, ненулевых решений.

Переходим теперь к исследованию неоднородного дифференциального уравнения (14).

Пусть $r \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 - \sqrt{3}, 1)$. Тогда частное решение неоднородного уравнения (14) можно искать методом вариации произвольных постоянных, т. е. в виде

$$\varphi^+(z) = l_{11}(z) z^{\lambda_1} + l_{12}(z) z^{\lambda_2}, \tag{21}$$

где $l_{11}(z)$ и $l_{12}(z)$ — пока неизвестные функции, аналитические в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, за исключением, быть может, точки $z = 0$.

Для нахождения неизвестных функций $l_{11}(z)$ и $l_{12}(z)$ составим систему уравнений Лагранжа для дифференциального уравнения (14):

$$\begin{cases} \dfrac{dl_{11}(z)}{dz} z^{\lambda_1} + \dfrac{dl_{12}(z)}{dz} z^{\lambda_2} = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{dl_{11}(z)}{dz} z^{\lambda_1 - 1} + \lambda_2 \dfrac{dl_{12}(z)}{dz} z^{\lambda_2 - 1} = \Phi^+(z). \end{cases} \tag{22}$$

Решая систему (22), получаем

$$\frac{dl_{11}}{dz} = \frac{z^{1-\lambda_1} \Phi^+(z)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \frac{dl_{12}(z)}{dz} = \frac{z^{1-\lambda_2} \Phi^+(z)}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{23}$$

Отсюда с помощью интегрирования находим

$$l_{11}(z) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int z^{1-\lambda_1} \Phi^+(z)\, dz, \quad l_{12}(z) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int z^{1-\lambda_2} \Phi^+(z)\, dz, \tag{24}$$

где $\int z^{1-\lambda_1} \Phi^+(z)\, dz$ и $\int z^{1-\lambda_2} \Phi^+(z)\, dz$ — фиксированные первообразные функций $z^{1-\lambda_1} \Phi^+(z)$ и $z^{1-\lambda_2} \Phi^+(z)$ соответственно.

С учетом (24) из (21) будем иметь:

$$\varphi^+(z) = \frac{z^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int z^{1-\lambda_1} \Phi^+(z) dz + \frac{z^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int z^{1-\lambda_2} \Phi^+(z) dz. \tag{25}$$

Поскольку дифференциальное уравнение (15) отличается от (14) лишь правой частью, то при $r \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 - \sqrt{3}, 1)$ частное решение неоднородного уравнения (15) будет иметь вид

$$f^+(z) = \frac{z^{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \int z^{1-\lambda_1} F^+(z)\, dz + \frac{z^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \int z^{1-\lambda_2} F^+(z)\, dz. \tag{26}$$

Так как мы ищем решения задачи GN_1 в классе $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, то функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, определяемые по формулам (25) и (26) соответственно, должны принадлежать классу $A(T_r^+) \cup H^{(2)}(L)$. Но, согласно известной теореме Харди и Литтльвуда (см., например, [12, с. 397]), для этого необходимо и достаточно, чтобы в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, $r \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}, 1)$, выполнялись неравенства:

$$|\frac{d^k\varphi^+(z)}{dz^k}| \leqslant \frac{M_k}{(1-\rho)^{1-\alpha_k}}, \quad |\frac{d^k f^+(z)}{dz^k}| \leqslant \frac{N_k}{(1-\rho)^{1-\beta_k}}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{27}$$

где $\rho = |z|$, а M_k, N_k, α_k, β_k $(k = 1, 2, 3)$ — некоторые положительные постоянные, причем $0 < \alpha_k \leqslant 1$, $0 < \beta_k \leqslant 1$ $(k = 1, 2, 3)$.

Если условия (27) выполняются, то решение задачи GN_n при $n = 1$ и $r \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}, 1)$ существует и его можно задавать формулой (4), где функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ определяются по формулам (25) и (26) соответственно.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, где $r \in (0, 2-\sqrt{3}) \cup (2-\sqrt{3}, 1)$. Тогда для разрешимости задачи Неймана GN_1 в классе $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ необходимо и достаточно, чтобы в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ для функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, определяемых по формулам* (25) *и* (26) *соответственно, выполнялись неравенства* (27). *При выполнении этих условий решение задачи GN_1 сводится к последовательному решению задачи сопряжения* (10) *и двух линейных дифференциальных уравнений Эйлера* (14) *и* (15)*, причем общее решение задачи GN_1 можно задавать формулой* (4)*, где $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ определяются по формулам* (25) *и* (26) *соответственно.*

Пусть теперь $r = r_0 = 2-\sqrt{3}$. Тогда дифференциальные уравнения (14) и (15) соответственно примут вид

$$z^2 \cdot \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot z \cdot \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \cdot \varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_{r_0}^+ \tag{28}$$

и

$$z^2 \cdot \frac{d^2 f+(z)}{dz^2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot z \cdot \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \cdot f^+(z) = F^+(z), \quad z \in T_{r_0}^+, \tag{29}$$

где $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$ — аналитические функции, определяемые по формулам (11) и (13) соответственно.

Поскольку дифференциальные уравнения (28) и (29) отличаются лишь правыми частями, то сначала остановимся на исследовании дифференциального уравнения (28).

Как уже было отмечено выше, однородное дифференциальное уравнение, соответствующее (28), не имеет аналитических в круге $T_{r_0}^+ = \{z : |z| < r_0\}$ ненулевых решений. В силу (20) частное решение неоднородного уравнения (28) можно искать методом вариации произвольных постоянных, т.е. в виде

$$\varphi^+(z) = l_{21}(z) z^{\lambda_0} + l_{22}(z) z^{\lambda_0} \ln z, \tag{30}$$

где $l_{21}(z)$ и $l_{22}(z)$ — пока неизвестные функции, аналитические в круге $T_{r_0}^+ = \{z : |z| < r_0\}$, за исключением, быть может, точки $z = 0$.

Для нахождения неизвестных функций $l_{21}(z)$ и $l_{22}(z)$ составим систему уравнений Лагранжа для дифференциального уравнения (28):

$$\begin{cases} \dfrac{dl_{21}(z)}{dz} z^{\lambda_0} + \dfrac{dl_{22}(z)}{dz} z^{\lambda_0} \ln z = 0, \\ \lambda_0 \dfrac{dl_{21}(z)}{dz} z^{\lambda_0 - 1} + (1 + \lambda_0 \ln z) \dfrac{dl_{22}(z)}{dz} z^{\lambda_0 - 1} = \Phi^+(z). \end{cases} \tag{31}$$

Решая систему (31), получаем

$$\frac{dl_{21}(z)}{dz} = -\Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z, \quad \frac{dl_{22}(z)}{dz} = \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0}.$$

С помощью интегрирования из последних равенств будем иметь

$$l_{21}(z) = -\int \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z \, dz, \quad l_{21}(z) = \int \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \, dz, \tag{32}$$

где $\int \Phi^+(z) z^{1-\lambda_0} dz$ и $\int \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z \, dz$ — фиксированные первообразные функций $\Phi^+(z) z^{1-\lambda_0}$ и $\Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z$ соответственно.

Наконец, подставив в правую часть равенства (30) вместо $l_{21}(z)$ и $l_{22}(z)$ их значения, задаваемые по формулам (32), частное решение неоднородного дифференциального уравнения (28) получим в виде

$$\varphi^+(z) = -z^{\lambda_0} \int \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z dz + z^{\lambda_0} \ln z \cdot \int \Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} dz, \tag{33}$$

где $\int \Phi^+(z) z^{1-\lambda_0} dz$ и $\int \Phi^+(z) z^{1-\lambda_0} \ln z \, dz$ — фиксированные первообразные функций $\Phi^+(z) z^{1-\lambda_0}$ и $\Phi^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z$ соответственно, а $\Phi^+(z)$ — однозначная аналитическая в круге $T^+_{r_0} = \{z : |z| < r_0\}$ функция, задаваемая формулой (11).

В свою очередь, частное решение неоднородного дифференциального уравнения (29) будет иметь вид

$$f^+(z) = -z^{\lambda_0} \int F^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z \, dz + z^{\lambda_0} \ln z \cdot \int F^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \, dz, \tag{34}$$

где $\int F^+(z) z^{1-\lambda_0} dz$ и $\int F^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z \, dz$ — фиксированные первообразные функций $F^+(z) z^{1-\lambda_0}$ и $F^+(z) \cdot z^{1-\lambda_0} \ln z$ соответственно, а $F^+(z)$ — однозначная аналитическая в круге $T^+_{r_0} = \{z : |z| < r_0$ функция, задаваемая формулой (13).

Из формул (33) и (34) видно, что при любых однозначных аналитических в круге $T^+_{r_0} = \{z : |z| < r_0\}$ функциях $\Phi^+(z)$ и $F^+(z)$, задаваемых формулами (11) и (13) соответственно, функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, определяемые формулами (33) и (34), не могут быть аналитическими в точке $z = 0$. Следовательно, при $r = r_0 = 2 - \sqrt{3}$ рассматриваемая краевая задача GN_1 в классе $G_1(T_{r_0)^+ \cap H^{(2)}(L_{r_0})}$ не разрешима, т.е. не имеет решений.

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Задача Неймана GN_1 в классе $G_1(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ при $r = 2 - \sqrt{3}$ не разрешима.*

В заключение еще раз отметим, что предложенный выше алгоритм решения задачи Неймана GN_n в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, 0 < r < 1$ при $n = 1$ вполне применим и при любом натуральном $n \geqslant 2$.

Список литературы

1. *Bauer K. W.* Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner Mathematische Schriften. 1965. № 23. S. 1–98.
2. *Bauer K. W., Ruscheweyh S.* Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1980. 264 p. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 791). https://doi.org/10.1007/BFb0103468
3. *Begehr H.* Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. Singapure : World Scientific Publishing, 1994. 284 p. https://doi.org/10.1142/2162
4. *Begehr H.* Boundary value problems in complex analysis. I // Boletin de la Asociation Matematica Venezolana. 2005. Vol. 12, № 1. P. 65–85.
5. *Aksoy Ü., Begehr H., Celebi O. A.* A. V. Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem // Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. Vol. 64, iss. 8. P. 1257–1274. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1504039
6. *Rasulov K. M.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 1. P. 142–145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237
7. *Davis P.* The Schwarz Function and its Applications. Washington : Mathematical Association of America, 1974. 241 p. (Carus Mathematical Monographs, vol. 17).
8. *Адуков В. М., Патрушев А. А.* О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 9–20. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-9-20
9. *Расулов К. М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.
11. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1966. 628 с.

References

1. Bauer K. W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\bar{z})^2W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Mathematische Schriften*, 1965, no. 23, pp. 1–98 (in Germany).
2. Bauer K. W., Ruscheweyh S. *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*. (Lecture Notes in Mathematics, vol. 791). Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980. 264 p. https://doi.org/10.1007/BFb0103468
3. Begehr H. *Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Singapure, World Scientific Publishing, 1994. 284 p. https://doi.org/10.1142/2162
4. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis. I. *Boletin de la Asociation Matematica Venezolana*, 2005, vol. 12, no. 1, pp. 65–85.
5. Aksoy Ü., Begehr H., Celebi O. A. A. V. Bitsadze's observation on bianalytic functions and the Schwarz problem. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, vol. 64, iss. 8, pp. 1257–1274. https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1504039
6. Rasulov K. M. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 1, pp. 142–145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237
7. Davis P. *The Schwarz Function and its Applications*. (Carus Mathematical Monographs, vol. 17). Washington, Mathematical Association of America, 1974. 241 p.
8. Adukov V. M., Patrushev A. A. On explicit and exact solutions of the Markushevich boundary problem for circle. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, iss. 2, pp. 9–20 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-9-20

9. Rasulov K. M. *Metod sopryazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniiya* [Method of Conjugation Analytic Functions and its Applications]. Smolensk, Izd-vo SmolGU, 2013. 188 p. (in Russian).
10. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boudnary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
11. Coddingtin E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Companies, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1958. 474 p.).
12. Goluzin G. M. *Geometricheskaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 06.02.2021
Принята к публикации / Accepted 26.03.2021
Опубликована / Published 31.08.2021