

## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 352–367

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 352–367

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-352-367>

Научная статья

УДК 539.3

### Волны в вязкоупругом цилиндрическом волноводе с дефектом

А. О. Ватульян<sup>1,2</sup>, В. О. Юров<sup>1✉</sup>

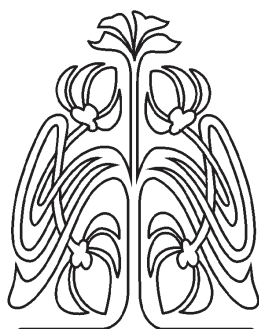
<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

<sup>2</sup>Южный математический институт ВНЦ РАН, Россия, 362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22

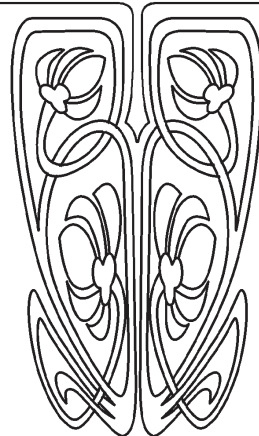
**Ватульян Александр Ованесович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости; заведующий отделом дифференциальных уравнений, [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>,

**Юров Виктор Олегович**, аспирант кафедры теории упругости, [vyurov@srfedu.ru](mailto:vyurov@srfedu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>

**Аннотация.** Рассмотрена прямая задача о волнах в вязкоупругом неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевым отслоением и решена обратная задача по идентификации параметров отслоения по дополнительной информации о поле смещений на внешней границе волновода. Для учета реологических свойств в рамках концепции комплексных модулей использована модель стандартного вязкоупругого тела. После применения интегрального преобразования Фурье по осевой координате в пространстве трансформант задача сведена к решению канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя спектральными параметрами. Краевые задачи решены численно методом пристрелки. Для удовлетворения граничных условий на отслоении составлена и решена система двух гиперсингулярных интегральных уравнений относительно функций раскрытия (скачков радиальных и осевых перемещений) на основе метода граничных элементов. Для построения поля перемещений на внешней границе волновода использованы методы прямого численного интегрирования по квадратурным формулам и теорема о вычетах. При использовании теоремы о вычетах вычисления производились с учетом трех наименьших по модулю комплексных полюсов, что соответствует сохранению трех не-



Научный  
отдел





однородных мод колебаний. Проведена серия вычислительных экспериментов по построению волнового поля на внешней границе волновода. Выполнен анализ влияния ширины отслоения и геометрических характеристик нагружения на волновые поля. На основе асимптотической формулы для поля на внешней границе волновода и дополнительной информации о радиальных и осевых смещениях в одной заданной точке составлена система трансцендентных уравнений для нахождения ширины отслоения и расстояния до области нагружения. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции осевого расположения дефекта и его ширины. Проведен анализ влияния затухания на уравнения в обратной задаче. Осуществлена оценка погрешности. Выявлена область применимости использованного метода реконструкции.

**Ключевые слова:** неоднородный цилиндрический волновод, вязкоупругость, отслоение, обратная задача

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90017).

**Для цитирования:** Ватульян А. О., Юров В. О. Волны в вязкоупругом цилиндрическом волноводе с дефектом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 3. С. 352–367. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-352-367>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Waves in a viscoelastic cylindrical waveguide with a defect

A. O. Vatulyan<sup>1,2</sup>, V. O. Yurov<sup>1✉</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, 8a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

<sup>2</sup>Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027, Russia

**Alexander O. Vatulyan**, [vatulyan@math.rsu.ru](mailto:vatulyan@math.rsu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

**Victor O. Yurov**, [vyurov@sfnu.ru](mailto:vyurov@sfnu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-4689-4068>

**Abstract.** In this paper, we consider a direct problem on waves in a viscoelastic inhomogeneous cylindrical waveguide with annular delamination and investigate an inverse problem on the identification of the delamination parameters on the basis of the additional data on the displacement field at the outer boundary of the waveguide. In order to account rheological properties within the framework of the complex modules concept, we use a model of a standard viscoelastic body. After applying the integral Fourier transform along the axial coordinate in the transform space, the problem is reduced to solving a canonical system of first-order differential equations with two spectral parameters. The corresponding boundary-value problems are solved numerically by using the shooting method. To satisfy the boundary conditions on the delamination, a system of two hypersingular integral equations for the opening functions (radial and axial displacements jumps) are compiled and solved on the basis of the boundary element method. To construct the displacement field on the outer boundary of the waveguide, the techniques of direct numerical integration by quadrature formulas and the residue theorem are used. When using the theorem on residues, the calculations are performed considering the three smallest complex poles in the absolute value, which corresponds to the retention of three non-uniform vibration modes. We carry out a series of computational experiments allowing to construct the wave field at the



waveguide's outer boundary. We perform the analysis of the effect of the delamination width and geometric characteristics of loading on the wave fields. On the basis of the asymptotic formula for the field at the outer boundary of the waveguide and additional data on the radial and axial displacements at one given point, a system of transcendental equations is compiled to find the delamination width and distance to the loading region. A series of computational experiments on the reconstruction of the axial position of the defect and its width are also carried out. We also perform the analysis of the damping effect on the inverse problem equations and estimate the error. Finally, we reveal the area of applicability of the proposed reconstruction method.

**Keywords:** inhomogeneous cylindrical waveguide, viscoelasticity, delamination, inverse problem

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-31-90017).

**For citation:** Vatulyan A. O., Yurov V. O. Waves in a viscoelastic cylindrical waveguide with a defect. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 3, pp. 352–367 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-3-352-367>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Исследование распространения волн в волноводах с дефектами имеет приложения в областях неразрушающего контроля и вибрационного мониторинга. В волноводах с затуханием волны распространяются на относительно небольшие расстояния, что требует исследования вопроса о возможности применения вибрационного мониторинга в таких объектах.

В работах [1,2] осуществляется учет реологических свойств в рамках концепции комплексных модулей.

Экспериментальные работы основываются на закономерностях распространения волн Лэмба. В работе [3] изучается возможность обнаружения внутреннего расслоения в многослойных композитах. Для возбуждения и измерения упругих волн Лэмба в испытуемом изделии с композитным каналом используются контактная и бесконтактная системы. Отметим обзорную работу [4] по идентификации разрушения композитных структур. В [5], например, используются резонансные частоты для идентификации отслоения.

Распространение волн в волноводах, содержащих системы трещин, рассмотрено в работе [6].

Общие вопросы и закономерности распространения волн в волноводах и конечных телах обсуждаются в монографии [7].

При решении прямых задач применяются различные подходы и методы. Например, в [8] используется гибридная численно-аналитическая схема учета локальных неоднородностей в волноводах, которая совмещает в себе МКЭ и полуаналитические представления для полубесконечных областей. В [9] осуществляется применение метода фундаментальных решений для решения задач с трещинами. Обсуждаются особенности разбиения области и предлагается использование сингулярных функций для более точного описания решения вблизи трещин. Метод конечных элементов применяется в [10] совместно с граничными условиями неотражающего типа. Одним из классических является метод граничных интегральных уравнений [11,12]. В работе авторов [13] осуществлено сведение задачи о распространении волн в неоднородном упругом цилиндрическом волноводе с кольцевым



отслоением к численному и асимптотическому решению системы гиперсингулярных интегральных уравнений и выполнению обратного преобразования Фурье для функций, заданных численно при помощи теории вычетов. Также используется метод интерполяции неизвестных функций, описывающих скачки перемещений на берегах отслоения [14–16]. В [17] реализован асимптотический метод для малых размеров трещины. В работе [15] осуществляется применение асимптотических методов для приближенного моделирования волн в среде, содержащей отслоение на границе двух полупространств.

При моделировании отслоения взаимодействие берегов может учитываться с помощью граничных условий пружинного типа или могут рассматриваться ситуации при отсутствии взаимодействия берегов. Так, в [18] на границе раздела двух разнородных сред используются граничные условия пружинного типа, которые моделируют поврежденный интерфейс. В [14] осуществлено построение и решение интегральных уравнений для полосы с заполненной клеем трещиной. В [19] используется условие отсутствия напряжений на берегах трещины, которая находится в электроупругой среде с экспоненциально изменяющимися свойствами.

Для идентификации отслоения применяются различные методы. Весьма распространены методы, основанные на минимизации функционала невязки. Так, в [20] осуществлена реконструкция вершин вертикального отслоения в упругом слое. В [21] описывается применение нейронных сетей для нахождения отслоений.

## 1. Постановка и решение прямой задачи

Рассмотрим задачу о распространении волн в вязкоупругом неоднородном цилиндрическом волноводе с кольцевым отслоением, где осевая неоднородность обусловлена наличием отслоения, а радиальная неоднородность вызвана переменностью упругих свойств.

Пусть волновод занимает в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  область  $a \leq r \leq b$ ,  $-\infty \leq z \leq \infty$ , а отслоение расположено на цилиндрической поверхности  $\{r = r_1, z_1 \leq z \leq z_2\}$ , причем  $a < r_1 < b$ . Возбуждение установившихся колебаний осуществляется с помощью равномерно распределенной нормальной нагрузки с частотой  $\omega$  и амплитудой  $q(z) = q_0(h(z - z_3) - h(z - z_4))$ , где  $h(z)$  функция Хевисайда. Нагрузка прикладывается на внешней границе волновода на некотором удалении от области отслоения, т.е. нагрузка, расположенная полностью или частично над отслоением, не рассматривается  $[z_1, z_2] \cap [z_3, z_4] = \emptyset$ . Будем считать, что внутренняя граница свободна от напряжений, берега отслоения не взаимодействуют и свободны от напряжений.

Осесимметричная форма уравнений установившихся продольно-радиальных колебаний с частотой  $\omega$  в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho \omega^2 u_z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Для учета вязкоупругих свойств неоднородного изотропного волновода [1] представим компоненты тензора напряжений Коши в рамках концепции комплексных



модулей и принципа соответствия в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda(r, \omega)\Theta + 2\mu(r, \omega)\frac{\partial u_r}{\partial r}, & \sigma_\phi &= \lambda(r, \omega)\Theta + 2\mu(r, \omega)\frac{u_r}{r}, \\ \sigma_z &= \lambda(r, \omega)\Theta + 2\mu(r, \omega)\frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \Theta &= \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), & \sigma_{rz} &= \mu(r, \omega)\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\end{aligned}\quad (2)$$

где  $u_r, u_z$  — компоненты вектора перемещений,  $\sigma_r, \sigma_{rz}, \sigma_\phi, \sigma_z$  — компоненты тензора напряжений Коши. Применим модель стандартного вязкоупругого тела [22] для описания связи девиаторных частей тензоров напряжений и деформаций и упругую модель для описания связи шаровых составляющих. Таким образом, будем считать параметры Ламе  $\lambda, \mu$  функциями радиальной координаты и частотного параметра следующего вида:

$$\begin{aligned}\lambda &= K(r) - \frac{1}{3}\left(E(r) - (E(r) - H(r))\frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right), \\ \mu &= \frac{1}{2}\left(E(r) - (E(r) - H(r))\frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\right).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $K$  — объемный модуль,  $E$  — аналог мгновенного сдвигового модуля,  $H$  — аналог длительного сдвигового модуля,  $\tau$  — время релаксации.

Для описания задачи в безразмерной форме введем следующие параметры и функции:  $x = rb^{-1}, \xi_0 = ab^{-1}, y = zb^{-1}, \xi_* = r_1b^{-1}, y_L = (z_1 + z_2)(2b)^{-1}, l_0 = (z_2 - z_1)(2b)^{-1}, l_1 = z_3b^{-1}, l_2 = z_4b^{-1}, Z_1 = u_rb^{-1}, Z_2 = -iu_zb^{-1}, Z_3 = \sigma_r\mu_0^{-1}, Z_4 = -i\sigma_{rz}\mu_0^{-1}, \kappa^2 = \rho\omega^2b^2\mu_0^{-1}, g_1 = \lambda\mu_0^{-1}, g_2 = \mu\mu_0^{-1}, G = g_1 + 2g_2$ , где  $m_0$  — характерный для рассматриваемого материала модуль сдвига. Для простоты изложения будем считать плотность  $\rho$  постоянной.

Цилиндрическая поверхность отслоения в безразмерных координатах задается множеством  $\{(x, y) : x = \xi_* \in (\xi_0, 1), y \in [y_L - l_0, y_L + l_0]\}$ , а область приложения внешней нагрузки — множеством  $\{(x, y) : x = 1, y \in [l_1, l_2]\}$ .

Для применения интегрального преобразования Фурье вдоль осевой координаты область, занимаемая цилиндрическим волноводом, разделяется на две подобласти:  $S_1 = \{(x, y) : \xi_0 \leq x \leq \xi_*, -\infty < y < \infty\}$  и  $S_2 = \{(x, y) : \xi_* \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ . Интегральное преобразование выполняется в обеих областях при условии, что известно поле перемещений на условной границе  $x = \xi_*$ , при этом используется следующее обозначение для трансформант:

$$\tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}(x, y)e^{i\alpha y} dy. \quad (4)$$

С целью исследования произвольной неоднородности, связанной с переменностью упругих свойств, сформируем каноническую систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно компонент  $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4$ , непрерывных по координате  $x$ , и запишем ее в векторном виде:

$$\tilde{\mathbf{Z}}' = (\mathbf{A}_0(\kappa) - \kappa^2\mathbf{A}_{01} + \alpha\mathbf{A}_1(\kappa) + \alpha^2\mathbf{A}_2(\kappa))\tilde{\mathbf{Z}}, \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{Z}} = (\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3, \tilde{Z}_4)^T$ .





Опуская для краткости аргументы функций  $g_1, g_2, G$ , приведем лишь ненулевые коэффициенты матриц:  $\mathbf{A}_0$ :  $a_{11}^0 = -g_1(xG)^{-1}$ ,  $a_{13}^0 = G^{-1}$ ,  $a_{24}^0 = g_2^{-1}$ ,  $a_{31}^0 = (G^2 - g_1^2)(x^2G)^{-1}$ ,  $a_{33}^0 = -2g_2(xG)^{-1}$ ,  $a_{44}^0 = -x^{-1}$ ;  $\mathbf{A}_{01}$ :  $a_{31}^{01} = a_{42}^{01} = 1$ ;  $\mathbf{A}_1$ :  $a_{12}^1 = g_1G^{-1}$ ,  $a_{21}^1 = -1$ ,  $a_{32}^1 = a_{41}^1 = -2g_1g_2(xG)^{-1}$ ,  $a_{34}^1 = 1$ ,  $a_{43}^1 = -a_{12}^1$ ;  $\mathbf{A}_2$ :  $a_{42}^2 = (G^2 - g_1^2)G^{-1}$ . Введенные в уравнении (5) матрицы  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  рациональным образом зависят от частотного параметра  $\kappa$  и имеют переменные относительно координаты  $x$  коэффициенты. Так как выражения для коэффициентов не содержат производных  $\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x}$ , решение уравнения (5) (граничные условия формулируются ниже) может быть построено численно при любом фиксированном  $\kappa = \kappa_0$  как при непрерывных по  $x$ , так и при кусочно-непрерывных функциях  $g_1, g_2$  с разрывами первого рода.

Предложенный в статье [13] способ построения решения задачи в пространстве трансформант применим в случае вязкоупругого волновода. При любом фиксированном частотном параметре  $\kappa$  введем в рассмотрение три вспомогательные функции:  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha), \tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha), \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha)$ , которые являются решениями (5) при определенных граничных условиях.

Решение  $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha)$  удовлетворяет условиям  $\tilde{Z}_3^{(0)}(\xi_0) = \tilde{Z}_4^{(0)}(\xi_0) = 0$ ,  $\tilde{Z}_3^{(0)}(1) = 1$ ,  $\tilde{Z}_4^{(0)}(1) = 0$  и соответствует трансформанте решения задачи о вынужденных колебаниях волновода без отслоения под действием сосредоточенной внешней нагрузки при  $y = 0$ .

Решения  $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha)$  и  $\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha)$  — вектор-функции, некоторые компоненты которых испытывают скачок в точке  $x = \xi_*$ , удовлетворяющие следующим условиям:  $\tilde{Z}_3^{(1)}(\xi_0) = \tilde{Z}_4^{(1)}(\xi_0) = 0$ ,  $\tilde{Z}_1^{(1)}(\xi_* + 0) - \tilde{Z}_1^{(1)}(\xi_* - 0) = 1$ ,  $\tilde{Z}_j^{(1)}(\xi_* - 0) = \tilde{Z}_j^{(1)}(\xi_* + 0)$ ,  $j = 2, 3, 4$ ,  $\tilde{Z}_3^{(1)}(1) = \tilde{Z}_4^{(1)}(1) = 0$ ;  $\tilde{Z}_3^{(2)}(\xi_0) = \tilde{Z}_4^{(2)}(\xi_0) = 0$ ,  $\tilde{Z}_2^{(2)}(\xi_* + 0) - \tilde{Z}_2^{(2)}(\xi_* - 0) = 1$ ,  $\tilde{Z}_j^{(2)}(\xi_* - 0) = \tilde{Z}_j^{(2)}(\xi_* + 0)$ ,  $j = 1, 3, 4$ ,  $\tilde{Z}_3^{(2)}(1) = \tilde{Z}_4^{(2)}(1) = 0$ . Таким образом,  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$  и  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$  удовлетворяют граничным условиям отсутствия напряжений в точках  $x = \xi_0$  и  $x = 1$ , обеспечивается единичный скачок радиальных перемещений  $\tilde{Z}_1^{(1)}$  и непрерывность компонент  $\tilde{Z}_2^{(1)}, \tilde{Z}_3^{(1)}, \tilde{Z}_4^{(1)}$  на границе  $x = \xi_*$  для решения  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ , а также единичный скачок продольных перемещений  $\tilde{Z}_2^{(2)}$  и непрерывность  $\tilde{Z}_1^{(2)}, \tilde{Z}_3^{(2)}, \tilde{Z}_4^{(2)}$  для  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}$ .

Все три функции строятся численно методом пристрелки, причем для построения решений вспомогательных задач Коши использованы схемы Рунге – Кутты 4–5-го порядка.

Решение задачи о колебаниях волновода с отслоением под действием внешней распределенной нагрузки в пространстве трансформант представим в виде

$$\tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) = Q(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_1(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) + \tilde{\chi}_2(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha), \quad (6)$$

где  $Q(\alpha) = q_0\mu_0^{-1} \int_{l_1}^{l_2} e^{i\alpha y} dy = iq_0\mu_0^{-1} (\exp(i\alpha l_1) - \exp(i\alpha l_2)) \alpha^{-1}$  — трансформанта внешней равномерно распределенной нормальной нагрузки;  $\tilde{\chi}_1(\alpha)$  и  $\tilde{\chi}_2(\alpha)$  — трансформанты от неизвестных скачков радиальных и продольных перемещений на отслоении.

Далее для выполнения условия равенства нулю вектора напряжений на берегах отслоения ( $Z_3(\xi_*, y) = 0, Z_4(\xi_*, y) = 0, y \in [y_L - l_0, y_L + l_0]$ ) необходимо найти оригиналы полей, осуществляя обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{Z}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha \quad (7)$$



Учет затухания снимает необходимость деформирования контура интегрирования для огибания полюсов. Однако чтобы иметь возможность рассмотрения предельных случаев  $\tau = 0$  и  $\tau = \infty$  (упругий волновод), используем более общую формулу

$$\mathbf{Z}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{Z}}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha. \quad (8)$$

Здесь контур  $\Gamma$  совпадает с  $[-\infty, \infty]$  всюду, за исключением полюсов подынтегральной функции, которые он огибает определенным образом (в упругом случае в соответствии с принципом предельного поглощения [23]). Отметим, что при наличии слабого затухания ( $\tau \ll 1$ ,  $\tau \gg 1$ ) вещественные в упругом случае полюса имеют маленькую мнимую часть, и прямое численное интегрирование по формуле (8) дает более точный результат, чем при использовании формулы (7), так как подынтегральная функция меняется более плавно. Подставляя решение (6) в формулу (8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{\chi}_1(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{\chi}_2(\alpha) \tilde{\mathbf{Z}}^{(2)}(x, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tilde{\chi}_j(\alpha) = \int_{y_L - l_0}^{y_L + l_0} \chi_j(y) e^{i\alpha y} dy, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

а подставляя (10) в (9) и изменяя во втором и третьем слагаемом порядок интегрирования, получаем следующее представление для напряжений на отслоении и перемещений на внешней границе:

$$Z_s(\xi_*, y) = -f_s(y) + \sum_{j=1}^2 \int_{y_L - l_0}^{y_L + l_0} \chi_j(\eta) k_{js}(\eta - y) d\eta = 0, \quad y \in [y_L - l_0, y_L + l_0], \quad s = 3, 4, \quad (11)$$

$$Z_s(1, y) = Z_s^{\text{ЭТ}}(y) + \sum_{j=1}^2 \int_{y_L - l_0}^{y_L + l_0} \chi_j(\eta) m_{js}(\eta - y) d\eta, \quad s = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь введены следующие функции:

$$f_s(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) Z_s^{(0)}(\xi_*, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha, \quad k_{js}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_*, \alpha) e^{i\alpha \eta} d\alpha,$$

$$j = 1, 2, \quad s = 3, 4,$$

$$Z_s^{\text{ЭТ}}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Q(\alpha) Z_s^{(0)}(1, \alpha) e^{-i\alpha y} d\alpha, \quad m_{js}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) e^{i\alpha \eta} d\alpha,$$

$$j = 1, 2, \quad s = 1, 2.$$

Напряжения на отслоении приравниваются к нулю, и таким образом соотношение (11) представляет собой систему двух интегральных уравнений относительно



скачков  $\chi_1(\eta)$ ,  $\chi_2(\eta)$ . Решив систему, находим поле перемещений на внешней границе по формуле (12).

Запишем (11) в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \int_{y_L-l_0}^{y_L+l_0} \chi_1(\eta) k_{13}(\eta-y) d\eta + \int_{y_L-l_0}^{y_L+l_0} \chi_2(\eta) k_{23}(\eta-y) d\eta &= f_3(y), \\ \int_{y_L-l_0}^{y_L+l_0} \chi_1(\eta) k_{14}(\eta-y) d\eta + \int_{y_L-l_0}^{y_L+l_0} \chi_2(\eta) k_{24}(\eta-y) d\eta &= f_4(y), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $y \in [y_L-l_0, y_L+l_0]$ .

При подсчете интегралов  $k_{js}(\eta)$  системы (13) учтем поведение подынтегральных функций на бесконечности  $\tilde{Z}_3^{(1)}(\xi_*, \alpha) \sim K_{13}|\alpha|$ ,  $\tilde{Z}_3^{(2)}(\xi_*, \alpha) \sim K_{23}\alpha$ ,  $\tilde{Z}_4^{(1)}(\xi_*, \alpha) \sim K_{14}\alpha$ ,  $\tilde{Z}_4^{(2)}(\xi_*, \alpha) \sim K_{24}|\alpha|$ . Указанное поведение характерно при наличии разрыва первого рода функций  $g_1, g_2$  в точке  $x = \xi_*$ . В силу того что  $\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_*, \alpha)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $s = 3, 4$  — неубывающие функции при  $\alpha \rightarrow \infty$ , интегралы являются расходящимися, и им надо придать смысл, используя теорию обобщенных функций [24]. Чтобы выделить главные составляющие, соответствующие предельным значениям функций на бесконечности, численно найдем следующие пределы  $K_{js} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\tilde{Z}_s^{(j)}(\xi_*, \alpha)/\alpha)$ . Отметим, что при наличии затухания  $K_{js}$  комплексные числа.

Для решения системы интегральных уравнений (13) воспользуемся методом граничных элементов [25]. Разобьем интегралы по отрезку  $[y_L-l_0, y_L+l_0]$  на сумму интегралов по элементам  $[y_L-l_0, y_L+l_0] = \bigcup_{p=1}^N \Delta_p$ , где  $\Delta_p = [\eta_p, \eta_{p+1}]$ ,  $h = 2l_0N^{-1}$ ; также введем координаты концов элементов  $\eta_p = y_L-l_0 + (p-1)h$ ,  $p = 1..N+1$ , и точки коллокаций  $y_q = y_L-l_0 + (q-1/2)h$ ,  $q = 1..N$ . Будем считать, что функции  $\chi_1(\eta)$ ,  $\chi_2(\eta)$  постоянны на элементе  $\chi_j|_{\Delta_p} = \chi_{jp}$ . Считая, что уравнения (13) выполнены в наборе точек, придем к следующей алгебраической системе:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \chi_{1p} H_{pq}^{(13)} + \sum_{p=1}^N \chi_{2p} H_{pq}^{(23)} &= f_{3q}, \quad q = 1..N, \\ \sum_{p=1}^N \chi_{1p} H_{pq}^{(14)} + \sum_{p=1}^N \chi_{2p} H_{pq}^{(24)} &= f_{4q}, \quad q = 1..N, \end{aligned} \quad (14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H_{pq}^{(js)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha)}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha, \\ E_{pq}(\alpha) &= e^{i\alpha(\eta_{p+1}-y_q)} - e^{i\alpha(\eta_p-y_q)}, \quad j = 1, 2, \quad s = 3, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко показать, что подынтегральные функции интегралов в (15) не имеют особенности при  $\alpha = 0$ , кроме того,  $\alpha^{-1} \tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) \rightarrow const$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . При вычислении коэффициентов (15) будем учитывать, что  $\tilde{Z}_3^{(1)}(\alpha)$ ,  $\tilde{Z}_4^{(2)}(\alpha)$  четные по  $\alpha$ ,  $\tilde{Z}_4^{(1)}(\alpha)$ ,





$\tilde{Z}_3^{(2)}(\alpha)$  нечетные по  $\alpha$ . Выделяя расходящиеся части интегралов, применим к ним формулы из теории обобщенных функций [24], учитывая, что узловые значения  $\eta_p$  и точки коллокаций  $y_q$  не совпадают, получаем:

$$H_{pq}^{(js)} = 2iK_{js} \left( \frac{1}{\eta_{p+1} - y_q} - \frac{1}{\eta_p - y_q} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}|\alpha|}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha, \quad js = 13, 24, \quad (16)$$

$$H_{pq}^{(js)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{Z}_s^{(j)}(\alpha) - K_{js}\alpha}{\alpha} E_{pq}(\alpha) d\alpha, \quad js = 23, 14. \quad (17)$$

Заметим, что в случае непрерывности функций  $g_1, g_2$  в точке  $x = \xi_*$  предел  $K_{23} = K_{14} = 0$  и формула (17) упрощается.

Решив систему уравнений (14), получим дискретное представление для функций раскрытия. Функции раскрытия могут быть также найдены при помощи следующих асимптотических по параметру  $l_0$  формул [13]:

$$\chi_1(\eta) = f_3(y_L)K_{13}^{-1}\sqrt{l_0^2 - (\eta - y_L)^2}, \quad \chi_2(\eta) = f_4(y_L)K_{24}^{-1}\sqrt{l_0^2 - (\eta - y_L)^2}. \quad (18)$$

Для расчета волновых полей на внешней границе волновода воспользуемся формулой (12). При использовании полученных дискретных представлений  $\chi_{jp}$  для функций раскрытия интегралы по  $[y_L - l_0, y_L + l_0]$  могут быть посчитаны на основе квадратурных формул, также возможно применение предварительной аппроксимации вида  $\chi_j(\eta) = \sqrt{l_0^2 - (\eta - y_L)^2} (p_0 + p_1\eta + p_2\eta^2 + \dots)$ ,  $j = 1, 2$  и последующего точного интегрирования. Интегралы  $m_{js}(\eta - y)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $s = 1, 2$ ,  $Z_s(y)$ ,  $s = 1, 2$  вычисляются с помощью теории вычетов с удержанием конечного числа слагаемых [26]. Так, например, используя теорему о вычетах, получим, что  $m_{js}(\eta) = i \sum_{n=1}^N \operatorname{res}_{\alpha=\alpha_n} \left( \tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha) \right) e^{i\alpha_n\eta}$  при  $\eta < 0$ , где  $\alpha_n$  — отрицательные полюса функции  $\tilde{Z}_s^{(j)}(1, \alpha)$ , а также полюса, располагающиеся ниже контура  $\Gamma$ .

В рамках асимптотического подхода подставим (18) в (12), перейдем к пределу при  $l_0 \rightarrow 0$  и получим соотношения вида

$$Z_s(1, y) = Z_s^{\text{ЭТ}}(y) + \frac{l_0^2\pi}{2} \left( \frac{f_3(y_L)}{K_{13}} m_{1s}(-y) + \frac{f_4(y_L)}{K_{24}} m_{2s}(-y) \right) + o(l_0^2), \quad s = 1, 2. \quad (19)$$

Рисунок 1 демонстрирует сравнение полей, полученных с помощью метода граничных элементов и формулы (12) и с помощью асимптотической формулы (19). Так как эталонная часть поля одинакова для двух методов, то на рис. 1 приводятся вещественная часть и мнимая часть функции  $Z_s(1, y) - Z_s^{\text{ЭТ}}(y)$ . В расчетах принято  $l_0 = 0.1$ ,  $y_L = 1$ ,  $\tau_0 = 0.005$  (параметры определены в последнем разделе).

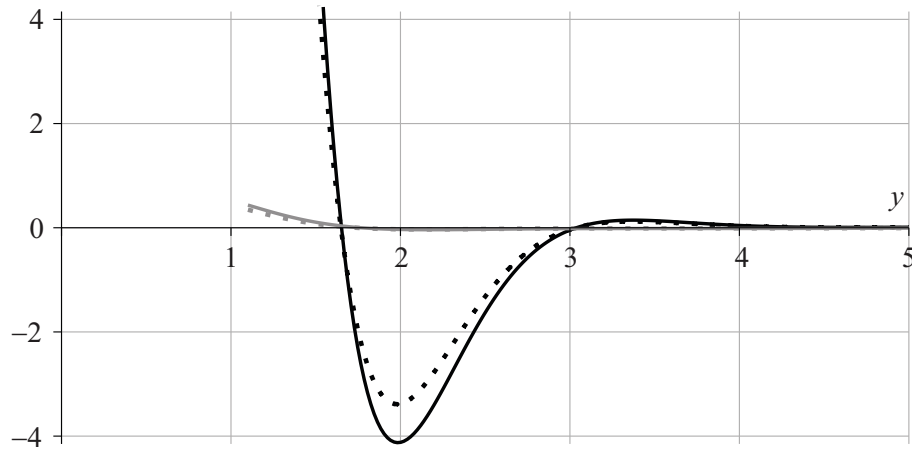


Рис. 1. Вещественная (черный) и мнимая (серый) части функции  $(Z_s(1, y) - Z_s^{\Delta T}(y)) \cdot 10^{-4}$ , полученные с помощью метода граничных элементов и формулы (12) (сплошная линия) и формулы (19) (точки)  
 Fig. 1. The real (black) and imaginary (gray) parts of the function  $(Z_s(1, y) - Z_s^{\Delta T}(y)) \cdot 10^{-4}$  obtained using the boundary element method and the formula (12) (solid line) and the formula (19) (dots)

## 2. Обратная задача

Воспользуемся формулой (19) для решения обратной задачи по нахождению местоположения и ширины отслоения. Будем считать, что  $\xi_*$  — известная величина. Функции  $X_s^{\Delta T}(y)$ ,  $m_{1s}(-y)$ ,  $m_{2s}(-y)$  могут быть вычислены с помощью теоремы о вычетах и не зависят от  $l_0$  и осевой координаты отслоения  $y_L$ . От них также не зависят параметры  $K_{13}$ ,  $K_{24}$ . Величины  $f_3(y_L)$  и  $f_4(y_L)$  определяются эталонным полем напряжений в точке  $y_L$ , расположенной в середине отслоения. Так как осевое расположение отслоения считается неизвестным, свяжем систему координат с областью приложения нагрузки, считая, что  $l_2 = 0$ .

Пусть дополнительная информация задается на основе формулы (12) и решения (14) при достаточно большом  $N$  в точке  $y = y^*$ , т.е.  $Z_1(1, y^*)$  и  $Z_2(1, y^*)$  — известные величины. Находя главные слагаемые поля в соответствии с (19) в этой точке, получаем систему следующего вида:

$$\begin{aligned} l_0^2 (U_1 f_3(y_L) + P_1 f_4(y_L)) &= W_1, \\ l_0^2 (U_2 f_3(y_L) + P_2 f_4(y_L)) &= W_2, \end{aligned} \tag{20}$$

где  $U_s = \frac{\pi}{2K_{13}} m_{1s}(-y^*)$ ,  $P_s = \frac{\pi}{2K_{24}} m_{2s}(-y^*)$ ,  $W_s = Z_s(1, y^*) - Z_s(y^*)$ ,  $s = 1, 2$ . Для стержней и балок возникают подобные системы [27]. Решая систему (20), находим две неизвестных величины:  $l_0^2 f_3(y_L) = F_3$  и  $l_0^2 f_4(y_L) = F_4$ . Исключая параметр  $l_0$ , находим уравнение для определения  $y_L$ :  $f_3(y_L)/f_4(y_L) = F_3/F_4$ . Отделяя в нем вещественную и мнимую части, получаем два нелинейных уравнения для нахождения одной неизвестной  $y_L$ . Корни, получаемые из вещественной части уравнения, обозначим  $y_{L1}^R, y_{L2}^R, y_{L3}^R, \dots$ , а корни, получаемые из мнимой части уравнения, обозначим  $y_{L1}^I, y_{L2}^I, y_{L3}^I, \dots$ . Будем считать, что обратная задача имеет единственное решение, если в рассматриваемой области поиска корней существует единственная пара  $y_L^R, y_L^I$  такая, что  $y_L^R$  и  $y_L^I$  близки по значению, и тогда в качестве результата восстановления примем  $y_L = (y_L^R + y_L^I)/2$ . Подставляя найденное значение  $y_L$  в выражения  $l_0^2 f_3(y_L) = F_3$  и  $l_0^2 f_4(y_L) = F_4$ , получаем два линейных уравнения для



нахождения  $l_0^2$ . В качестве результата реконструкции будем использовать значение  $l_0 = \text{Re} \left( \sqrt{F_3/f_3(y_L)} + \sqrt{F_4/f_4(y_L)} \right) / 2$ .

### 3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим случай для  $\kappa = 0.9$ , при этом в упругом волноводе распространяется одна бегущая волна. При подсчете полей учтем три комплексных полюса, один из которых имеет малую мнимую часть. Дополнительную информацию зададим в точке  $y^* = 5$ . Для выполнения расчетов выберем следующий набор параметров и функций: число граничных элементов  $N = 100$ ;  $\xi_0 = 0.7$ ,  $\xi_* = 0.85$ ,  $l_1 = -1$ ,  $l_2 = 0$ ;  $q_0 = m_0$ ;  $E_0 = 3 - x^2$ ,  $H_0 = 1 + x^3$ ,  $K_0 = 2.0$ ;  $M(x, \kappa) = E_0(x) - (E_0(x) - H_0(x)) \frac{1+i\kappa\tau_0}{1+\kappa^2\tau_0^2}$

$$g_1(x, \kappa) = \begin{cases} K_0 - \frac{1}{3}M(x, \kappa) & x < \xi_*, \\ 1.5 & x \geq \xi_*, \end{cases} \quad g_2(x, \kappa) = \begin{cases} \frac{1}{2}M(x, \kappa) & x < \xi_*, \\ 0.75 & x \geq \xi_*. \end{cases}$$

Параметры  $l_0$ ,  $y_L$ ,  $\tau_0$  будут варьироваться.

Для проведения первого эксперимента зафиксируем  $l_0 = 0.01$ ,  $\tau_0 = 1$ . Будем отыскивать корни на промежутке  $[0.5, 5]$ , где левая граница выбрана из расчета низкой точности определения  $f_3(y)$ ,  $f_4(y)$  в ближней зоне, а правая соответствует точке задания дополнительной информации  $y^*$ .

В табл. 1 приведены результаты вычислительного эксперимента, в котором для всех трех рассмотренных случаев удастся определить единственное решение. Прочерки означают, что соответствующее значение не найдено.

Таблица 1 / Table 1

Результаты вычислительного эксперимента при  $l_0 = 0.01$ ,  $\tau_0 = 1$

Computational experiment results for  $l_0 = 0.01$ ,  $\tau_0 = 1$

$y_L$	$y_{L1}^R$	$y_{L2}^R$	$y_{L3}^R$	$y_{L1}^I$	$y_{L2}^I$	$y_L^*$
1	1.0004	1.4746	–	1.0003	1.6548	1.0004
2	1.9989	2.2858	–	1.9901	–	1.9945
3	1.5601	1.7951	3.0040	1.6957	2.9864	2.9952

Увеличим ширину отслоения. Пусть  $l_0 = 0.03$ ,  $\tau_0 = 1$ .

В первом и втором вариантах удастся найти единственное решение, в третьем варианте найдены два значения, отбор единственного из них может быть осуществлен с использованием дополнительной информации, в четвертом варианте корень определен неверно, что обусловлено расположением отслоения в дальней зоне (см. последнюю колонку табл. 2). В построенном решении в четвертом варианте пара комплексных полюсов дает быстро затухающее решение и уже не несет информации о дефекте на таком расстоянии от источника колебаний, а остальной части решения, определяемой одним комплексным полюсом с малой мнимой частью, недостаточно для восстановления.

Таблица 2 / Table 2

Результаты вычислительного эксперимента при  $l_0 = 0.03$ ,  $\tau_0 = 1$

Computational experiment results for  $l_0 = 0.03$ ,  $\tau_0 = 1$

$y_L$	$y_{L1}^R$	$y_{L2}^R$	$y_{L3}^R$	$y_{L1}^I$	$y_{L2}^I$	$y_L^*$
1	1.0053	1.4744	–	1.0015	1.6547	1.0034
2	1.5460	1.9850	2.3060	1.7400	1.9400	1.9630
3	1.5600	1.7930	3.0560	1.6990	2.9100	1.7460, 2.9830
4	1.5620	1.7850	–	1.6870	–	1.7360



Изучим, как зависит погрешность восстановления от ширины отслоения. Пусть  $y_L = 1$ ,  $\tau_0 = 1$ . Найденное значение  $l_0$  обозначим в табл. 3 через  $l_0^*$ . Также укажем относительные погрешности восстановления параметров  $y_L$ ,  $l_0$ , которые обозначим  $\delta(y_L)$  и  $\delta(l_0)$  соответственно.

Таблица 3 / Table 3

Зависимость погрешности восстановления от ширины отслоения  
Dependence of the recovery error on the width of the delamination

$y_L$	$\delta(y_L)$ , %	$l_0$	$l_0^*$	$\delta(l_0)$ , %
1.0003	0.03	0.01	0.0101	0.62
1.0015	0.15	0.02	0.0202	1.14
1.0034	0.34	0.03	0.0306	1.98
1.0062	0.62	0.04	0.0413	3.15
1.0098	0.98	0.05	0.0523	4.60
1.0142	1.42	0.06	0.0638	6.29
1.0192	1.92	0.07	0.0757	8.19
1.0247	2.47	0.08	0.0882	10.25
1.0306	3.06	0.09	0.1012	12.43
1.0368	3.68	0.10	0.1147	14.69

Результаты, содержащиеся в табл. 3, свидетельствуют об увеличении погрешности реконструкции параметров с увеличением размера отслоения, что связано с использованием асимптотической формулы (19). Отметим, что успешная реконструкция осуществлена в случае, когда источник колебаний достаточно близок к отслоению.

Рассмотрим влияние затухания на количество и расположение корней  $y_L^R$ ,  $y_L^I$ .

На рис. 2 изображены вещественная часть (а) и мнимая часть (б) функции  $f_3(y)/f_4(y) - F_3/F_4$  при  $l_0 = 0.03$ ,  $y_L = 1$ .

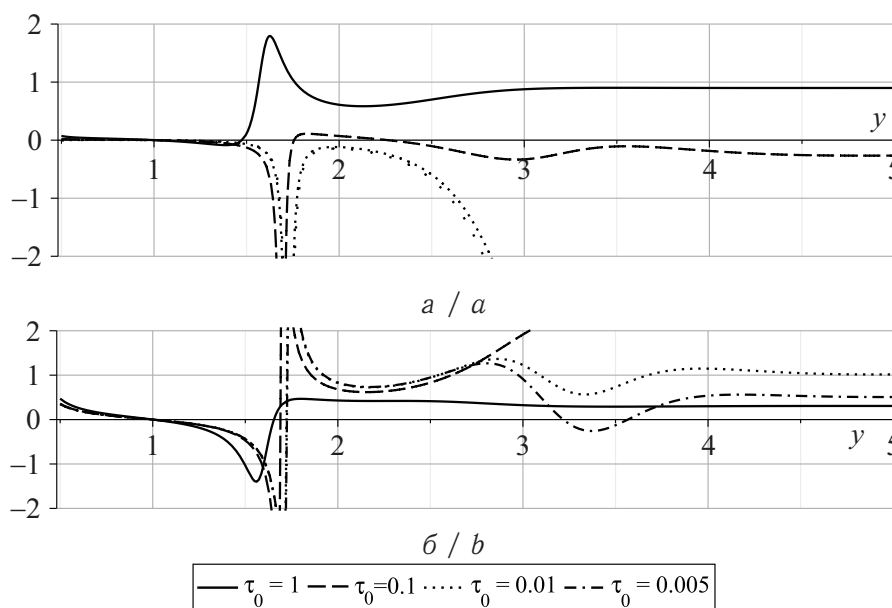


Рис. 2. Вещественная часть (а) и мнимая часть (б) функции  $f_3(y)/f_4(y) - F_3/F_4$

Fig. 2. The real part (a) and the imaginary part (b) of the function  $f_3(y)/f_4(y) - F_3/F_4$



Параметр  $\tau_0$  изменяется и принимает значения 1, 0.1, 0.01, 0.005. Отметим, что поведение рассматриваемых функций в окрестности точного корня мало зависит от параметра  $\tau_0$ , количество корней не является постоянным.

## Заключение

Решены прямая задача о вынужденных колебаниях неоднородного в радиальном направлении вязкоупругого цилиндрического волновода с кольцевым отслоением и обратная задача по восстановлению осевого расположения и ширины одиночного малого отслоения. Для решения прямой задачи использован метод граничных элементов, позволяющий определить скачки радиальных и продольных перемещений на отслоении и изучить влияние на поле смещений на поверхности волновода, причем для учета реологических свойств в рамках концепции комплексных модулей использована модель стандартного вязкоупругого тела. Решение обратной задачи осуществлено на основе асимптотического решения задачи при малых размерах дефекта. Проведена серия вычислительных экспериментов по нахождению двух параметров отслоения и выполнен анализ относительной погрешности восстановления, указан диапазон съема дополнительной информации, в котором реконструкция успешна.

## Список литературы

1. Ватульян А. О., Юров В. О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2016. № 5. С. 85–93.
2. Ватульян А. О., Юров В. О. Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания // Акустический журнал. 2017. Т. 63, № 4. С. 339–348. <https://doi.org/10.7868/S0320791917040153>
3. Sohn H., Dutta D., Yang J. Y., Park H. J., DeSimio M., Olson S., Swenson E. Delamination detection in composites through guided wave field image processing // Composites Science and Technology. 2011. Vol. 71, iss. 9. P. 1250–1256. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.011>
4. Su Z., Ye L., Lu Y. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 295, iss. 3–5. P. 753–780. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.020>
5. Eremin A. A., Golub M. V., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Identification of delamination based on the Lamb wave scattering resonance frequencies // NDT&E International. 2019. Vol. 103. P. 145–153. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2019.03.001>
6. Golub M. V., Doroshenko O. V., Fomenko S. I., Wang Y., Zhang C. Elastic wave propagation, scattering and localization in layered phononic crystals with arrays of strip-like cracks // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 212. P. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.12.001>
7. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Москва : Наука, 1981. 282 с.
8. Евдокимов А. А., Глушкова Н. В., Глушков Е. В. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 1. С. 3–12. <https://doi.org/10.7868/S0320791918010082>
9. Alves C., Leitao V. Crack analysis using an enriched MFS domain decomposition technique // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2006. Vol. 30, iss. 3. P. 160–166. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2005.08.012>





10. *Gravenkamp H.* Efficient simulation of elastic guided waves interacting with notches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures // *Ultrasonics*. 2018. Vol. 82. P. 101–113. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.07.019>
11. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полуплоскости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2001. № 1. С. 86–93.
12. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва : ТОО «Янус», 1995. 520 с.
13. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // *Акустический журнал*. 2020. Т. 66, № 5. С. 467–474. <https://doi.org/10.31857/S0320791920050147>
14. *Антоненко Н. Н.* Задача о продольной трещине с наполнителем в полосе // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика*. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 315–322. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-3-315-322>
15. *Дорошенко О. В., Кириллова Е. В., Фоменко С. И.* Асимптотическое решение гиперсингулярного граничного интегрального уравнения, моделирующего рассеяние плоских волн на интерфейсной полосовой трещине // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 2. С. 86–99. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.07>
16. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // *Акустический журнал*. 2006. Т. 52, № 3. С. 314–325.
17. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // *Прикладная математика и механика*. 2006. Т. 70, № 4. С. 714–725.
18. *Boström A., Golub M.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modeled by spring boundary conditions // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 62, iss. 1. P. 39–52. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbn025>
19. *Ma L., Wu L., Zhou Z., Guo L.* Scattering of the harmonic anti-plane shear waves by a crack in functionally graded piezoelectric materials // *Composite Structures*. 2005. Vol. 69, iss. 4. P. 436–441. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.001>
20. *Ватульян А. О., Баранов И. В.* Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде // *Акустический журнал*. 2005. Т. 51, № 4. С. 456–462.
21. *IjjeH A. A., Ullah S., Kudela P.* Full wavefield processing by using FCN for delamination detection // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 153. 107537. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.107537>
22. *Кристенсен Р. М.* Введение в теорию вязкоупругости. Москва : Мир, 1974. 338 с.
23. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. Москва : Наука, 1979. 320 с.
24. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Москва : Мир, 1978. 518 с.
25. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. Москва : Наука, 1985. 253 с.
26. *Ватульян А. О., Юров В. О.* Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // *Акустический журнал*. 2018. Т. 64, № 6. С. 649–656. <https://doi.org/10.1134/S0320791919010143>
27. *Ватульян А. О.* Коэффициентные обратные задачи механики. Москва : Физматлит, 2019. 272 с.



## References

1. Vatulyan A. O., Yurov V. O. On the dispersion relations for an inhomogeneous waveguide with attenuation. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss. 5, pp. 576–582. <https://doi.org/10.3103/S0025654416050101>
2. Vatul'yan A. O., Yurov V. O. Dispersion properties of an inhomogeneous piezoelectric waveguide with attenuation. *Acoustical Physics*. 2017, vol. 63, iss. 4, pp. 369–377. <https://doi.org/10.1134/S1063771017040133>
3. Sohn H., Dutta D., Yang J. Y., Park H. J., DeSimio M., Olson S., Swenson E. Delamination detection in composites through guided wave field image processing. *Composites Science and Technology*, 2011, vol. 71, iss. 9, pp. 1250–1256. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.011>
4. Su Z., Ye L., Lu Y. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 295, iss. 3–5, pp. 753–780. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.020>
5. Eremin A. A., Golub M. V., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Identification of delamination based on the Lamb wave scattering resonance frequencies. *NDT& E International*, 2019, vol. 103, pp. 145–153. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2019.03.001>
6. Golub M. V., Doroshenko O. V., Fomenko S. I., Wang Y., Zhang C. Elastic wave propagation, scattering and localization in layered phononic crystals with arrays of strip-like cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 212, pp. 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.12.001>
7. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies]. Moscow, Nauka, 1981. 282 p. (in Russian).
8. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Evdokimov A. A. Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, iss. 1, pp. 1–9. <https://doi.org/10.1134/S1063771018010086>
9. Alves C., Leitao V. Crack analysis using an enriched MFS domain decomposition technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006, vol. 30, iss. 3, pp. 160–166. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2005.08.012>
10. Gravenkamp H. Efficient simulation of elastic guided waves interacting with notches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures. *Ultrasonics*, 2018, vol. 82, pp. 101–113. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.07.019>
11. Aleksandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip-half-plane interface. *Mechanics of Solids*, 2001, vol. 36, iss. 1, pp. 70–76.
12. Lifanov I. K. *Metod singularnykh integral'nykh uravneniy i chislennyi eksperiment* [Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment]. Moscow, TOO “Janus”, 1995. 520 p. (in Russian).
13. Vatulyan A. O., Yurov V. O. Numerical and asymptotic solution of the problem of oscillations of an inhomogeneous waveguide with an annular crack of finite width. *Acoustical Physics*. 2020, vol. 66, iss. 5, pp. 441–448. <https://doi.org/10.1134/S1063771020050140>
14. Antonenko N. N. The problem of a longitudinal crack with a filler in a strip. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 315–322 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-3-315-322>
15. Doroshenko O. V., Kirillova E. V., Fomenko S. I. An asymptotic solution of the hypersingular boundary integral equation simulating wave scattering by the interface strip-like crack. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, iss. 2, pp. 86–99 (in Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.07>
16. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Golub M. V. Blocking of traveling waves and energy localization due to the elastodynamic diffraction by a crack. *Acoustical Physics*, 2006, vol. 52, iss. 3, pp. 259–269. <https://doi.org/10.1134/S1063771006030043>



17. Vatul'yan A., Yavruyan O. An asymptotic approach in problems of crack identification. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, iss. 4, pp. 647–656. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.09.015>
18. Boström A., Golub M. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modeled by spring boundary conditions. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2009, vol. 62, iss. 1, pp. 39–52. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbn025>
19. Ma L., Wu L., Zhou Z., Guo L. Scattering of the harmonic anti-plane shear waves by a crack in functionally graded piezoelectric materials. *Composite Structures*, 2005, vol. 69, iss. 4, pp. 436–441. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.001>
20. Vatul'yan A. O., Baranov I. V. Determination of the crack configuration in an anisotropic elastic medium. *Acoustical Physics*, 2005, vol. 51, iss. 4, pp. 385–391. <https://doi.org/10.1134/1.1983599>
21. Ijeh A. A., Ullah S., Kudela P. Full wavefield processing by using FCN for delamination detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, vol. 153, 107537. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.107537>
22. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York, Academic Press, 1971. 245 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1974. 338 p.).
23. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlia neklassicheskikh oblastei* [Dynamic Mixed Problems of Elasticity for Non-classical Domains]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (in Russian).
24. Kecs W., Teodorescu P. *Introduction to the Theory of Generalized Functions with Applications to Engineering*. Bucuresti, Editura Tehnica, 1975. 412 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1978. 518 p.).
25. Belotserkovsky S. M., Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singul'arnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primeneniya v aerodinamike, teorii uprugosti i elektrodinamike* [Numerical Methods in Singular Integral Equations and Their Application in Aerodynamics, Elasticity Theory, Electrodynamics]. Moscow, Nauka, 1985. 253 p. (in Russian).
26. Vatul'yan A. O., Yurov V. O. Analysis of forced vibrations in a functionally gradient cylindrical waveguide. *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, iss. 6, pp. 649–656. <https://doi.org/10.1134/S1063771019010147>
27. Vatulyan A. O. *Koeffitsyentnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.03.2021

Принята к публикации / Accepted 29.04.2021

Опубликована / Published 31.08.2021