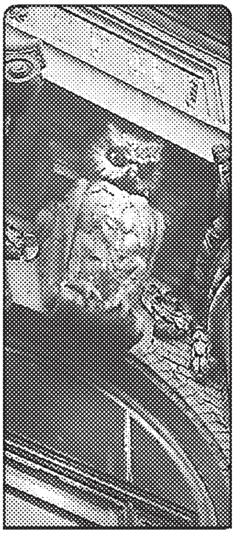

Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 422–433
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 422–433
https://mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-422-433

Научная статья
УДК 517.521.5

Двумерные предельные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби и их аппроксимативные свойства

И. Г. Гусейнов, Р. М. Гаджимирзаев✉

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, Россия, 367025, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 45

Гусейнов Ибрагим Гусейнович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, ibraa2g@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3888-6383

Гаджимирзаев Рамис Махмудович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, ramis3004@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6686-881X

Аннотация. Пусть $C[-1,1]$ пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций, $C[-1,1]^2$ — пространство функций, непрерывных на квадрате $[-1,1]^2$. Через $P_n^\alpha(x)$ обозначим ультрасферические полиномы Якоби. Ранее для функции f из пространства $C[-1,1]$ были построены предельные ряды по системе полиномов $P_n^\alpha(x)$ и исследованы аппроксимативные свойства их частичных сумм. В частности, была получена оценка сверху для соответствующей функции Лебега. Кроме того, было показано, что частичные суммы предельного ряда, в отличие от сумм Фурье – Якоби, совпадают с исходной функцией в точках ±1. В настоящей работе для функции $f(x,y)$ из пространства $C[-1,1]^2$ построены двумерные предельные ряды по системе ультрасферических полиномов Якоби $P_n^\alpha(x)P_m^\beta(y)$, ортогональной на квадрате $[-1,1]^2$ относительно веса типа Якоби. Показано, что частичная сумма двумерного предельного ряда совпадает с $f(x,y)$ на множестве $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$ и является проектором на подпространство алгебраических полиномов $P(x,y)$. Используя эти свойства, исследованы аппроксимативные свойства частичных сумм двумерного предельного ряда. В частности, исследовано поведение соответствующей двумерной функции Лебега.

Ключевые слова: полиномы Якоби, ряд Фурье, предельный ряд, функция Лебега, аппроксимативные свойства

Для цитирования: *Гусейнов И. Г., Гаджимирзаев Р. М.* Двумерные предельные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби и их аппроксимативные свойства // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 422–433. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-422-433

Article

Two-dimensional limit series in ultraspherical Jacobi polynomials and their approximative properties

I. G. Guseinov, R. M. Gadzhimirzaev✉

Dagestan Federal Research Center of RAS, 45 M. Gadzhieva St., Makhachkala 367025, Russia

Ibraghim G. Guseinov, ibraa2g@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-3888-6383
Ramis M. Gadzhimirzaev, ramis3004@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6686-881X

Abstract. Let $C[-1,1]$ be the space of functions continuous on the segment $[-1,1]$, $C[-1,1]^2$ be the space of functions continuous on the square $[-1,1]^2$. We denote by $P_n^\alpha(x)$ the ultraspherical Jacobi polynomials. Earlier, for function f from the space $C[-1,1]$ limit series were constructed by the system of polynomials $P_n^\alpha(x)$ and the approximative properties of their partial sums were investigated. In particular, an upper bound for the corresponding Lebesgue function was obtained. Moreover, it was shown that the partial sums of the limit series, in contrast to the Fourier – Jacobi sums, coincide with the original function at the points ± 1. In this paper, for function $f(x,y)$ from the space $C[-1,1]^2$, we construct two-dimensional limit series by the system of ultraspherical Jacobi polynomials $P_n^\alpha(x)P_m^\beta(y)$ orthogonal on $[-1,1]^2$ with respect to the Jacobi-type weight-function. It is shown that the partial sum of the two-dimensional limit series coincides with $f(x,y)$ on the set $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$ and is a projection on the subspace of algebraic polynomials $P(x,y)$. Using these properties, the approximative properties of the partial sums of the two-dimensional limit series are investigated. In particular, the behavior of the corresponding two-dimensional Lebesgue function is studied.

Keywords: Jacobi polynomials, Fourier series, limit series, Lebesgue function, approximation properties

For citation: Guseinov I. G., Gadzhimirzaev R. M. Two-dimensional limit series in ultraspherical Jacobi polynomials and their approximative properties. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 422–433 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-422-433

Введение

Приближение функций (сигналов) частичными суммами рядов по тем или иным ортонормированным системам является одним из часто применяемых подходов в теории приближений (см., например, [1–8]). При этом, если функция задана на достаточно длинном промежутке $[a,b]$, то приходится разбивать исходный промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ и приближать куски функции на каждой из этих частей. Тогда, как правило, в местах стыка функций, аппроксимирующих куски исходного сигнала, возникают разрывы. Не являются исключением и ряды Фурье по классическим полиномам Якоби $\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\}$. В связи с этим в работе [9] для $f \in C[-1,1]$ были введены предельные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби $P_n^{\alpha}(x) = P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ при $\alpha \to -1$. Было показано, что предельное положение ряда Фурье – Якоби

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k^{\alpha} p_k^{\alpha}(x), \tag{1}$$

в котором

$$p_k^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k^{\alpha}}} P_k^{\alpha}(x),$$

$$\hat{f}_k^{\alpha} = \int_{-1}^{1} f(t) p_k^{\alpha}(t) \rho(t) dt, \quad \alpha > -1, \quad \rho(t) = (1-t^2)^{\alpha}$$

при $\alpha \to -1$ имеет следующий вид [9, (3.29)]:

$$f \sim \frac{f(-1)+f(1)}{2} + \frac{f(1)-f(-1)}{2} x + (1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_k p_k^1(x). \tag{2}$$

Здесь

$$\hat{g}_k = \int_{-1}^{1} g(t) p_k^1(t)\, dt, \quad g(t) = f(t) - \frac{f(1)+f(-1)}{2} - \frac{f(1)-f(-1)}{2} t.$$

Если через $S_n^{-1}(f) = S_n^{-1}(f,x)$ мы обозначим частичную сумму ряда (2)

$$S_n^{-1}(f) = \frac{f(-1)+f(1)}{2} + \frac{f(1)-f(-1)}{2} x + (1-x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k p_k^1(x), \tag{3}$$

то из (3) следует, что для $n \geqslant 2$ справедливы равенства

$$S_n^{-1}(f, \pm 1) = f(\pm 1).$$

Отметим, что частичные суммы $S_n^{\alpha}(f)$ ряда Фурье (1) этим свойством не обладают. Далее, в той же работе было показано, что $S_n^{-1}(f)$ является проектором на пространство H^n алгебраических полиномов q_n степени $\leqslant n$, для которых $q_n(\pm 1) = f(\pm 1)$. На основе этих свойств было показано, что (см. [9, (4.7), (4.8)])

$$|f(x) - S_n^{-1}(f,x)| \leqslant (1 + \Lambda_n(x))\, E_n^{\pm 1}(f),$$

где

$$\Lambda_n(x) = \frac{1}{8}(1-x^2) \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} P_k^1(x) P_k^1(t) \right| dt =$$

$$= (1-x^2)\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x)p_k^1(t)\right| dt, \tag{4}$$

$$E_n^{\pm 1}(f) = \inf_{\substack{q_n\in H^n \\ q_n(\pm1)=f(\pm1)}} \|f-q_n\|_{C[-1,1]}.$$

А для функции Лебега $\Lambda_n(x)$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ была получена следующая оценка (см. [9, лемма 4.1]):

$$\Lambda_n(x) \leqslant c\left(1+\ln(1+n\sqrt{1-x^2})\right), \tag{5}$$

где c — некоторая положительная константа.

В настоящей работе мы введем двумерные предельные ряды вида (2) и изучим аппроксимативные свойства их частичных сумм. Для этого нам понадобятся некоторые сведения об ультрасферических полиномах Якоби $P_n^1(x)$, которые мы приведем в следующем разделе.

1. Некоторые свойства полиномов Якоби

Полиномы Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ с произвольными $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ можно определить с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\kappa(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\kappa(x)\sigma^n(x)\right\},$$

где $\kappa(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\sigma(x) = (1-x)^2$.

Также их можно определить через формулу для явного вида:

$$P_n^{\alpha,\beta} = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k, \tag{6}$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства полиномов $P_n^\alpha(x) = P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ [10]:

1) *ортогональность при* $\alpha > -1$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\alpha P_n^\alpha(x)P_m^\alpha(x)dx = h_n^\alpha\delta_{n,m}, \tag{7}$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера,

$$h_n^\alpha = h_n^{\alpha,\alpha} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)2^{2\alpha+1}}{n!\Gamma(n+2\alpha+1)(2n+2\alpha+1)}; \tag{8}$$

2) *ортонормированные ультрасферические полиномы Якоби*

$$p_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^\alpha}}P_n^\alpha(x); \tag{9}$$

3) *равенство*

$$P_n^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{4}P_{n-2}^1(x), \quad n\geqslant 2. \tag{10}$$

2. Аппроксимативные свойства двумерного предельного ряда

Через $C[-1,1]^2$ обозначим пространство непрерывных на квадрате $[-1,1]^2 = [-1,1]\times[-1,1]$ функций $f(x,y)$ с нормой

$$\|f\|_{C[-1,1]^2} = \max_{(x,y)\in[-1,1]^2} |f(x,y)|.$$

Рассмотрим систему полиномов

$$\{p_{n,m}^{\alpha,\beta}(x,y)\}_{n,m=0}^{\infty} = \{p_n^{\alpha}(x)p_m^{\beta}(y)\}_{n,m=0}^{\infty}.$$

Из (7) следует, что при $\alpha,\beta > -1$ эта система ортонормирована на $[-1,1]^2$ относительно веса

$$\rho(x,y) = (1-x^2)^{\alpha}(1-y^2)^{\beta}.$$

Далее, для $f \in C[-1,1]^2$ мы можем определить коэффициенты Фурье по системе $\{p_{n,m}^{\alpha,\beta}(x,y)\}_{n,m=0}^{\infty}$

$$\hat{f}_{k,l}^{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(t,s)p_k^{\alpha}(t)p_l^{\beta}(s)(1-t^2)^{\alpha}(1-s^2)^{\beta}dt\,ds. \tag{11}$$

Функции $f(x,y)$ сопоставим следующий ряд:

$$f(x,y) \sim \hat{f}_{0,0}^{\alpha,\beta}p_0^{\alpha}(x)p_0^{\beta}(y) + \hat{f}_{1,0}^{\alpha,\beta}p_1^{\alpha}(x)p_0^{\beta}(y) + \hat{f}_{0,1}^{\alpha,\beta}p_0^{\alpha}(x)p_1^{\beta}(y) + \hat{f}_{1,1}^{\alpha,\beta}p_1^{\alpha}(x)p_1^{\beta}(y) +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty} p_k^{\alpha}(x)\left(\hat{f}_{k,0}^{\alpha,\beta}p_0^{\beta}(y) + \hat{f}_{k,1}^{\alpha,\beta}p_1^{\beta}(y)\right) + \sum_{l=2}^{\infty} p_l^{\beta}(y)\left(\hat{f}_{0,l}^{\alpha,\beta}p_0^{\alpha}(x) + \hat{f}_{1,l}^{\alpha,\beta}p_1^{\alpha}(x)\right) +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty} \hat{f}_{k,l}^{\alpha,\beta}p_k^{\alpha}(x)p_l^{\beta}(y). \tag{12}$$

Ряд, полученный из (12) посредством почленного предельного перехода при $\alpha,\beta \to -1$, будем называть *двумерным предельным рядом по ультрасферическим полиномам Якоби*.

Замечание. Ряд (12) представляет собой формальную группировку ряда Фурье по системе $\{p_{n,m}^{\alpha,\beta}(x,y)\}_{n,m=0}^{\infty}$:

$$f(x,y) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \hat{f}_{k,l}^{\alpha,\beta}p_k^{\alpha}(x)p_l^{\beta}(y). \tag{13}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее соотношение, справедливое для любой функции $f \in C[-1,1]$:

$$\lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\alpha}f(y)dy = \frac{f(-1)+f(1)}{2}. \tag{14}$$

Перейдем к получению явного вида двумерного предельного ряда. Из (6) и (9) имеем

$$p_0^{\alpha}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)}},$$

$$p_1^\alpha(x)=\sqrt{\frac{(2\alpha+3)\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}}}\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}(\alpha+1)x=\sqrt{\frac{2(\alpha+1)\Gamma(\alpha+5/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+2)}}x.$$

Тогда из (12) с учетом (11) и (14) получаем

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{0,0}^{\alpha,\beta}p_0^\alpha(x)p_0^\beta(y)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\frac{\Gamma(\beta+3/2)\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\beta+2)\ \ \Gamma(\alpha+2)}(\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\alpha\left((\beta+1)\int_{-1}^{1}(1-s^2)^\beta f(t,s)ds\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{\alpha\to-1}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}(\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\alpha\frac{f(t,-1)+f(t,1)}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{f(-1,-1)+f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)}{4}=$$

$$=\frac{f(-1,-1)+f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)}{4},$$

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{1,0}^{\alpha,\beta}p_1^\alpha(x)p_0^\beta(y)=$$

$$=\frac{2}{\pi}x\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(\beta+3/2)}{\Gamma(\beta+2)}(\alpha+1)\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^\alpha\left((\beta+1)\int_{-1}^{1}(1-s^2)^\beta f(t,s)ds\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)x\lim_{\alpha\to-1}\frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)}(\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\alpha t\frac{f(t,-1)+f(t,1)}{2}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{-f(-1,-1)+f(1,-1)-f(-1,1)+f(1,1)}{4}x=$$

$$=\frac{-f(-1,-1)-f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)}{4}x,$$

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{0,1}^{\alpha,\beta}p_0^\alpha(x)p_1^\beta(y)=$$

$$=\frac{2}{\pi}y\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(\beta+5/2)}{\Gamma(\beta+2)}(\beta+1)\int_{-1}^{1}s(1-s^2)^\beta\left((\alpha+1)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^\alpha f(t,s)dt\right)ds=$$

$$=\frac{-f(-1,-1)+f(-1,1)-f(1,-1)+f(1,1)}{4}y,$$

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{1,1}^{\alpha,\beta}p_1^\alpha(x)p_1^\beta(y)=$$

$$=\frac{4}{\pi}xy\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(\beta+5/2)}{\Gamma(\beta+2)}(\beta+1)\int_{-1}^{1}s(1-s^2)^\beta\left((\alpha+1)\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^\alpha f(t,s)dt\right)ds=$$

$$=\frac{f(-1,-1)-f(-1,1)-f(1,-1)+f(1,1)}{4}xy.$$

Пусть теперь $k\geqslant 2$. Из (8) имеем

$$\lim_{\alpha\to-1}h_k^\alpha=\frac{k-1}{2k(2k-1)}. \tag{15}$$

Тогда

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}^{\alpha,\beta}_{k,0}p^{\alpha}_{k}(x)p^{\beta}_{0}(y)=$$
$$=\lim_{\alpha\to-1}\left[\frac{1}{h^{\alpha}_{k}}P^{\alpha}_{k}(x)\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)\left(\lim_{\beta\to-1}(\beta+1)\int\limits_{-1}^{1}(1-s^2)^{\beta}f(t,s)ds\right)dt\right]=$$
$$=\frac{2k(2k-1)}{k-1}\lim_{\alpha\to-1}\left[P^{\alpha}_{k}(x)\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)\frac{f(t,-1)+f(t,1)}{2}dt\right].$$

Далее положим

$$g(t,\pm1)=f(t,\pm1)-\frac{f(1,\pm1)+f(-1,\pm1)}{2}-\frac{f(1,\pm1)-f(-1,\pm1)}{2}t.$$

Из (7) следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)f(t,\pm1)dt=\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)g(t,\pm1)dt.$$

Кроме того, для $f\in C[-1,1]$ при $k\geqslant 2$ имеет место соотношение (см. [9, (3.24)]):

$$\lim_{\alpha\to-1}\int\limits_{-1}^{1}f(y)(1-y^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(y)dy=-\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}f(y)P^{1}_{k-2}(y)dy. \qquad (16)$$

Следовательно, с учетом (16) и (10) мы можем записать

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}^{\alpha,\beta}_{k,0}p^{\alpha}_{k}(x)p^{\beta}_{0}(y)=$$
$$=\frac{k(2k-1)}{8(k-1)}(1-x^2)P^{1}_{k-2}(x)\int\limits_{-1}^{1}P^{1}_{k-2}(t)\frac{g(t,1)+g(t,-1)}{2}dt,\quad k\geqslant 2.$$

Вычислим теперь $\lim\limits_{\alpha\to-1}\lim\limits_{\beta\to-1}\hat{f}^{\alpha,\beta}_{k,1}p^{\alpha}_{k}(x)p^{\beta}_{1}(y)$. Имеем

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}^{\alpha,\beta}_{k,1}p^{\alpha}_{k}(x)p^{\beta}_{1}(y)=$$
$$=\lim_{\alpha\to-1}\left[\frac{1}{h^{\alpha}_{k}}P^{\alpha}_{k}(x)\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)\left(\lim_{\beta\to-1}p^{\beta}_{1}(y)\int\limits_{-1}^{1}(1-s^2)^{\beta}p^{\beta}_{1}(s)f(t,s)ds\right)dt\right]=$$
$$=\frac{2k(2k-1)}{k-1}\frac{x^2-1}{4}P^{1}_{k-2}(x)y\lim_{\alpha\to-1}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)\left(\lim_{\beta\to-1}(\beta+1)\int\limits_{-1}^{1}(1-s^2)^{\beta}sf(t,s)ds\right)dt=$$
$$=\frac{k(2k-1)}{2(k-1)}(x^2-1)P^{1}_{k-2}(x)y\lim_{\alpha\to-1}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\alpha}P^{\alpha}_{k}(t)\frac{f(t,1)-f(t,-1)}{2}dt=$$

$$= \frac{k(2k-1)}{8(k-1)}(1-x^2)yP_{k-2}^1(x)\int\limits_{-1}^{1} P_{k-2}^1(t)\frac{g(t,1)-g(t,-1)}{2}dt.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для $l \geqslant 2$ имеют место соотношения

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{0,l}^{\alpha,\beta}p_0^\alpha(x)p_l^\beta(y) = \frac{k(2k-1)}{8(k-1)}(1-y^2)P_{l-2}^1(y)\int\limits_{-1}^{1} P_{l-2}^1(s)\frac{h(1,s)+h(-1,s)}{2}ds,$$

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{1,l}^{\alpha,\beta}p_1^\alpha(x)p_l^\beta(y) = \frac{k(2k-1)}{8(k-1)}x(1-y^2)P_{l-2}^1(y)\int\limits_{-1}^{1} P_{l-2}^1(s)\frac{h(1,s)-h(-1,s)}{2}ds,$$

где

$$h(\pm1,s) = f(\pm1,s) - \frac{f(\pm1,1)+f(\pm1,-1)}{2} - \frac{f(\pm1,1)-f(\pm1,-1)}{2}s.$$

Наконец, рассмотрим случай $k,l \geqslant 2$. С учетом равенств (15), (10) и (16) получаем

$$\lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\hat{f}_{k,l}^{\alpha,\beta}p_k^\alpha(x)p_l^\beta(y) =$$

$$= \lim_{\alpha\to-1}\lim_{\beta\to-1}\left[\frac{1}{h_k^\alpha}P_k^\alpha(x)\frac{1}{h_l^\beta}P_l^\beta(y)\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^\alpha P_k^\alpha(t)\int\limits_{-1}^{1}(1-s^2)^\beta P_l^\beta(s)f(t,s)ds\,dt\right] =$$

$$= \frac{k(2k-1)}{8(k-1)}\frac{l(2l-1)}{8(l-1)}(1-x^2)(1-y^2)P_{k-2}^1(x)P_{l-2}^1(y)\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} P_{k-2}^1(t)P_{l-2}^1(s)u(t,s)dt\,ds,$$

где

$$u(t,s) = g(t,s) - \frac{g(1,s)+g(-1,s)}{2} - \frac{g(1,s)-g(-1,s)}{2}t,$$
$$g(t,s) = f(t,s) - \frac{f(t,1)+f(t,-1)}{2} - \frac{f(t,1)-f(t,-1)}{2}s.$$

Далее положим

$$\begin{aligned} Q(f)(x,y) = {} & \frac{f(-1,-1)+f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)}{4} + \\ & + \frac{-f(-1,-1)-f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)}{4}x + \\ & + \frac{-f(-1,-1)+f(-1,1)-f(1,-1)+f(1,1)}{4}y + \\ & + \frac{f(-1,-1)-f(-1,1)-f(1,-1)+f(1,1)}{4}xy, \end{aligned}$$

$$a_k(f) = \int\limits_{-1}^{1} P_k^1(t)\frac{g(t,1)+g(t,-1)}{2}dt, \quad b_k(f) = \int\limits_{-1}^{1} P_k^1(t)\frac{g(t,1)-g(t,-1)}{2}dt, \tag{17}$$

$$c_l(f) = \int\limits_{-1}^{1} P_l^1(s)\frac{h(1,s)+h(-1,s)}{2}ds, \quad d_l(f) = \int\limits_{-1}^{1} P_l^1(s)\frac{h(1,s)-h(-1,s)}{2}ds,$$

$$e_{k,l}(f) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} P_k^1(t)P_l^1(s)u(t,s)dt\,ds. \tag{18}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. *Для $f(x,y) \in C[-1,1]^2$ двумерный предельный ряд имеет следующий вид:*

$$f(x,y) \sim Q(f)(x,y) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)(2k+3)}{8(k+1)}\left[a_k(f)+yb_k(f)\right]P_k^1(x)+$$
$$+(1-y^2)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+2)(2l+3)}{8(l+1)}\left[c_l(f)+xd_l(f)\right]P_l^1(y)+$$
$$+(1-x^2)(1-y^2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+2)(l+2)(2k+3)(2l+3)}{64(k+1)(l+1)}e_{k,l}(f)P_k^1(x)P_l^1(y).$$

Так как $h_k^1 = \frac{8(k+1)}{(k+2)(2k+3)}$, то с учетом (9) последний ряд можно переписать следующим образом:

$$f(x,y) \sim Q(f)(x,y) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\hat{a}_k(f)+y\hat{b}_k(f)\right]p_k^1(x)+$$
$$+(1-y^2)\sum_{l=0}^{\infty}\left[\hat{c}_l(f)+x\hat{d}_l(f)\right]p_l^1(y)+(1-x^2)(1-y^2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\hat{e}_{k,l}(f)p_k^1(x)p_l^1(y), \tag{19}$$

где

$$\hat{a}_k(f) = \frac{a_k(f)}{\sqrt{h_k^1}},\quad \hat{b}_k(f) = \frac{b_k(f)}{\sqrt{h_k^1}},\quad \hat{c}_l(f) = \frac{c_l(f)}{\sqrt{h_l^1}},\quad \hat{d}_l(f) = \frac{d_l(f)}{\sqrt{h_l^1}},\quad \hat{e}_{k,l}(f) = \frac{e_{k,l}(f)}{\sqrt{h_k^1h_l^1}}. \tag{20}$$

Теперь перейдем к исследованию аппроксимативных свойств ряда (19). С этой целью для $n,m \geqslant 2$ через $S_{n,m}(f)(x,y)$ обозначим его частичную сумму:

$$S_{n,m}(f)(x,y) = Q(f)(x,y) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{n-2}\left[\hat{a}_k(f)+y\hat{b}_k(f)\right]p_k^1(x)+$$
$$+(1-y^2)\sum_{l=0}^{m-2}\left[\hat{c}_l(f)+x\hat{d}_l(f)\right]p_l^1(y)+(1-x^2)(1-y^2)\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{m-2}\hat{e}_{k,l}(f)p_k^1(x)p_l^1(y).$$

Заметим, что для $(x,y) \in M = \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$ имеет место равенство

$$S_{n,m}(f)(x,y) = f(x,y).$$

Кроме того, сумма $S_{n,m}(f)(x,y)$ является проектором на подпространство $H^{n,m}$ полиномов вида

$$R(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} r_{k,l}x^ky^l.$$

В самом деле, для частичной суммы

$$S_{n,m}^{\alpha,\beta}(f)(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \hat{f}_{k,l}^{\alpha,\beta}(f) p_k^{\alpha}(x) p_l^{\beta}(y)$$

ряда (12) (или, что то же самое, ряда (13)) из (11) при $\alpha, \beta > -1$ следует, что

$$S_{n,m}^{\alpha,\beta}(R)(x,y) = R(x,y).$$

Отсюда и из того, что

$$S_{n,m}(R)(x,y) = \lim_{\alpha\to -1} \lim_{\beta\to -1} S_{n,m}^{\alpha,\beta}(R)(x,y),$$

следует справедливость равенства

$$S_{n,m}(R)(x,y) = R(x,y).$$

Далее, через $E_{n,m}^{*}(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in C[-1,1]^2$ полиномами $R(x,y) \in H^{n,m}$, совпадающими с f на множестве M:

$$E_{n,m}^{*}(f) = \inf_{R\in H^{n,m}} \|f - R\|_{C[-1,1]^2}.$$

Пусть $R^{*}(x,y)$ полином, такой что $E_{n,m}^{*}(f) = \|f - R^{*}\|_{C[-1,1]^2}$ и $R^{*}(x,y) = f(x,y)$ на множестве M. Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} |f(x,y) - S_{n,m}(x,y)| &\leqslant |f(x,y) - R^{*}(x,y)| + |S_{n,m}(R^{*} - f)(x,y)| \leqslant \\ &\leqslant E_{n,m}^{*}(f) + |S_{n,m}(R^{*} - f)(x,y)|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |S_{n,m}(R^{*} - f)(x,y)| \leqslant (1-x^2) \left| \sum_{k=0}^{n-2} \left[\hat{a}_k(R^{*} - f) + y\hat{b}_k(R^{*} - f) \right] p_k^1(x) \right| + \\ +(1-y^2) \left| \sum_{l=0}^{m-2} \left[\hat{c}_l(R^{*} - f) + x\hat{d}_l(R^{*} - f) \right] p_l^1(y) \right| + \\ +(1-x^2)(1-y^2) \left| \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{m-2} \hat{e}_{k,l}(R^{*} - f) p_k^1(x) p_l^1(y) \right| = \\ = (1-x^2) I_1 + (1-y^2) I_2 + (1-x^2)(1-y^2) I_3. \end{aligned} \tag{21}$$

Оценим I_1. Из (17), (20) и (9) имеем:

$$\begin{aligned} I_1 \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n-2} \int_{-1}^{1} p_k^1(x) p_k^1(t) \frac{g(R^{*} - f)(t,1) + g(R^{*} - f)(t,-1)}{2} dt \right| + \\ +|y| \left| \sum_{k=0}^{n-2} \int_{-1}^{1} p_k^1(x) p_k^1(t) \frac{g(R^{*} - f)(t,1) - g(R^{*} - f)(t,-1)}{2} dt \right| \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{g(P^* - f)(t,1) + g(R^* - f)(t,-1)}{2} \right| \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| dt +$$

$$+|y| \int\limits_{-1}^{1} \left| \frac{g(R^* - f)(t,1) - g(R^* - f)(t,-1)}{2} \right| \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant E_{n,m}^*(f) \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| dt + E_{n,m}^*(f)|y| \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| dt.$$

Отсюда и из (4) получаем

$$(1 - x^2)|I_1| \leqslant 2E_{n,m}^*(f)\Lambda_n(x).$$

А для величины $\Lambda_n(x)$ справедлива оценка (5). Совершенно аналогично можно показать, что

$$(1 - y^2)|I_2| \leqslant 2E_{n,m}^*(f)\Lambda_m(y).$$

Теперь оценим I_3:

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left| (R^* - f)(t,s) - \frac{(R^* - f)(1,s) + (R^* - f)(-1,s)}{2} - \right.$$

$$- \frac{(R^* - f)(1,s) - (R^* - f)(-1,s)}{2} t - \frac{(R^* - f)(t,1) + (R^* - f)(t,-1)}{2} -$$

$$\left. - \frac{(R^* - f)(t,1) - (R^* - f)(t,-1)}{2} s \right| \left| \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{m-2} p_k^1(x) p_k^1(t) p_l^1(y) p_l^1(s) \right| dt\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \left[3E_{n,m}^*(f) + (|t| + |s|)E_{n,m}^*(f) \right] \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| \left| \sum_{l=0}^{m-2} p_l^1(y) p_l^1(s) \right| dt\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 5E_{n,m}^*(f) \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n-2} p_k^1(x) p_k^1(t) \right| dt \int\limits_{-1}^{1} \left| \sum_{l=0}^{m-2} p_l^1(y) p_l^1(s) \right| ds.$$

Отсюда

$$(1 - x^2)(1 - y^2)|I_3| \leqslant 5E_{n,m}^*(f)\Lambda_n(x)\Lambda_m(y).$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $f(x,y) \in C[-1,1]^2$. *Тогда имеет место оценка*

$$|f(x,y) - S_{n,m}(f)(x,y)| \leqslant cE_{n,m}^*(f) \left[\left(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})\right) \left(1 + \ln(1 + m\sqrt{1 - y^2})\right) + \right.$$

$$\left. + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2}) + \ln(1 + m\sqrt{1 - y^2}) + 1 \right].$$

Список литературы

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. Москва : Наука, 1983. 384 с.
2. *Malvar H. S.* Signal Processing with Lapped Transforms. Artech House, 1992. 380 p.
3. *Trefethen L. N.* Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equation. Cornell University, 1996. 299 p.
4. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. Махачкала : Изд-во Дагестанского государственного педагогического университета, 1997. 255 с.
5. *Mukundan R., Ramakrishnan K. R.* Moment Functions in Image Analysis. Theory and Applications. Singapore : World Scientific, 1998. 164 p.
6. *Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф.* Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. Москва : Машиностроение, 1999. 356 с.
7. *Trefethen L. N.* Spectral Methods in Matlab. Philadelphia : SIAM, 2000. 181 p.
8. *Шарапудинов И. И.* Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Математические заметки. 2000. Т. 67, № 3. С. 295–309. https://doi.org/10.4213/mzm858
9. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 295–309. https://doi.org/10.4213/mzm10292
10. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Москва : Физматгиз, 1962. 500 с.

References

1. Pashkovskiy S. *Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva* [Numerical Applications of Polynomials and Tchebychev Series]. Moscow, Nauka, 1983. 384 p. (in Russian).
2. Malvar H. S. *Signal Processing with Lapped Transforms*. Artech House, 1992. 380 p.
3. Trefethen L. N. *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equation*. Cornell University, 1996. 299 p.
4. Sharapudinov I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na setkah. Teoriya i prilozheniya* [Polynomials Orthogonal on Grids. Theory and Applications]. Makhachkala, Izdatelstvo Dagestan Pedag. Univ., 1997. 255 p. (in Russian).
5. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment Functions in Image Analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998. 164 p.
6. Dedus F. F., Mahortyh S. A., Ustinin M. N., Dedus A. F. *Obobshchennyi spektral'no-analiticheskii metod obrabotki informatsionnykh massivov. Zadachi analiza izobrazhenii i raspoznavaniia obrazov* [Generalized Spectral and Analytic Method of Data Arrays Processing. Problems of Image Analysis and Pattern Recognition]. Moscow, Mashinostroenie, 1999. 356 p. (in Russian).
7. Trefethen L. N. *Spectral Methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000. 181 p.
8. Sharapudinov I. I. Approximation of discrete functions and Chebyshev polynomials orthogonal on the uniform grid. *Mathematical Notes*, 2000, vol. 67. iss. 3, pp. 389–397. https://doi.org/10.1007/BF02676675
9. Sharapudinov I. I. Limit ultraspherical series and their approximation properties. *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94. iss. 2, pp. 281–293. https://doi.org/10.1134/S0001434613070274
10. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ., vol. 23, 1939. 440 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatgiz, 1962. 500 p.).

Поступила в редакцию / Received 25.05.2021
Принята к публикации / Accepted 14.09.2021
Опубликована / Published 30.11.2021