Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 442–447
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 442–447
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-442-447
Научная статья
УДК 512.54

Строение групп с циклическими коммутантами, неразложимых в подпрямое произведение групп

В. А. Козлов[1✉], **Г. Н. Титов**[2]

[1]Армавирский государственный педагогический университет, Россия, 352901, г. Армавир, ул. Розы Люксембург, д. 159
[2]Кубанский государственный университет, Россия, 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149

Козлов Владимир Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и методики их преподавания, shagin196@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-7855-4597

Титов Георгий Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и алгебры, georgii_titov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4949-1205

Аннотация. В статье изучаются конечные группы, неразложимые в подпрямое произведение групп (подпрямо неразложимые), коммутанты которых являются циклическими подгруппами. Доказано, что расширения примарной циклической группы с помощью любой подгруппы ее группы автоморфизмов полностью описывают строение непримарных конечных подпрямо неразложимых групп с циклическим коммутантом. Основной результат статьи представлен теоремой: конечная непримарная группа является подпрямо неразложимой с циклическим коммутантом тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа $p \geqslant 3$ в ней найдется неединичная нормальная циклическая p-подгруппа, совпадающая со своим централизатором в группе. Кроме того, показано, что требование непримарности в формулировке теоремы является существенным.

Ключевые слова: группа, циклический коммутант, подпрямое произведение групп, силовская подгруппа, полупрямое произведение групп, централизатор, расширение группы, сверхразрешимая группа

Для цитирования: *Козлов В. А., Титов Г. Н.* Строение групп с циклическими коммутантами, неразложимых в подпрямое произведение групп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 442–447. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-442-447

Article

The structure of groups with cyclic commutator subgroups indecomposable to a subdirect product of groups

V. A. Kozlov[1✉], **G. N. Titov**[2]

[1]Armavir State Pedagogical University, 159 Rosa Luxemburg St., Armavir 352901, Russia
[2]Kuban State University, 149 Stavropolskaya St., Krasnodar 350040, Russia

Vladimir A. Kozlov, shagin196@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-7855-4597

Georgiy N.Titov, georgii_titov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4949-1205

Abstract. The article studies finite groups indecomposable to subdirect product of groups (subdirectly irreducible groups), commutator subgroups of which are cyclic subgroups. The article proves that extensions of a primary cyclic group by any subgroup of its automorphisms completely describe the structure of non-primary finite subdirectly irreducible groups with a cyclic commutator subgroup. The following theorem is the main result of this article: a finite non-primary group is subdirectly irreducible with a cyclic commutator subgroup if and only if for some prime number $p \geqslant 3$ it contains a non-trivial normal cyclic p-subgroup that coincides with its centralizer in the group. In addition, it is shown that the requirement of non-primality in the statement of the theorem is essential.

Keywords: group, cyclic commutator subgroup, subdirect product of groups, Sylow subgroup, semidirect product of groups, centralizer, group extension, supersolvable group

For citation: Kozlov V. A., Titov G. N. The structure of groups with cyclic commutator subgroups indecomposable to a subdirect product of groups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 442–447 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-442-447

Введение

Группы, разложимые в подпрямое произведение групп, изучались Ю. М. Горчаковым [1,2], Р. Ремаком и др. Р. Ремаком, в частности, найдены условия [3, теорема Ремака], при которых произвольная группа разлагается в поддекартово произведение групп. Наиболее значительные результаты о группах с циклическими коммутантом принадлежат B. Cordon, M. Miller, I. D. MacDonald, R. M. Guralnick. Другие результаты можно найти в [4–10]. В статье рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения, определения и известные утверждения можно найти, например, в [1–3, 11–13]. Согласно [1, 2], под группой, неразложимой в подпрямое произведение групп (что то же самое — подпрямо неразложимой), понимается неединичная группа, в которой не найдутся две неединичные нормальные подгруппы с единичным пересечением, т. е. группа с единственным минимальным неединичным нормальным делителем. Еще в 80-х гг. прошлого столетия Ю. М. Горчаковым было предложено изучить строение конечных подпрямо неразложимых групп с циклическим коммутантом. При этом он обратил внимание, что всякое расширение примарной циклической группы с помощью любой подгруппы ее группы автоморфизмов [3, гл. 2, п. 6.1] является группой такого рода. В статье доказывается, что такие расширения полностью описывают строение непримарных конечных подпрямо неразложимых групп с циклическим коммутантом. Основным результатом статьи являются нижеприведенная теорема и ее следствие.

Группы с циклическим коммутантом, неразложимые в подпрямое произведение групп

Лемма. *Если в конечной группе для некоторого простого числа p найдется неединичная нормальная циклическая p-подгруппа, совпадающая со своим централизатором в самой группе, то группа подпрямо неразложима и имеет циклический коммутант.*

Доказательство. Пусть F — неединичная нормальная циклическая p-подгруппа конечной группы G и $C_G(F) = F$. Так как группа автоморфизмов $Aut\ F$ группы F

является абелевой [1, теорема 19.28], $C_G(F) \trianglelefteq G$ и $G/C_G(F)$ изоморфна подгруппе группы $Aut\ F$ [1, теорема 19.5], то факторгруппа $G/C_G(F)$ абелева. Откуда следует, что коммутант G' группы G содержится в $C_G(F) = F$. Так как F — циклическая p-подгруппа, то и коммутант G' группы G тоже является циклической p-подгруппой.

Далее, пусть N — подгруппа порядка p из F. Ясно, что N — минимальный неединичный нормальный делитель группы G. Нам осталось проверить, что группа G является подпрямо неразложимой. Предполагая противное, найдем другой минимальный неединичный нормальный делитель L группы G. В силу $F, L \trianglelefteq G$ и $F \cap L = 1$ (учли $N \cap L = 1$) получаем $\langle F, L\rangle = F \times L$, а значит, $C_G(F) \geqslant L$ и $C_G(F) \neq F$. Пришли к противоречию, которое окончательно доказывает лемму. □

Заметим, что из леммы следует утверждение Ю. М. Горчакова о том, что расширения конечных неединичных примарных циклических групп с помощью подгрупп их групп автоморфизмов являются подпрямо неразложимыми группами с циклическими коммутантами.

Теорема. *Конечная непримарная группа является подпрямо неразложимой с циклическим коммутантом тогда и только тогда, когда для некоторого простого числа $p \geqslant 3$ в ней найдется неединичная нормальная циклическая p-подгруппа, совпадающая со своим централизатором в группе.*

Доказательство. Выполнимость достаточного условия теоремы непосредственно следует из леммы. Поэтому доказываем необходимость.

Пусть G — непримарная подпрямо неразложимая группа с циклическим коммутантом. Найдем для некоторого простого $p \geqslant 3$ неединичную нормальную в G циклическую p-подгруппу F, для которой $C_G(F) = F$. По условию коммутант G' группы G является циклической группой. Если $G' = 1$, то G — абелева непримарная группа, очевидно, содержащая две неединичные нормальные подгруппы взаимно простых порядков. Если же G' — непримарная циклическая группа, то в ней найдутся две характеристические неединичные подгруппы взаимно простых порядков, которые будут нормальны в G. Таким образом, приходим к выводу, что эти два случая исключены, и поэтому коммутант G' является для некоторого простого числа p неединичной циклической p-подгруппой, очевидно, нормальной в G. Далее покажем, что G' можно будет взять в качестве упомянутой выше искомой подгруппы F.

Заметим, что в силу цикличности G' и того, что факторгруппа G/G' абелева, следует, что G — сверхразрешимая группа. Пусть $q = \max\ \pi(G)$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Тогда силовская q-подгруппа группы G нормальна в G [12, следствие 7.5], и при $p \neq q$ в G найдем две нормальные неединичные подгруппы взаимно простых порядков. Поэтому $p = q$ и $p = \max\ \pi(G)$. Так как группа G непримарна, то $p \geqslant 3$.

Показано, что коммутант G' является неединичной циклической нормальной p-подгруппой, где $p = \max \pi(G)$. В сверхразрешимой непримарной группе G найдется неединичная холловская p'-подгруппа Q (здесь $p' = \pi(G) \backslash \{p\}$).

Рассмотрим подгруппу $H = G' \lambda Q$. Так как $H \geqslant G'$, то $H \trianglelefteq G$. В силу $Q \cong H/G'$ и того, что H/G' — подгруппа абелевой группы G/G', приходим к выводу, что холловская p'-подгруппа Q группы G является абелевой.

Покажем, что $H' = G'$. Предположим противное, т. е. $H' < G'$ (учитываем, что $H' \leqslant G'$). Подгруппа Фраттини $\Phi(G')$ циклической p-группы G', являясь в ней максимальной, содержит H'. Поэтому факторгруппа $H/\Phi(G')$ абелева и сопряжение всяким элементом p'-подгруппы Q индуцирует тождественный автоморфизм в группе

$G'/\Phi(G')$. Порядок группы автоморфизмов группы G', индуцирующих тождественный автоморфизм в группе $G'/\Phi(G')$, равен степени простого числа p [11, теорема 12.2.2]. Так как Q — p'-подгруппа, то получаем, что $C_H(G') \geqslant Q$, т. е. $H = G' \times Q$. В силу характеристичности подгруппы Q в группе H и $H \trianglelefteq G$ получаем, что $Q \trianglelefteq G$. Это приводит к противоречию, которое и означает, что $H' = G'$.

Итак, нормальная подгруппа $H = G'\lambda Q$ группы G имеет абелевы силовские примарные подгруппы (учитываем, что G', Q — абелевы группы). Тогда, по теореме Ф. Холла, коммутант H' дополняем в любом расширении группы H [13, следствие 11.8.3]. Учитывая, что G — расширение группы H и $H' = G'$, приходим к выводу, что коммутант G' дополняем в группе G. Теперь положим, что $F = G'$ и T — дополнение к F в G.

Таким образом, в непримарной группе G для простого числа $p = \max\ \pi(G)$ найдены неединичная нормальная циклическая p-подгруппа F и некоторая подгруппа T такие, что $G = F\lambda T$. Для доказательства теоремы остается показать, что $C_G(F) = F$. Предположим противное, т. е. $C_G(F) > F$. Ясно, что в силу $F \trianglelefteq G$ имеем $C_G(F) \trianglelefteq G$, и поэтому $C_T(F) = T \cap C_G(F) \trianglelefteq T$. Из того, что $G = F\lambda T$ и $C_G(F) > F$, следует, что $C_G(F) = F\lambda(T \cap C_G(F))$ [12, лемма 3.7], т. е. $C_G(F) = F \times C_T(F)$ и по предположению $C_T(F) \neq 1$. Откуда следует, что нормализатор неединичной подгруппы $C_T(F)$ содержит подгруппы F и T, а значит, содержит и саму группу G. Поэтому $C_T(F) \trianglelefteq G$, т. е. в G нашлись неединичные нормальные подгруппы F и $C_T(F)$, имеющие единичное пересечение. Пришли к противоречию, которое означает, что $C_G(F) = F$. Теорема доказана. □

Заметим, что в ходе доказательства теоремы мы не только нашли в конечной непримарной подпрямо неразложимой группе G с циклическим коммутантом неединичную нормальную циклическую p-подгруппу F, для которой $C_G(F) = F$, где p — нечетное простое число, но и нашли еще такую подгруппу T, что $G = F\lambda T$. Так как $C_G(F) = F$, то $T \cong G/F = G/C_G(F)$, а значит, T изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $Aut\ F$ группы F. Группа автоморфизмов циклической p-группы порядка p^n $(n \in N)$ является циклической группой порядка $p^{n-1}(p-1)$ [1, теорема 19.28]. Откуда следует, что T является неединичной циклической группой, порядок которой делит число $p^{n-1}(p-1)$. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следствие теоремы.

Следствие. *Следующие три высказывания попарно равносильны:*

1) *G — конечная непримарная подпрямо неразложимая группа с циклическим коммутантом;*
2) *группа G непримарна и является расширением неединичной примарной циклической группы с помощью некоторой подгруппы ее группы автоморфизмов;*
3) *группа G представима в виде $F\lambda T$, где для некоторого простого числа $p \geqslant 3$ и натурального числа n подгруппа F является циклической группой порядка p^n, совпадающей со своим централизатором в G, а T является циклической подгруппой порядка, делящего нацело число $p^{n-1}(p-1)$ и не взаимно простого с числом $p-1$.*

Заметим, что следствие дает достаточно понятное описание конечных непримарных подпрямо неразложимых групп с циклическим коммутантом. Изучению строения примарных групп такого рода посвящена статья А. А. Финогенова [9]. Согласно лемме, всякая конечная примарная группа, содержащая неединичную самоцентрализованную нормальную циклическую подгруппу, именно такой и является. Однако, например, неабелева группа порядка p^3 периода p, где p — нечетное простое число, тоже подпрямо неразложима и имеет циклический коммутант, но она не содержит неединичную самоцентрализованную нормальную подгруппу. Этот пример говорит, в частности, о том, что требование непримарности в формулировке теоремы является существенным.

Список литературы

1. *Горчаков Ю. М.* Теория групп. Тверь : ТГУ, 1998. 112 с.
2. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. Москва : Наука, 1978. 120 с.
3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. Москва : Наука, 1982. 288 с.
4. *Cheng Y.* On finite p-groups with cyclic commutator subgroup // Archiv der Mathematik. 1982. Vol. 39, iss. 4. P. 295–298. https://doi.org/10.1007/BF01899434
5. *Dark R. S., Newell M. L.* On conditions for commutators to form a subgroup // Journal of the London Mathematical Society. 1978. Vol. s2-17, iss. 2. P. 251–162. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-17.2.251
6. *Leong Y. K.* Odd order nilpotent groups of class two with cyclic center // Journal of the Australian Mathematical Society. 1974. Vol. 17, iss. 2. P. 142–153. https://doi.org/10.1017/S1446788700016724
7. *Leong Y. K.* Finite 2-groups of class two with cyclic center // Journal of the Australian Mathematical Society. 1979. Vol. 27, iss. 2. P. 125–140. https://doi.org/10.1017/S1446788700012052
8. *Miech R. J.* On p-groups with cyclic commutator subgroup // Journal of the Australian Mathematical Society. 1975. Vol. 20, iss. 2. P. 178–198. https://doi.org/10.1017/S1446788700020486
9. *Финогенов А. А.* О конечных p-группах с циклическим коммутантом и циклическим центром // Математические заметки. 1998. Т. 63, № 6. С. 911–922. https://doi.org/10.4213/mzm1362
10. *Skuratovskii R. V.* Commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group and the commutator width in the wreath product // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. 2020. Iss. 1. P. 3–16.
11. *Холл М.* Теория групп. Москва : Иностранная литература, 1962. 468 с.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. Москва : Наука, 1980. 384 с.
13. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. Москва : Наука, 1978. 272 с.

References

1. Gorchakov Yu. M. *Teoriya grupp* [The Theory of Groups]. Tver, TSU, 1998. 112 p. (in Russian).
2. Gorchakov Yu. M. *Gruppy s konechnymi klassami sopryazhennykh elementov* [Groups with Finite Conjugacy Classes]. Moscow, Nauka, 1978. 120 p. (in Russian).
3. Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentals of the Theory of Groups*. New York, Springer-Verlag, 1979. 203 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1982. 288 p.).
4. Cheng Y. On finite p-groups with cyclic commutator subgroup. *Archiv der Mathematik*, 1982, vol. 39, iss. 4, pp. 295–298. https://doi.org/10.1007/BF01899434
5. Dark R. S., Newell M. L. On conditions for commutators to form a subgroup. *Journal of the London Mathematical Society* 1978, vol. s2-17, iss. 2, pp. 251–162. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-17.2.251
6. Leong Y. K. Odd order nilpotent groups of class two with cyclic center. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1974, vol. 17, iss. 2, pp. 142–153. https://doi.org/10.1017/S1446788700016724

7. Leong Y. K. Finite 2-groups of class two with cyclic center. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1979, vol. 27, iss. 2, pp. 125–140. https://doi.org/10.1017/S1446788700012052
8. Miech R. J. On p-groups with cyclic commutator subgroup. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1975, vol. 20, iss. 2, pp. 178–198. https://doi.org/10.1017/S1446788700020486
9. Finogenov A. A. Finite p-groups with cyclic commutator subgroup and cyclic center. *Mathematical Notes*, 1998, vol. 63, iss. 6, pp. 802–812. https://doi/10.1007/BF02312775
10. Skuratovskii R. V. Commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group and the commutator width in the wreath product. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 2020, iss. 1, pp. 3–16.
11. Hall M. *Teoriya grupp* [The Theory of Groups]. Moscow, Inostrannaya literatura, 1962. 468 p. (in Russian).
12. Chernikov S. N. *Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp* [Groups with Given Properties of a System of Subgroups]. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
13. Shemetkov L. A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of Finite Groups]. Moscow, Nauka, 1978. 272 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 15.03.2021
Принята к публикации / Accepted 03.08.2021
Опубликована / Published 30.11.2021