Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 448–457
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 448–457
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-448-457

Научная статья
УДК 517.98

Гармонический анализ почти периодических на бесконечности функций в банаховых модулях

И. И. Струкова

Воронежский государственный университет, Россия, 394036, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
Струкова Ирина Игоревна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры системного анализа и управления, irina.k.post@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2355-0091

Аннотация. В статье рассматриваются однородные пространства функций, заданных на локально компактной абелевой группе и со значениями в комплексном банаховом пространстве. К ним относится ряд известных пространств, таких как пространства измеримых по Лебегу суммируемых функций, существенно ограниченных функций, ограниченных непрерывных функций, непрерывных исчезающих на бесконечности функций, пространства Степанова и Гельдера. Важной особенностью таких пространств является наличие в них структуры банаховых модулей, задаваемой сверткой функций. Это позволяет использовать понятия и результаты теории банаховых модулей и изометрических представлений. Статья посвящена исследованию почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств. За счет использования свойств почти периодических векторов в банаховых модулях изучены некоторые свойства медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций. Вводятся два эквивалентных определения почти периодической на бесконечности функции, а также понятие ряда Фурье такой функции. Причем ряд Фурье для такой функции определяется неоднозначно, а именно коэффициенты Фурье задаются с точностью до исчезающей на бесконечности функции из соответствующего пространства. Получены критерии того, что функция из однородного пространства является медленно меняющейся или почти периодической на бесконечности. За счет использования свойств спектра Берлинга и понятий множества не почти периодичности вектора из банахова модуля получен критерий представимости почти периодической на бесконечности функции в виде суммы исчезающей на бесконечности и обычной почти периодической функций.

Ключевые слова: однородное пространство, почти периодическая на бесконечности функция, медленно меняющаяся на бесконечности функция, банахов модуль, почти периодический вектор

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732 А).

Для цитирования: *Струкова И. И.* Гармонический анализ почти периодических на бесконечности функций в банаховых модулях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, вып. 4. С. 448–457. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-448-457

Article

Harmonic analysis of functions almost periodic at infinity in Banach modules

I. I. Strukova

Voronezh State University, 1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394036, Russia
Irina I. Strukova, irina.k.post@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-2355-0091

Abstract. The article is devoted to homogeneous spaces of functions defined on a locally compact Abelian group and with their values in a complex Banach space. These spaces include a umber of well-known spaces such as the spaces of Lebegue-measurable summable functions, substantially limited functions, bounded continuous functions, continuous vanishing at infinity functions, Stepanov and Holder spaces. It is important that they can be endowed with structure of Banach modules, defined by the convolution of functions. This feature makes it possible to use the concepts and the results of the theories of Banach modules and isometric representations. In the article, we study almost periodic at infinity functions from homogeneous spaces. By using the properties of almost periodic vectors in Banach modules, we study some properties of slowly varying and almost periodic at infinity functions. Two equivalent definitions of an almost periodic at infinity function are introduced, as well as the concept of a Fourier series, which is ambiguous, namely, the Fourier coefficients are defined within the accuracy of a function from the corresponding space vanishing at infinity. We also obtain criteria for a function from a homogeneous space to be slowly varying or almost periodic at infinity. By using the properties of the Beurling spectrum and the concepts of the set of non-almost periodicity of a vector from a Banach module, we obtain a criterion of representability of an almost periodic at infinity function in the form of a sum of vanishing at infinity and the usual almost periodic functions.
Keywords: homogeneous space, function almost periodic at infinity, function slowly varying at infinity, Banach module, almost periodic vector
Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00732 A).
For citation: Strukova I. I. Harmonic analysis of functions almost periodic at infinity in Banach modules. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 4, pp. 448–457 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-4-448-457

1. Однородные пространства функций

Символом X обозначим комплексное банахово пространство, $End\ X$ — банахову алгебру линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Символом $L^1_{loc}(G,X)$ обозначим линейное пространство локально суммируемых (измеримых по Бохнеру) на локально компактной абелевой группе G (классов эквивалентности) функций со значениями в X.

Определение 1. Банахово пространство $\mathscr{F}(G,X)$ функций, определенных на группе G, со значениями в X назовем *однородным,* если выполняются следующие условия:

а) пространство $\mathscr{F}(G,X)$ содержится в пространстве Степанова $S^1(G,X)$ (см. пример 1), причем вложение $\mathscr{F}(G,X) \subset S^1(G,X)$ инъективно и непрерывно (инъективность означает инъективность оператора вложения);

б) в пространстве $\mathscr{F}(G,X)$ определена и ограничена сильно непрерывная группа $S(g)$, $g \in G$, операторов сдвигов функций, задаваемая формулой

$$(S(t)x)(g) = x(g+t), \quad g,t \in G, \quad x \in \mathscr{F}(G,X); \tag{1}$$

в) свертка

$$(f * x)(g) = \int\limits_G f(\tau)x(g-\tau)d\tau = \int\limits_G f(\tau)(S(-\tau)x)(g)\,d\tau, \quad g \in G, \tag{2}$$

двух любых функций $f \in L^1(G)$ и $x \in \mathscr{F}(G,X)$ принадлежит $\mathscr{F}(G,X)$, и выполнено неравенство $\|f * x\| \leqslant C\|f\|_1\|x\|$ для некоторой постоянной $C \geqslant 1$ (как правило, $C = 1$);

г) для любой функции $x \in \mathscr{F}(G,X)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in C_b(G)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi$ функция вида φx принадлежит пространству $\mathscr{F}(G,X)$, причем справедлива оценка $\|\varphi x\| \leqslant \|\varphi\|\|x\|$ и отображение $t \mapsto \varphi S(t)x : G \to \mathscr{F}(G,X)$ непрерывно.

Впервые однородные пространства функций, определенных на $\mathbb{R}_+$, рассмотрены в [1]. Для случая $G = \mathbb{R}$ однородные пространства изучались в работах [2, 3].

Пример 1. Указанные далее банаховы пространства функций однородные. Все они являются линейными подпространствами из $L^1_{loc}(G,X)$.

1. Пространства $L^p = L^p(G,X)$, $p \in [1,\infty)$, измеримых по Лебегу и суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ (классов) функций. Нормы в данных пространствах имеют вид $\|x\|_p = \left(\int\limits_G \|x(g)\|^p_X dg\right)^{1/p}$, $p \in [1,\infty)$.
2. Пространство $L^\infty = L^\infty(G,X)$ существенно ограниченных (классов) функций с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_X$.
3. Пространства Степанова $S^p = S^p(G,X)$, $p \in [1,\infty)$ (см. [4, 5]), состоящие из функций $x \in L^1_{loc}(G,X)$, для которых конечна величина
$$\|x\|_{S^p} = \sup_{g\in G}\left(\int\limits_V \|x(g+s)\|^p_X ds\right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty),$$
где V — некоторая компактная окрестность нуля группы G. Следует заметить, что пространство $S^p(G,X)$ не зависит от выбора V и соответствующие нормы эквивалентны. Кроме того, для компактной группы G справедливо равенство $S^p(G,X) = L^p(G,X)$.
4. Пространство $C_b = C_b(G,X)$ ограниченных непрерывных функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_X$, $x \in C_b$ ($C_b(G,X)$ — замкнутое подпространство из $L^\infty(G,X)$).
5. Подпространство $C_{b,u} = C_{b,u}(G,X) \subset C_b$ равномерно непрерывных функций из C_b.

6. Подпространство $C_0 = C_0(G,X) \subset C_{b,u}$ непрерывных исчезающих на бесконечности функций.
7. Пространства $C^k = C^k(G,X)$, $k \in \mathbb{N}$, функций, k раз непрерывно дифференцируемых, с ограниченной k-й производной и нормой $\|x\|_{(k)} = \|x\|_\infty + \|x^{(k)}\|_\infty$.

В дальнейшем символом $\mathscr{F}(G,X)$ будем обозначать однородное пространство.

Символом $\mathscr{F}_c(G,X)$ обозначим замкнутое подпространство из $\mathscr{F}(G,X)$ вида $\mathscr{F}_c(G,X) = \{x \in \mathscr{F}(G,X) :$ функция $g \mapsto S(g)x : G \to \mathscr{F}(G,X)$ непрерывна$\}$. Через $\mathscr{F}_0(G,X)$ будет обозначаться наименьшее замкнутое подпространство из $\mathscr{F}(G,X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathscr{F}(G,X)$, $\varphi \in C_b(G,X)$, где функция φ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp}\varphi$ — компакт.

Непосредственно из определения 1 следует, что любое однородное пространство является банаховыми $L^1(G)$-модулем, в котором действует группа S сдвигов вида (1) и модульная структура задается сверткой функций (2). Таким образом, для исследования этих пространств можно применить спектральную теорию банаховых модулей над алгеброй $L^1(G)$ (см. [6, 7]). В частности, из этого следует, что пространства $\mathscr{F}_c(G,X)$ совпадают с пространствами S-непрерывных векторов (см. [2]).

2. Почти периодические векторы в банаховых модулях

Здесь приводится ряд используемых при доказательстве основных теорем статьи понятий и результатов из спектральной теории банаховых модулей (см. [4–7]) над банаховой алгеброй $L^1(G)$ измеримых суммируемых на локально компактной абелевой группе G функций. Умножение в алгебре $L^1(G)$ осуществляется с помощью операции свертки $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g-s)f_2(s)ds$, $g \in G$, $f_1, f_2 \in L^1(G)$, и полагается $\|f\|_1 = \int_G f(g)dg$ для $f \in L^1(G)$.

Пусть $T : G \to End\,\mathscr{Y}$ — сильно непрерывное изометрическое представление группы G операторами из банаховой алгебры $End\,\mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}$ — комплексное банахово пространство. Тогда формулой

$$fx = \int_G f(g)T(-g)x\,dg, \quad f \in L^1(G), \quad x \in \mathscr{Y}, \tag{3}$$

задается на $\mathscr{Y}$ структура банахова $L^1(G)$-модуля. Учитывая формулу (3), далее модуль $\mathscr{Y}$ будет иногда обозначаться через $(\mathscr{Y}, T)$.

Пусть $\widehat{G}$ — двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G. Далее через $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G) : \widehat{f}(\gamma) = \int_G f(g)\gamma(-g)\,dg$, $\gamma \in \widehat{G}$. Если $G = \mathbb{Z}$, то $\widehat{G}$ канонически отождествляется с $\mathbb{T}$ и преобразование Фурье последовательности (функции) $f \in L^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(\mathbb{Z})$ имеет вид $\widehat{f}(\gamma) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\gamma^{-n}$, $\gamma \in \mathbb{T}$.

Определение 2. *Спектром Бёрлинга вектора* x из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{Y}, T)$ называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(x,T)$ характеров из группы $\widehat{G}$, являющееся дополнением к множеству

$$\{\gamma \in \widehat{G} : \text{существует } f \in L^1(G) \text{ такая, что } \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ и } fx = 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x) = \{\gamma \in \widehat{G} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L^1(G) \text{ с } \widehat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Имеют место следующие свойства спектра векторов из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{Y}, T)$ (см. [4, 5]).

Лемма 1. *Для любых $f \in L^1(G)$ и $x \in (\mathscr{Y}, T)$ справедливы свойства:*

1) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\widehat{G}$, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\Lambda(fx) \subset (supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

3) $\Lambda(Bx) \subset \Lambda(x)$ для любого оператора $B \in End\, \mathscr{Y}$, перестановочного с операторами $T(g)$, $g \in G$;

4) $fx = 0$, если $(supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно, и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\gamma_0\}$ — одноточечное множество из $\widehat{G}$ тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(g)x = \gamma_0(g)x$, $g \in G$, и $x \neq 0$ (является собственным вектором представления T, отвечающим характеру γ_0).

В следующем определении почти периодических векторов и их свойствах мы следуем [6].

Определение 3. Вектор x из банахова $L^1(G)$-модуля T называется *почти периодическим*, если его орбита $\{T(g)x, \ \ g \in G\}$ предкомпактна в $\mathscr{Y}$.

Множество $AP\mathscr{Y} = AP(\mathscr{Y}, T)$ почти периодических векторов из $\mathscr{Y}$ образует замкнутый подмодуль из $\mathscr{Y}$.

Лемма 2. *Среди линейных операторов, действующих в подмодуле $AP(\mathscr{Y}, T)$, существует и единственен оператор среднего значения $\mathscr{J} : AP(\mathscr{Y}, T) \to$ $\to AP(\mathscr{Y}, T)$, обладающий следующими свойствами:*

1) $\mathscr{J}$ — проектор и $\|\mathscr{J}\| = 1$, если $\mathscr{J} \neq 0$;

2) $\mathscr{J}(fx) = \widehat{f}(0)\mathscr{J}x$, $T(g)\mathscr{J}x = \mathscr{J}(T(g)x) = \mathscr{J}x$ для всех $f \in L^1(G)$, $g \in G$ и $x \in \mathscr{Y}$;

3) $\mathscr{J}x$ лежит в замыкании выпуклой оболочки орбиты вектора x.

Вектор $\mathscr{J}x$ назовем *средним значением* вектора $x \in AP(\mathscr{Y}, T)$.

Каждому почти периодическому вектору x поставим в соответствие формальный ряд

$$x \sim \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{x}(\gamma). \tag{4}$$

Ряд (4) называется *рядом Фурье* вектора x. Функция $\widehat{x} : \widehat{G} \to AP(\mathscr{Y}, T)$ задается формулой

$$\widehat{x}(\gamma) = T_\gamma x, \quad \gamma \in \widehat{G}, \tag{5}$$

где $T_\gamma x$ — среднее значение вектора x из $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{X}, T_\gamma)$, где $T_\gamma(g) =$ $= T(g)\gamma(-g)$. Ясно, что $x \in AP(\mathscr{Y}, T_\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$. Отметим, что $T(g)\widehat{x}(\gamma) = \gamma(g)\widehat{x}(\gamma)$, $g \in G$, $\gamma \in \widehat{G}$.

Множество

$$\sigma_B(x) = \sigma_B(x, T) = \{\gamma \in \widehat{G} : \widehat{x}(\gamma) \neq 0\}$$

не более чем счетно и называется *спектром Бора* вектора x. Поскольку каждый вектор fx, где $f \in L^1(G)$ и $x \in \mathscr{Y}$, имеет ряд Фурье вида

$$fx \sim \sum_{\gamma \in \sigma_B(x)} \widehat{f}(\gamma)\widehat{x}(\gamma),$$

то $\Lambda(x) = \overline{\sigma_B(x)}$ и ряд Фурье любого вектора $x \in AP(\mathscr{Y}, T)$ определяется однозначно.

Определение 4. Пусть $\gamma_0 \in \widehat{G}$. Ограниченная направленность функций (f_α) из алгебры $L^1(G)$ (α пробегает некоторое направленное множество Ω) называется γ_0-направленностью, если выполнены следующие условия:

1) $\widehat{f_\alpha}(\gamma_0) = 1$ для любого $\alpha \in \Omega$;

2) $\lim f_\alpha * f = 0$ для любой $f \in L^1(G)$ с $\widehat{f}(\gamma_0) = 0$.

Примерами γ_0-направленностей в алгебре $\ell^1(\mathbb{Z})$ являются направленности $g_\alpha(n) = f_\alpha(n)\gamma_0^n, \psi_k(n) = \varphi_k(n)\gamma_0^n$, где 1-направленности (f_α) и (φ_k) определены формулами

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} \alpha(1+\alpha)^{-n}, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0, \quad \alpha \in \Omega_1 = (0, \infty), \end{cases}$$

$$\varphi_k(n) = \begin{cases} k^{-1}, & 0 \leqslant n \leqslant k-1, \\ 0, & n \geqslant k, \qquad\qquad k \in \Omega_2 = \mathbb{N}. \end{cases}$$

При этом множество Ω_1 направлено по убыванию чисел, а Ω_2 — по возрастанию.

Определение 5. Характер γ_0 из спектра Бёрлинга вектора x_0 из банахова $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{Y}, T)$ называется *эргодической точкой спектра вектора* x_0, если для некоторой γ_0-направленности f_α из алгебры $L^1(G)$ существует $lim f_\alpha x_0$.

Из эргодических теорем (см. [6, 8]) следует, что если γ_0 — эргодическая точка из $\Lambda(x_0)$, то предел в определении 5 не зависит от выбора γ_0-направленности (f_α). Множество эргодических точек вектора x_0 обозначим символом $\Lambda_{erg}(x_0)$. Отметим еще, что если $x \in AP(\mathscr{Y}, T)$ (x — почти периодический вектор), то $\Lambda_{erg}(x) = \Lambda(x)$ и $\widehat{x}(\gamma) = lim f_\alpha x \neq 0$ для любого $\gamma \in \sigma_B(x)$ (см. (3), (4) и (5)) и любой γ-направленности (f_α) из алгебры $L^1(G)$.

Если $\mathscr{Y}_0$ — замкнутый подмодуль из $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{Y}, T)$, инвариантный относительно всех операторов $T(g), g \in G$, то фактор-пространство $\mathscr{Y}/\mathscr{Y}_0$ также наделяется структурой банахова $L^1(G)$-модуля по фактор-представлению

$$\widehat{T} : G \to End\, \mathscr{Y}/\mathscr{Y}_0, \quad \widehat{T}(g)\widetilde{x} = \widetilde{T(g)x} = T(g)x + \mathscr{Y}_0,$$

т.е. $f\widetilde{x} = \widetilde{fx} = fx + \mathscr{Y}_0$ для любого $x \in \mathscr{Y}$ и любой $f \in L^1(G)$. Спектр Бёрлинга $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(\widetilde{x}, \widehat{T})$ класса (эквивалентности) $\widetilde{x} = x + \mathscr{Y}_0$, содержащего вектор x, обозначим символом $\Lambda(x, \mathscr{Y}_0)$ и назовем *множеством непринадлежности* вектора x подмодулю $\mathscr{Y}_0$. В частности, если $\mathscr{Y}_0 = AP(\mathscr{Y}, T)$ — подмодуль почти периодических векторов, то множество $\Lambda(x, \mathscr{Y}_0)$ назовем *множеством не почти периодичности* вектора $x \in \mathscr{Y}$. Приводимые понятия использовались в статьях [6, 8]. Здесь существенно используется (см. [8])

Теорема 1. *Пусть для вектора x из $L^1(G)$-модуля $(\mathscr{Y}, T)$ множество не почти периодичности $\Lambda(x, AP\mathscr{Y})$ не более чем счетно. Для его почти периодичности необходимо и достаточно, чтобы любая предельная точка множества $\Lambda(x, AP\mathscr{Y})$ была эргодической для вектора x. В частности, если множество $\Lambda(x, AP\mathscr{Y})$ не имеет предельных точек, то $x \in AP(\mathscr{Y}, T)$.*

3. Почти периодические на бесконечности функции

Пусть $\mathscr{F}(G, X)$ — однородное пространство определенных на группе G функций со значениями в банаховом пространстве X. В нем действует группа сдвигов функций

$$S : G \to End\, \mathscr{F}(G, X), \quad (S(g)x)(s) = x(s + g), \quad s, g \in G, \quad x \in \mathscr{F}(G, X).$$

Определение 6. Функция $x \in \mathscr{F}_c(G, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для любого $g \in G$ функция $S(g)x - x$ принадлежит $\mathscr{F}_0(G, X)$.

Множество функций из $\mathscr{F}(G, X)$, медленно меняющихся на бесконечности, обозначим символом $\mathscr{F}_{sl,\infty}(G, X)$. Отметим, что оно образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{F}(G, X)$, инвариантное относительно группы сдвигов S.

Пусть $\mathscr{Y} = \mathscr{F}(G, X)/\mathscr{F}_0(G, X)$. В $\mathscr{Y}$ действует сильно непрерывная группа изометрий

$$T(g)\widetilde{x} = \widetilde{S(g)x} = S(g)x + \mathscr{F}_0(G, X), \quad g \in G, \quad x \in \mathscr{F}(G, X).$$

Следовательно, фактор-пространство $\mathscr{Y}$ наделяется структурой банахова $L^1(G)$-модуля по представлению $T : G \to End\, \mathscr{Y}$ (см. формулу (3)).

Определение 7. Функция $x \in \mathscr{F}_c(G, X)$ называется *почти периодической на бесконечности*, если класс $\widetilde{x}$ принадлежит $AP(\mathscr{Y}, T)$, где $\mathscr{Y} = \mathscr{F}(G, X)/\mathscr{F}_0(G, X)$.

Множество функций из $\mathscr{F}(G, X)$, почти периодических на бесконечности, обозначаемое символом $AP_\infty\mathscr{F}(G, X)$, образует замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{F}(G, X)$, инвариантное относительно группы сдвигов S. Почти периодические на бесконечности функции из $\mathscr{F}(\mathbb{R}, X)$ рассматривались в [3].

Определение почти периодической на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}_+, X)$) было дано в [4] для функций из $C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и использовалось для описания асимптотического поведения ограниченных полугрупп операторов класса C_0. Следуя Г. Бору, можно дать другое (эквивалентное) определение почти периодической на бесконечности функции, используя понятие ε-периода (на бесконечности).

Пусть $\varepsilon > 0$. Элемент g_0 из группы G называется *ε-периодом на бесконечности функции* $x \in \mathscr{F}(G, X)$, если существует компакт $K = K_\varepsilon \subset G$ такой, что $\sup\limits_{g \in G \setminus K} \|x(g + g_0) - x(g)\| < \varepsilon$. Множество ε-периодов на бесконечности функции x обозначим символом $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$.

Определение 8. Функцию $x \in \mathscr{F}(G, X)$ назовем *почти периодической на бесконечности*, если множество $\Omega_\infty(\varepsilon, x)$ относительно плотно в G, т.е. существует компактная окрестность $V = V_\varepsilon$ нуля группы G такая, что $(g + V_\varepsilon) \cap \Omega_\infty(\varepsilon, x) \neq \varnothing$ для любого $g \in G$.

Определение 9. Пусть $x \in AP_\infty \mathscr{F}(G,X)$ и ряд

$$\widetilde{x} \sim \sum_{n \geqslant 1} \widetilde{y_n}, \quad \sigma_B(\widetilde{x}) = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots\}, \quad \Lambda(\widetilde{y_n}) = \{\gamma_n\},$$

является рядом Фурье класса эквивалентности $\widetilde{x}$ из соответствующего фактор-пространства $AP(\mathscr{Y}, T)$ почти периодических векторов из $\mathscr{Y}$ (см. формулу (4)). Любой ряд вида

$$x \sim \sum_{n \geqslant 1} x_n, \tag{6}$$

где x_n, $n \geqslant 1$, — некоторые представители классов $\widetilde{y_n}$, называется *рядом Фурье* функции x.

Из последнего определения видно, что ряд Фурье функции из пространства $AP_\infty \mathscr{F}(G,X)$ определяется неоднозначно.

Лемма 3. *Функция $x \in \mathscr{F}_c(G,X)$ является медленно меняющейся на ∞ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

1) $\Lambda(\widetilde{x}) \subset \{0\}$;

2) $f\widetilde{x} = \widehat{f}(0)\widetilde{x}$ для любой функции $f \in L^1(G)$, где $\widetilde{x}$ — класс эквивалентности из $L^1(G)$-модуля $\mathscr{Y}$.

Доказательство. Поскольку $S(\tau)x - x \in \mathscr{F}_0(G,X)$, то для любой функции $f \in L^1(G)$ с $\widehat{f}(0) = 1$ функция $f * x - x = \int\limits_G f(g)(S(-g)x - x)\, dg$ принадлежит $\mathscr{F}_0(G,X)$, и поэтому $\Lambda(\widetilde{x}) \subset \{0\}$. Из свойства 5) леммы 1 и формулы (5) получаем, что $f\widetilde{x} = \widehat{f}(0)\widetilde{x}$.

Пусть теперь выполнено одно из эквивалентных свойств 1), 2). Тогда в силу свойства 5) леммы 1 получаем, что $\widetilde{S}(g)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, т.е. $S(g)x - x \in \mathscr{F}_0(G,X)$ для любого $g \in G$. □

Из лемм 1 и 3 следует

Лемма 4. *Пусть $x \in \mathscr{F}(G,X)$. Следующие свойства эквивалентны:*

1) $\Lambda(\widetilde{x}) = \{\gamma_0\}$ — одноточечное множество из $\widehat{G}$;

2) функция $y = \gamma_0^{-1}x$ является медленно меняющейся на бесконечности;

3) $f\widetilde{x} = \widehat{f}(\gamma_0)\widetilde{x}$ для любой функции f из алгебры $L^1(G)$.

Далее символом $\Lambda_\infty(x)$, где $x \in \mathscr{F}(G,X)$, обозначается спектр Бёрлинга $\Lambda(\widetilde{x})$ класса $\widetilde{x} = x + \mathscr{F}_0(G,X)$.

Из лемм 3 и 4 следует, что каждая функция x_n из ряда Фурье (6) представима в виде

$$x_n = x_n^0 \gamma_n, \quad n \geqslant 1,$$

где $x_n^0 \in \mathscr{F}(G,X)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Следовательно, имеет место (используется [6, теорема 3.67])

Теорема 2. *Для того чтобы функция x из однородного пространства $\mathscr{F}(G,X)$ была почти периодической на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали функции $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{F}(G,X)$, представимые в виде $x_k = x_k^0 \gamma_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, где γ_k — характер из соответствующей группы и функции $x_k^0 \in \mathscr{F}_{sl,\infty}(G,X)$ такие, что $\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon$.*

При этом характеры γ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, могут быть взяты из множества $\Lambda_\infty(x)$.

В условиях следующей теоремы символом $AP(G,X)$ обозначается пространство почти периодических функций, определенных на группе G, со значениями в банаховом пространстве X.

Теорема 3. *Для того чтобы функция* $x \in AP_\infty\mathscr{F}(G,X)$ *была представима в виде* $x = y + x_0$, *где* $x_0 \in \mathscr{F}_0(G,X)$ *и* $y \in AP(G,X)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая точка множества* $\Lambda_\infty(x) = \Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda(x + \mathscr{F}_0(G,X))$ *была эргодической точкой функции* x.

Доказательство. Поскольку каждая точка из $\Lambda_\infty(x)$ для $x \in AP_\infty(\mathscr{Y})$ является эргодической для y и x_0 из представления x, то необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность условия следует из определения эргодической точки и теорем 1, 2. При этом используется свойство 4) из леммы 2. □

Полученные в данной работе результаты являются расширением некоторых результатов, полученных в [2], на однородные пространства функций, определенные на локально компактной абелевой группе.

Список литературы

1. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Известия РАН. Серия математическая. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. https://doi.org/10.4213/im2643
2. *Баскаков А. Г., Струков В. Е., Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических и почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств и гармоничных распределений // Математический сборник. 2019. Т. 210, № 10. С. 37–90. https://doi.org/10.4213/sm9147
3. *Струков В. Е., Струкова И. И.* О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия : Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 3. С. 254–264. https://doi.org/10.18413/2075-4639-2018-50-3-254-264
4. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи математических наук. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. https://doi.org/10.4213/rm9505
5. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. https://doi.org/10.4213/im639
6. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 9. С. 3–151. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0286-4
7. *Хьюитт Э., Росс К.А.* Абстрактный гармонический анализ : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1975. 899 с.
8. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций // Математический сборник. 1984. Т. 124 (166), № 1 (5). С. 68–95.

References

1. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 215–278. https://doi.org/10.1070/IM2009v073n02ABEH002445

2. Baskakov A. G., Strukov V. E., Strukova I. I. Harmonic analysis of functions in homogeneous spaces and harmonic distributions that are periodic or almost periodic at infinity. *Sbornik: Mathematics*, 2019, vol. 210, no. 10, pp. 1380–1427. http://dx.doi.org/10.1070/SM9147
3. Strukov V. E., Strukova I. I. About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematis & Physis*, 2018, vol. 50, no. 3, pp. 254–264 (in Russian). https://doi.org/10.18413/2075-4639-2018-50-3-254-264
4. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Mathematical Surveys,* 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. https://doi.org/10.1070/RM2013v068n01ABEH004822
5. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000535
6. Baskakov A. G Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0286-4
7. Hewitt E., Ross K. A. *Abstract Harmonic Analysis*. Vol. 2. Springer, 1963. 771 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1975. 899 p.).
8. Baskakov A. G. Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1985, vol. 52, iss. 1, pp. 63–90. https://doi.org/10.1070/SM1985v052n01ABEH002878

Поступила в редакцию / Received 30.04.2020
Принята к публикации / Accepted 26.03.2021
Опубликована / Published 30.11.2021