

## МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 142–151  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 142–151

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

Научная статья

УДК 539.3

### К вопросу об аппроксимации класса $C^{(0)}$ компонент физических величин в криволинейных системах координат

Н. А. Гуреева<sup>1</sup>, Р. З. Киселева<sup>2✉</sup>, Ю. В. Клочков<sup>2</sup>,  
А. П. Николаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

<sup>2</sup>Волгоградский государственный аграрный университет, Россия, 400002, г. Волгоград, Университетский проспект, д. 26

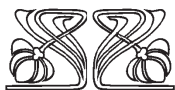
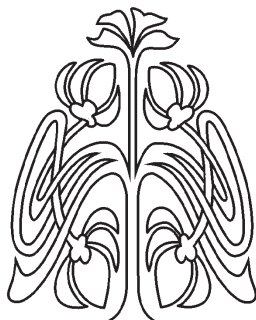
**Гуреева Наталья Анатольевна**, доктор физико-математических наук, доцент, доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

**Киселева Румия Зайдуллаевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

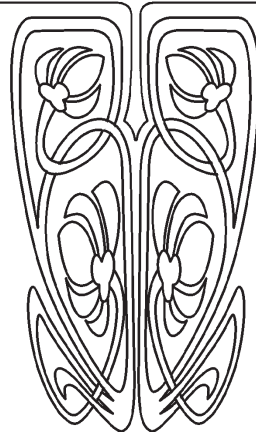
**Клочков Юрий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

**Николаев Анатолий Петрович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676

**Аннотация.** В численных методах расчета прочности техно-сферных объектов широко используются аппроксимирующие выражения искомых величин через их узловые значения. Теория аппроксимирующих функций скалярных величин в настоящее время развита достаточно полно, но ее непосредственное использование в криволинейных системах координат для аппроксимации компонент векторов перемещений и для компонент тензоров напряжений может приводить к значительной некорректности при существенных градиентах кривизны и смещениях рассчитываемого объекта как жесткого целого из-за



Научный  
отдел





отсутствия в аппроксимирующих выражениях параметров используемой в расчете криволинейной системы координат. В настоящей работе с целью получения аппроксимирующих выражений для отдельных компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента в форме шестигранника использованы известные аппроксимирующие функции непосредственно для вектора перемещения через векторы перемещений узловых точек. В результате координатных преобразований, а именно в использовании матричных выражений базисных векторов узловых точек конечного элемента через базисные векторы его внутренней точки, получаются аппроксимирующие выражения каждой компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через все компоненты векторов перемещений узловых точек конечного элемента. С целью получения аппроксимирующих выражений для компонент тензора напряжений внутренней точки конечного элемента используется известная аппроксимирующая функция непосредственно для выражения тензора напряжений внутренней точки конечного элемента через тензоры напряжений в его узловых точках. Координатные преобразования заключаются в использовании матричных выражений диадных произведений базисных векторов узловых точек через диадные произведения базисного вектора внутренней точки конечного элемента. В результате координатного преобразования определяется аппроксимирующее выражение каждой компоненты тензора напряжения в окрестности внутренней точки конечного элемента через все компоненты тензоров напряжений в узловых точках. Полученные аппроксимирующие выражения для компонент вектора перемещения и компонент тензора напряжения с использованием матричных выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента, а также через матричные выражения их диадных произведений позволяют учитывать параметры используемой криволинейной системы координат, что приводит к решению общеизвестной в МКЭ проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела.

**Ключевые слова:** вектор перемещения, тензор второго ранга, криволинейная система координат, базисные векторы, аппроксимирующие функции

**Для цитирования:** Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Клочков Ю. В., Николаев А. П. К вопросу об аппроксимации класса  $C^{(0)}$  компонент физических величин в криволинейных системах координат // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 142–151. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## On the approximation of class $C^{(0)}$ components of physical quantities in curved coordinate systems

N. A. Gureeva<sup>1</sup>, R. Z. Kiseleva<sup>2</sup>✉, Yu. V. Klochkov<sup>2</sup>, A. P. Nikolaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, GSP-3 Moscow 125993, Russia

<sup>2</sup>Volgograd State Agrarian University, 26 Universitetskiy Prospekt, Volgograd 400002, Russia

**Natalia A. Gureeva**, Natalya-gureeva@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3496-2008>, AuthorID: 306195

**Rumiya Z. Kiseleva**, rumia1970@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-3047-5256>, AuthorID: 573150

**Yuri V. Klochkov**, Klotchkov@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1027-1811>, AuthorID: 161677

**Anatoly P. Nikolaev**, anpetr40@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7098-5998>, AuthorID: 161676



**Abstract.** In numerical methods for calculating the strength of technospheric objects approximating expressions of the desired values in terms of their nodal values are widely used. The theory of approximating functions of scalar quantities is currently developed quite fully, but its direct use in curvilinear coordinate systems for approximating the components of displacement vectors and for the components of stress tensors can lead to significant inaccuracies with significant gradients of curvature and displacements of the calculated object as a rigid whole due to the lack of parameters in the approximating expressions of the curvilinear coordinate system used in the calculation. In this paper, in order to obtain approximating expressions for the individual components of the displacement vector of a finite element internal point in the form of a hexagon, the known approximating functions directly for the displacement vector through the displacement vectors of the nodal points are used. As a result of coordinate transformations, namely, using matrix expressions of the basis vectors of a finite element nodal points through the basis vectors of its internal point approximating expressions of each component of the displacement vector of the finite element internal point through all components of the displacement vectors of the finite element nodal points are obtained. In order to obtain approximating expressions for the components of the stress tensor of a finite element inner point a well-known approximating function is used directly to express the stress tensor of a finite element inner point through the stress tensors at its nodal points. Coordinate transformations consist in using matrix expressions of the dyad products of the node points basis vectors through the dyad products of the basis vector of the finite element inner point. As a result of the coordinate transformation, the approximating expression of each component of the stress tensor in the vicinity of the inner point of the finite element is determined through all the components of the stress tensors at the nodal points. The obtained approximating expressions for the components of the displacement vector and the components of the stress tensor using matrix expressions of the nodal points basis vectors through the basis vectors of the finite element internal point as well as through the matrix expressions of their dyad products allow taking into account the parameters of the curved coordinate system used. That leads to the solution of the well-known problem in the FEM which takes into account the displacement of the finite element as a solid.

**Keywords:** displacement vector, tensor of the second rank, curvilinear coordinate system, basis vectors, approximating functions

**For citation:** Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. On the approximation of class  $C^{(0)}$  components of physical quantities in curved coordinate systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-142-151>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Криволинейные системы координат широко используются в теории механики деформируемого твердого тела [1–3]. Криволинейные системы координат используются и в численных методах определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций инженерных сооружений различного назначения. Среди численных методов расчета таких конструкций особенно широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) как в формулировке метода перемещений [4–7], так и в смешанной формулировке [6–9].

Основными операциями использования МКЭ при определении напряженно-деформированного состояния нагруженного твердого тела являются получение матрицы жесткости конечного элемента и вектора его узловых нагрузок, что выполняется на



основе использования аппроксимирующих функций, позволяющих выразить искомые величины внутренней точки конечного элемента через соответствующие им узловые неизвестные.

При расчете прочности тонкостенных конструкций на основе смешанного МКЭ в качестве узловых неизвестных конечных элементов принимаются перемещения и напряжения. Появляется необходимость аппроксимации искомых величин МКЭ в смешанной формулировке (перемещений и напряжений в окрестности внутренней точки конечного элемента) через их узловые значения при учете параметров используемой криволинейной системы координат.

Представленная работа относится к математической операции основного раздела МКЭ, где традиционно при расчетах в криволинейных системах координат для аппроксимации искомых величин через их узловые неизвестные используются зависимости как для скалярных величин, когда каждая искомая величина аппроксимируется через узловые значения только этой же величины, что приводит к некорректным результатам при значительных кривизнах границ конструкции и смещениях конечных элементов как твердого тела.

В настоящей работе представлены корректные алгоритмы получения в криволинейных системах координат аппроксимирующих выражений компонент вектора перемещения произвольной точки конечного элемента через компоненты векторов перемещении узловых точек конечного элемента. Разработаны также аппроксимирующие выражения для компонент тензора второго ранга через компоненты тензоров второго ранга узловых точек.

## 1. Базисные векторы точек конечного элемента

Радиус-вектор произвольной точки  $M$  оболочки определяется выражением

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \tau \vec{a}_3^0 = x^m(\theta^n) \vec{i}_m, \quad (1)$$

где  $\vec{R}^0 = x^{0m}(u, v) \vec{i}_m$  — радиус-вектор соответствующей точки срединной поверхности;  $u, v$  — криволинейные координаты срединной поверхности [10];  $x^{0m}$  — декартовы координаты срединной поверхности;  $\vec{a}_3^0 = \frac{\vec{R}_{,u}^0 \times \vec{R}_{,v}^0}{|\vec{R}_{,u}^0 \times \vec{R}_{,v}^0|} = a_3^m(u, v) \vec{i}_m$  — нормаль к срединной поверхности;  $-\frac{h}{2} \leq \tau \leq \frac{h}{2}$  — расстояние от срединной поверхности до рассматриваемой точки ( $h$  — толщина оболочки);  $\theta^1 = u$ ;  $\theta^2 = v$ ;  $\theta^3 = \tau$  — криволинейные координаты произвольной точки рассматриваемого тела;  $x^m(u, v, \tau) = x^{0m}(u, v) + \phi(a_3^m(u, v), \tau)$  — декартовы координаты произвольной точки тела;  $\vec{i}_m$  — орты декартовой системы координат.

При прочностном расчете оболочки она представляется системой конечных элементов, соединенных между собой в узлах. В качестве конечного элемента полагается шестигранник с восемью узловыми точками  $w = i, j, k, l, m, n, p, h$ .

Для каждого шестигранного конечного элемента векторы локальных базисов внутренних и узловых точек определяются дифференцированием (1) по криволинейным координатам  $\theta^k$

$$\vec{g}_k = \vec{R}_{,k} = x^m(\theta^n)_{,k} \vec{i}_m, \quad \vec{g}_k^w = x^{mw}(\theta^{nw})_{,k} \vec{i}_m, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $w = i, j, k, l, m, n, p, h$  — узлы конечного элемента.

На основе (2) формируются матричные соотношения для внутренней и узловых точек конечного элемента

$$\{\vec{g}\} = [m]\{\vec{i}\}, \quad \{\vec{g}^w\} = [m^w]\{\vec{i}\}, \quad w = i, j, k, l, m, n, p, h, \quad (3)$$



где  $\{\vec{g}\}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3\}$  — строка векторов локального базиса точки  $M$ ;  $\{\vec{g}^w\}^T = \{\vec{g}_1^w \vec{g}_2^w \vec{g}_3^w\}$  — строка векторов локального базиса узловой точки  $w$  шестигранника;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}_1 \vec{i}_2 \vec{i}_3\}$  — строка ортов декартовой системы координат.

Используя соотношения (3), можно получить матричные выражения базисных векторов узловой точки  $w$  через базисные векторы произвольной точки  $M$  шестигранника

$$\{\vec{g}^w\}_{3 \times 1} = [m^w]_{3 \times 3} [m]_{3 \times 3}^{-1} \{\vec{g}\}_{3 \times 1} = [z^w]_{3 \times 3} \{\vec{g}\}_{3 \times 1}. \quad (4)$$

## 2. Аппроксимация компонент вектора перемещения

Для выполнения численного интегрирования по объему конечного элемента шестигранной формы с узлами  $i, j, k, l, m, n, p$  и  $h$  он отображается на локальный куб, локальные координаты которого изменяются в пределах  $-1 \leq \xi \eta \zeta \leq 1$ . Скалярные величины, относящиеся к точке  $M$  шестигранника, аппроксимируются через значения в узловых точках  $w$  конечного элемента трилинейными соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^i + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^j + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^k + \\ & + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1-\zeta}{2} \lambda^l + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^m + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^n + \\ & + \frac{1+\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^p + \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\eta}{2} \frac{1+\zeta}{2} \lambda^h = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_{1 \times 8}^T \{\lambda_y\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\{\lambda_y\}_{8 \times 1}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$  — строка узловых значений скалярной величины  $\lambda$  в узлах шестигранника.

К скалярным величинам точки  $M$  шестигранника относятся, например, значения криволинейных координат  $\theta^1 \theta^2 \theta^3$  и температура  $t$ .

Для вектора перемещения внутренней точки конечного элемента, представляемого выражением

$$\vec{V} = v^i \vec{g}_i = \{\vec{g}\}_{1 \times 3}^T \{v\}_{3 \times 1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

аппроксимацию [5–7] компонент  $v^i$  через узловые неизвестные принимают выражением (5) ( $\lambda = v^i$ ;  $\{\lambda_y\}^T = \{v_y^i\}^T$ ). Недостатком этой аппроксимации является отсутствие в аппроксимирующих выражениях  $\{f(\xi \eta \zeta)\}^T$  параметров используемой криволинейной системы координат.

Для устранения этого недостатка предлагается в аппроксимирующем выражении (5) под символом  $\lambda$  понимать вектор перемещения внутренней точки конечного элемента, а под символом  $\lambda^w$  понимать вектор перемещения узловой точки  $w$  и записать аппроксимирующее выражение (5) в векторной форме

$$\vec{V} = \{f\}_{1 \times 8}^T \{\vec{V}_y\}_{8 \times 1}, \quad (7)$$

где  $\{\vec{V}_y\}_{1 \times 8}^T = \{\vec{V}^i \vec{V}^j \vec{V}^k \vec{V}^l \vec{V}^m \vec{V}^n \vec{V}^p \vec{V}^h\}$  — строка векторов в узлах шестигранника;

$\vec{V}^w = v^{iw} \vec{g}_i^w$  — вектор перемещения узловой точки  $w$ .

Для выполнения координатного преобразования столбец узловых векторов шестигранника представляется матричным выражением

$$\{\vec{V}_y\}_{8 \times 1} = [\vec{L}]_{8 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1}, \quad (8)$$



где  $\{v_y\}_{1 \times 24}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^{3i} v^{1j} v^{2j} v^{3j} \dots v^{1h} v^{2h} v^{2h}\}$ ,

$$[\vec{L}]_{8 \times 24} = \begin{bmatrix} \vec{g}_1^i & \vec{g}_2^i & \vec{g}_3^i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vec{g}_1^j & \vec{g}_2^j & \vec{g}_3^j & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vec{g}_1^h & \vec{g}_2^h & \vec{g}_3^h \end{bmatrix}.$$

В матрице  $[\vec{L}]$  точками обозначены ее нулевые элементы.

С учетом (8) аппроксимирующее выражение (7) запишется в матричном виде

$$\vec{V} = \{f\}_{1 \times 8}^T [\vec{L}]_{8 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1} = \left\{ f_1 \{ \vec{g}^i \}_{1 \times 3}^T : f_2 \{ \vec{g}^j \}_{1 \times 3}^T : \dots : f_8 \{ \vec{g}^h \}_{1 \times 3}^T \right\}_{24 \times 1} \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (9)$$

Принимая во внимание (4), из соотношения (9) получается матричное соотношение

$$\vec{V} = \{ \vec{g} \}_{1 \times 3}^T \left[ f_1 [z^i]_{1 \times 3}^T : f_2 [z^j]_{1 \times 3}^T : \dots : f_8 [z^h]_{1 \times 3}^T \right] = \{ \vec{g} \}_{1 \times 3}^T [H]_{3 \times 24} \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (10)$$

Представляя левую часть (10) выражением (6), можно найти аппроксимирующие выражения для компонент вектора внутренней точки конечного элемента

$$v^i = \{h_i\}_{1 \times 24}^T \{v_y\}_{24 \times 1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где  $\{h_i\}_{1 \times 24}^T$  определяется  $i$ -й строкой матрицы  $[H]_{3 \times 24}$ .

Как видно, в аппроксимирующем выражении (11) компоненты  $v^i$  вектора перемещения через матрицу  $[z]$  учитываются параметры используемой криволинейной системы координат. Кроме того, каждая компонента  $v^i$  вектора перемещения определяется через все компоненты  $v^{1w}, v^{2w}, v^{3w}$  векторов перемещений узловых точек конечного элемента.

Если в аппроксимирующем выражении (10) положить матрицу  $[z^w]_{3 \times 3}$  единичной, что означает равенство базисных векторов узловых точек базисным векторам внутренней точки конечного элемента при их единичной длине, то аппроксимирующие выражения для  $v^i$  примут вид зависимостей (5), где каждая компонента вектора перемещения аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты. Так как в криволинейной системе координат матрица  $[z^w]_{3 \times 3}$  не является единичной, то некорректность использования аппроксимации (5) величин  $v^i$  очевидна.

### 3. Аппроксимация компонент тензора второго ранга

Если физическая величина в точке  $M$  шестигранника является тензором второго ранга, определяемым выражением

$$\tilde{T} = T^{ij} \vec{g}_i \vec{g}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

то аппроксимация компонент этой величины выражением (5) ( $\lambda = T^{ij}$ ,  $\{\lambda_y\}_{1 \times 8}^T = \{T_y^{ij}\}_{1 \times 8}^T$ ) [6, 7] также будет некорректна в криволинейной системе координат.

Для получения корректных искомых соотношений следует в аппроксимирующих выражениях (5) под символом  $\lambda$  полагать тензор второго ранга в базисе внутренней



точки конечного элемента, а под символом  $\lambda^w$  — тензор второго ранга в базисе узловой точки конечного элемента и записать соотношение (5) в виде

$$\tilde{T} = \{f\}_{1 \times 8}^T \{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1}, \quad (13)$$

где  $\{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1}^T = \{\tilde{T}^i \tilde{T}^j \tilde{T}^k \tilde{T}^l \tilde{T}^m \tilde{T}^n \tilde{T}^p \tilde{T}^h\}$  — строка тензоров узловых точек конечного элемента;  $\tilde{T}^w = T^{ijw} \vec{g}_i^w \vec{g}_j^w$  — тензор узловой точки  $w$  конечного элемента.

Для координатного преобразования соотношения (13) тензор второго ранга в точке  $M$  можно представить матричным произведением

$$\tilde{T} = \{T\}_{1 \times 9}^T \{\vec{g}\}_{9 \times 1} = \{\vec{g}\}_{9 \times 1}^T \{T\}_{9 \times 1}, \quad (14)$$

где  $\{T\}_{1 \times 9}^T = \{T^{11} T^{12} T^{13} T^{21} T^{22} T^{23} \dots T^{31} T^{32} T^{33}\}$  — строка компонент тензора второго ранга;  $\{\vec{g}\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_1 : \vec{g}_1 \vec{g}_2 : \vec{g}_1 \vec{g}_3 : \dots : \vec{g}_3 \vec{g}_1 : \vec{g}_3 \vec{g}_2 : \vec{g}_3 \vec{g}_3\}$  — строка диадных произведений базисных векторов точки  $M$ .

Для узловой точки  $w$  тензоры второго ранга определяются матричными выражениями

$$\tilde{T}^w = \{T^w\}_{1 \times 9}^T \{\vec{g}^w\}_{9 \times 1} = \{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T \{T^w\}_{9 \times 1}, \quad (15)$$

где  $\{T^w\}_{1 \times 9}^T = \{T^{11w} T^{12w} T^{13w} T^{21w} T^{22w} T^{23w} T^{31w} T^{32w} T^{33w}\}$  — строка компонент тензоров второго ранга в узловой точке  $w$ ;  $\{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}_1^w \vec{g}_1^w : \vec{g}_1^w \vec{g}_2^w : \vec{g}_1^w \vec{g}_3^w : \dots : \vec{g}_3^w \vec{g}_1^w : \vec{g}_3^w \vec{g}_2^w : \vec{g}_3^w \vec{g}_3^w\}$  — строка диадных произведений базисных векторов узловой точки.

На основании (15) столбец узловых тензоров второго ранга может быть представлен матричным выражением

$$\{\tilde{T}_y\}_{8 \times 1} = [\vec{L}]_{8 \times 72} \{T_y\}_{72 \times 1}, \quad (16)$$

где  $\{T_y\}_{1 \times 72}^T = \{T^{11i} T^{12i} T^{13i} T^{21i} T^{22i} T^{23i} T^{31i} T^{32i} T^{33i} \dots T^{11h} T^{12h} T^{13h} T^{21h} T^{22h} T^{23h} T^{31h} T^{32h} T^{33h}\}$  — строка компонент тензоров второго ранга в узлах шестигранника;

$[\vec{L}]_{8 \times 72} = \begin{bmatrix} \{\vec{g}^i\}_{1 \times 9}^T & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \{\vec{g}^h\}_{1 \times 9}^T \end{bmatrix}$  — матрица диадных произведений базисных векторов узловых точек (точками обозначены ее нулевые элементы).

Диадные произведения базисных векторов узловой точки на основе (4) можно представить выражением

$$\vec{g}_i^w \vec{g}_j^w = (z_{i1}^w \vec{g}_1 + z_{i2}^w \vec{g}_2 + z_{i3}^w \vec{g}_3)(z_{j1}^w \vec{g}_1 + z_{j2}^w \vec{g}_2 + z_{j3}^w \vec{g}_3). \quad (17)$$

Используя (17), можно сформировать матричное соотношение

$$\{\vec{g}^w\}_{9 \times 1} = [\chi^w]_{9 \times 9} \{\vec{g}\}_{9 \times 1}, \quad \{\vec{g}^w\}_{1 \times 9}^T = \{\vec{g}\}_{1 \times 9}^T [\chi^w]_{9 \times 9}^T. \quad (18)$$



Аппроксимирующее выражение (13) для тензора произвольной точки шестигранника с учетом (16) и (18) примет вид

$$\tilde{T} = \{f\}^T \begin{bmatrix} \vec{L} \\ \{T_y\} \end{bmatrix} = \{\vec{g}\}^T \begin{bmatrix} f_1[\chi^j]^T & f_2[\chi^i]^T & \dots & f_9[\chi^h]^T \end{bmatrix} = \{\vec{g}\}^T [S] \{T_y\}. \quad (19)$$

Представляя левую часть (19) выражением (14), можно получить матричное выражение

$$\{T\} = [S] \{T_y\}. \quad (20)$$

Каждая компонента тензора второго ранга (элемент столбца  $\{T\}$ ) определится выражением

$$T_l^{ij} = \{H_l\}^T \{T_y\}, \quad l = 1, 2, \dots, 9, \quad (21)$$

где  $\{H_l\}^T$  — аппроксимирующее выражение, определяемое  $l$ -ой строкой матрицы  $[S]$ .

На основе (21) каждая компонента тензора второго ранга произвольной точки шестигранника аппроксимируется через все компоненты тензоров узловых точек конечного элемента.

Если принять матрицу  $[z^w]$  единичной, то матрица  $[\chi^w]$  в (19) также будет единичной, и компонента  $T_l^{ij}$  тензора второго ранга в окрестности внутренней точки конечного элемента будет представляться через узловые значения этой же компоненты аппроксимируемыми выражениями (5). Некорректность такой аппроксимации в криволинейной системе координат очевидна.

Если компоненты тензора второго ранга обладают свойствами симметрии, то в аппроксимирующих соотношениях (20) размеры матриц уменьшаются.

Выражение тензора второго ранга в произвольной точке конечного элемента (14) принимает вид

$$\tilde{T} = \{T\}^T \{\vec{g}\} = \{\vec{g}\}^T \{T\}, \quad (22)$$

где  $\{T\}^T = \{T^{11} \ T^{12} \ T^{13} \ T^{22} \ T^{23} \ T^{33}\}$ ,  $\{\vec{g}\}^T = \{\vec{g}_1 \vec{g}_1 \ 2\vec{g}_1 \vec{g}_2 \ 2\vec{g}_1 \vec{g}_3 \ \vec{g}_2 \vec{g}_2 \ 2\vec{g}_2 \vec{g}_3 \ \vec{g}_3 \vec{g}_3\}$ .

Аналогично преобразуются тензоры второго ранга узловых точек.

В итоге аппроксимирующее выражение (20) принимает вид

$$\{T\} = [S] \{T_y\}. \quad (23)$$

Как видно, через матрицы  $[S]$  и  $[\chi^w]^T$  в аппроксимирующих выражениях (20) и (23) учитываются параметры используемой криволинейной системы координат. Кроме того, каждая компонента тензора второго ранга внутренней точки конечного элемента выражается при аппроксимации через все компоненты тензоров узловых точек.

## Заключение

Как видно из (11) и (23), некорректным является непосредственное использование аппроксимирующих соотношений (5) для выражения компонент тензоров 1-го, 2-го рангов через их узловые значения при переменных базисных векторах. Аппроксимирующие функции (5) следует применять к тензорам, а аппроксимирующие выражения





для компонент тензоров определять, выполняя координатные преобразования между базисными векторами узловых точек и базисными векторами внутренней точки конечного элемента.

Разработанные аппроксимирующие выражения векторных и тензорных величин следует использовать в численных методах определения напряженно-деформированного состояния оболочечных элементов инженерных сооружений при переменных кривизнах их срединных поверхностей, а также для учета смещений оболочечных конечных элементов как твердых тел при расчетах в криволинейных системах координат.

### Список литературы

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. Галимов К. З., Паймушин В. Н. Теория оболочек сложной геометрии. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1985. 164 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. Москва : Наука, 1976. 535 с.
4. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. Москва : Физматлит, 2006. 392 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Москва : Мир, 1976. 464 с.
6. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига : Зинатне, 1988. 284 с.
7. Бате К. Ю. Методы конечных элементов / под ред. Л. И. Турчака. Москва : Физматлит, 2010. 1024 с.
8. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. Расчет осесимметрично нагруженной оболочки вращения с учетом геометрической нелинейности на основе смешанного МКЭ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2014. № 3. С. 14–19.
9. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. Расчет произвольно нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 7–10.
10. Кривошапко С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей : более 500 поверхностей, 38 классов : математикам, инженерам, архитекторам. Москва : URSS, 2010. 556 с.

### References

1. Novozhilov V. V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad, Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian).
2. Galimov K. Z., Paimushin V. N. *Teoriya obolochek slozhnoy geometrii* [The Theory of Shells of Complex Geometry]. Kazan, Kazan University Publ., 1985. 164 p. (in Russian).
3. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1976. 535 p. (in Russian).
4. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 392 p. (in Russian).
5. Oden J. *Konechnye elementy v nelineinoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite Elements in Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1976. 464 p. (in Russian).
6. Rickards R. B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [The Finite Element Method in the Theory of Shells and Plates]. Riga, Zinatne, 1988. 284 p. (in Russian).
7. Bate K. Yu. *Metody konechnykh elementov* [Finite Element Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 1024 p. (in Russian).
8. Gureeva N. A., Klochkov Y. V., Nikolaev A. P. Analysis of a shell of revolution subjected



- to axisymmetric loading taking into account geometric nonlinearity on the basis of the mixed finite element method. *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 232–239. <https://doi.org/10.3103/S1068799814030039>
9. Gureeva N. A., Klochkov Y. V., Nikolaev A. P. Analysis of an arbitrarily loaded shell of revolution based on the finite element method in a mixed formulation. *Russian Aeronautics*, 2010, vol. 53, no. 3, pp. 250–256. <https://doi.org/10.3103/S1068799810030025>
  10. Krivoshapko S. N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostei: bolee 500 poverkhnostei, 38 klassov: matematikam, inzheneram, arkhitektoram* [Encyclopedia of Analytical Surfaces: More than 500 Surfaces, 38 Classes: Mathematicians, Engineers, Architects]. Moscow, URSS, 2010. 556 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 20.04.2021

Принята к публикации / Accepted 18.01.2022

Опубликована / Published 31.05.2022