Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 159–168
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 159–168
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168

Научная статья
УДК 517.925

О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Россия, 154023, г. Ярославль, Московский проспект, д. 88

Ройтенберг Владимир Шлеймович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, vroitenberg@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, AuthorID: 421907

Аннотация. В статье рассматриваются динамические системы на плоскости, задаваемые непрерывными кусочно-гладкими векторными полями. Такие системы используются в качестве математических моделей реальных процессов с переключениями. Важной задачей является нахождение условий рождения периодических траекторий при изменении параметров. В работе описана бифуркация рождения периодической траектории из петли сепаратрисы сшитого седло-узла — аналог классической бифуркации петли сепаратрисы седло-узла гладкой динамической системы. Рассмотрим однопараметрическое семейство $\{X_\varepsilon\}$ непрерывных кусочно-гладких векторных полей на плоскости. Пусть z^0 — точка на линии переключения. Выберем локальные координаты x, y, в которых z^0 имеет нулевые координаты, а линия переключения задается уравнением $y = 0$. Пусть векторное поле X_0 в полуокрестности $y \geqslant 0$ ($y \leqslant 0$) совпадает с гладким векторным полем X_0^+ (X_0^-), для которого точка z^0 является устойчивым грубым узлом (грубым седлом), а собственные подпространства матрицы линейной части поля в z^0 не совпадают с прямой $y = 0$. Особая точка z^0 называется сшитым седло-узлом. Существует единственная траектория L_0, α-предельная к z^0 — выходящая сепаратриса точки z^0. Предполагается, что она также ω-предельна к z^0, причем входит в z^0 по ведущему направлению узла поля X_0^+. Для типичного семейства при изменении параметра ε сшитый седло-узел либо распадается на грубые узел и седло, либо исчезает. В работе доказано, что в последнем случае из контура $L_0 \cup \{z^0\}$ рождается единственная периодическая траектория поля X_ε — устойчивый предельный цикл.

Ключевые слова: непрерывная кусочно-гладкая динамическая система, фазовая плоскость, бифуркация, сшитый седло-узел, предельный цикл

Для цитирования: *Ройтенберг В. Ш.* О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 159–168. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168

Article

On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, 88 Moskovskii prospekt, Yaroslavl 150023, Russia
Vladimir Sh. Roitenberg, vroitenberg@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, AuthorID: 421907

Abstract. The article considers dynamical systems on the plane, defined by continuous piecewise smooth vector fields. Such systems are used as mathematical models of real processes with switching. An important task is to find the conditions for the generation of periodic trajectories when the parameters change. The paper describes the bifurcation of the birth of a periodic trajectory from the loop of the separatrix of a sewn saddle-node — an analogue of the classical bifurcation of the separatrix loop of a saddle-node of a smooth dynamical system. Consider a one-parameter family $\{X_\varepsilon\}$ of continuous piecewise-smooth vector fields on the plane. Let z^0 be a point on the switching line. Let's choose the local coordinates x, y in which z^0 has zero coordinates, and the switching line is given by the equation $y = 0$. Let the vector field X_0 in a semi-neighborhood $y \geqslant 0$ ($y \leqslant 0$) coincide with a smooth vector field X_0^+ (X_0^-), for which the point z^0 is a stable rough node (rough saddle), and the proper subspaces of the matrix of the linear part of the field in z^0 do not coincide with the straight line $y = 0$. The singular point z^0 is called a sewn saddle-node. There is a single trajectory L_0 that is α-limit to z^0 — the outgoing separatrix of the point z^0. It is assumed that L_0 is also ω-limit to z^0, and enters z^0 in the leading direction of the node of the field X_0^+. For generic family, when the parameter ε changes, the sewn saddle-node either splits into a rough node and a rough saddle, or disappears. In the paper it is proved that in the latter case the only periodic trajectory of the field X_ε is generated from the contour $L_0 \cup \{z^0\}$ — a stable limit cycle.

Keywords: continuous piecewise smooth dynamical system, phase plane, bifurcation, sewn saddle-node, limit cycle

For citation: Roitenberg V. Sh. On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 159–168 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168

Введение

Исследование бифуркаций фазовых портретов динамических систем было начато А. А. Андроновым в 1930-е гг. Бифуркация рождения предельного цикла из петли сепаратрисы седло-узла гладкой динамической системы на плоскости была описана в работе А. А. Андронова и Е. А. Леонтович [1]. Случай фазового пространства любой размерности был рассмотрен Л. П. Шильниковым в [2]. Для динамических систем, задаваемых разрывными кусочно-гладкими векторными полями в $\mathbb{R}^n$, рождение периодической траектории из петли сепаратрисы особой точки типа сшитый седло-узел было получено в [3]. Теории локальных и нелокальных бифуркаций кусочно-гладких динамических систем посвящено большое число научных работ (см., например, [4–7]. Несомненный теоретический и прикладной интерес представляет изучение бифуркаций динамических систем, задаваемых непрерывными кусочно-гладкими векторными полями. Здесь изучены в основном локальные бифуркации [8]. В частности, описаны бифуркации особой точки $O = (0, 0)$ типа седло-узел, «сшитой» из седла и узла гладких векторных полей, заданных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях плоскости $\mathbb{R}^2$.

В настоящей работе рассматривается бифуркация петли сепаратрисы такой точки. Доказывается, что при исчезновении особой точки рождается единственная периодическая траектория.

1. Непрерывные кусочно-гладкие векторные поля на плоскости

Пусть замкнутая область M на плоскости $\mathbb{R}^2$ с C^{r+1}-гладкой ($r \geqslant 1$) границей ∂M представлена в виде объединения C^{r+1}-гладких двумерных компактных подмногообразий M_k $(k = 1, 2, ..., n)$ с краем ∂M_k, причем $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $i \neq j$. Пусть $\mathfrak{X}^r(M_k)$ — банахово пространство C^r-векторных полей на M_k с C^r-нормой [9], которую обозначим $\|\cdot\|_r^k$. *Непрерывным кусочно-гладким векторным полем* в области M с разбиением $\mathcal{D} = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ назовем такое непрерывное векторное поле $X : M \to TM = \mathbb{R}^n$, что для любого $k = 1, 2, ..., n$ $X^k := X\,|_{M_k} \in \mathfrak{X}^r(M_k)$. Множество $\mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ таких векторных полей с нормой $\|X\|_r := \max\limits_{k=1,..,n} ||X\,|_{M_k}\,||_r^k$ является банаховым пространством. Множество $S := \bigcup\limits_{i\neq j} \partial M_i \cap \partial M_j$ и его компоненты называются *линиями переключения*.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому для любой точки $z_0 \in \mathrm{int} M$ существует единственная траектория, начинающаяся в этой точке, — отображение $g(z_0, \cdot) : I \to M$, где I — максимальный промежуток, содержащий нуль, для которого $g(z_0, 0) = z_0$ и $\frac{d}{dt} g(z_0, t) = X(g(z_0, t))$ при всех $t \in I$. Как обычно, множество точек $L = \{x = g(z_0, t) \colon\ t \in I\}$ также будем называть траекторией.

2. Формулировка результатов

Будем рассматривать семейство $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\bar\delta}$ векторных полей $X_\varepsilon \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$, $r \geqslant 3$, зависящих от параметра $\varepsilon \in (-\bar\delta, \bar\delta)$, и предполагать, что отображение

$$(-\bar\delta, \bar\delta) \ni \varepsilon \mapsto X_\varepsilon \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$$

— C^1-гладкое. Тогда для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ отображения

$$M_k \times (-\bar\delta, \bar\delta) \ni (z, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon^k(z) \in \mathbb{R}^2$$

— C^r-гладкие. Согласно теореме Уитни [10, с. 587–599], векторные поля $X_\varepsilon^k := X_\varepsilon\,|_{M_k}$ можно продолжить до векторных полей $\bar X_\varepsilon^k$ на M так, чтобы отображения

$$M \times (-\bar\delta, \bar\delta) \ni (z, \varepsilon) \mapsto \bar X_\varepsilon^k(z) \in \mathbb{R}^2$$

также были C^r-гладкими.

Пусть векторное поле X_0 имеет особую точку z^0 на линии переключения. Элементы разбиения $\mathcal{D}$, содержащие эту точку, обозначим M_+ и M_-. Пусть $X_\varepsilon^\pm := X_\varepsilon\,\big|_{M_\pm}$. Предположим, что линейный оператор $dX^+(z^0)$ имеет различные отрицательные собственные значения, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны касательной к ∂M_+ в точке z^0; линейный оператор $dX^-(z^0)$ имеет собственные значения противоположных знаков, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны касательной к ∂M_- в точке z^0. Точку z^0 в этом случае назовем *сшитым седло-узлом*. Она имеет один устойчивый параболический сектор и два

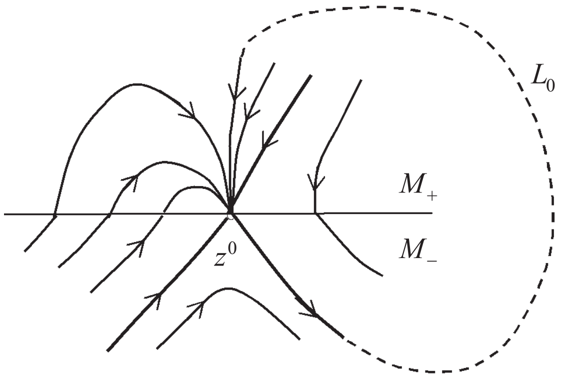

Рис. 1. Сшитый седло-узел и петля его сепаратрисы

Fig. 1. The sewn saddle-node and its separatrix loop

гиперболических сектора (рис. 1). Граничная траектория между двумя гиперболическими секторами называется *выходящей сепаратрисой*, а две граничные траектория между параболическим и гиперболическими секторами — *входящими сепаратрисами*. Бифуркации сшитого седло-узла описаны в [8].

Выберем в окрестности U_0 точки z^0 локальные C^{r+1}-координаты (z_1, z_2), $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$, в которых z^0 имеет нулевые координаты, $U_0 \cap M_+$, $U_0 \cap M_-$ и $\ell := U_0 \cap S$ задаются соответственно условиями $0 \leqslant z_2 < 1$, $-1 < z_2 \leqslant 0$ и $z_2 = 0$, а $\overline{U}_0$ не содержит других особых точек. В этих координатах

$$\overline{X}^{\pm}(z) = P_1^{\pm}(z_1, z_2, \varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2^{\pm}(z_1, z_2, \varepsilon)\partial/\partial z_2,$$

где $P_i^{\pm}$ — C^r-функции, $P_i^{\pm}(0) = 0$ $(i = 1, 2)$,

$$P_i^{+}(z_1, 0, \varepsilon) \equiv P_i^{-}(z_1, 0, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\det d\overline{X}^{+}(z^0) = \det(\partial P_i^{+}(0)/\partial z_j) > 0, \qquad \det d\overline{X}^{-}(z^0) = \det(\partial P_i^{-}(0)/\partial z_j) < 0. \tag{2}$$

Вследствие (1) определители

$$\Delta^{\pm} = \begin{vmatrix} \partial P_1^{\pm}(0)/\partial z_1 & \partial P_1^{\pm}(0)/\partial \varepsilon \\ \partial P_2^{\pm}(0)/\partial z_1 & \partial P_2^{\pm}(0)/\partial \varepsilon \end{vmatrix}$$

совпадают: $\Delta^+ = \Delta^- =: \Delta$. Их величина не зависит от способа продолжения векторных полей $X_\varepsilon^{\pm}$ до векторных полей $\overline{X}_\varepsilon^{\pm}$.

По теореме о неявной функции получаем, что при ε, достаточно близких к нулю, в окрестности U_0 векторное поле $\overline{X}_\varepsilon^{\pm}$ имеет единственную особую точку $z^{\pm}(\varepsilon)$ с координатами $(h^{\pm}(\varepsilon), v^{\pm}(\varepsilon))$, где $h^{\pm}(\cdot)$, $v^{\pm}(\cdot) \in C^r$,

$$h^{\pm}(0) = v^{\pm}(0) = 0, \quad \partial v^{\pm}(0)/\partial\varepsilon = -\Delta/\det(\partial P_i^{\pm}(0)/\partial z_j). \tag{3}$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Без ограничения общности можно полагать, что $\Delta > 0$. Тогда из (2) и (3) получаем, что существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\operatorname{sgn} v^{\pm}(\varepsilon) = \mp \operatorname{sgn} \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0). \tag{4}$$

Если δ_0 выбрано достаточно малым, то из (4) следует, что векторное поле X_ε в окрестности U_0

— не имеет особых точек при $\varepsilon \in (0, \delta_0)$;

— имеет единственную особую точку — сшитый седло-узел $z^{\pm}(0) = z^0$ при $\varepsilon = 0$;

— имеет ровно две особых точки — грубый узел $z^+(\varepsilon) \in \operatorname{int} M_+$ и грубое седло $z^-(\varepsilon) \in \operatorname{int} M_-$ при $\varepsilon \in (-\delta_0, 0)$.

Предположим теперь, что у векторного поля X_0 выходящая сепаратриса L_0 сшитого седло-узла z^0 трансверсальна линии переключения S, ω-предельна к z^0, но не совпадает ни с одной из входящих сепаратрис (см. рис. 1). Обозначим $\Gamma_0 := L_0 \cup \{z^0\}$.

Если число $\delta \in (0, \delta_0)$ достаточно мало, то при $\varepsilon \in (-\delta, 0]$ в достаточно малой окрестности гомоклинического контура Γ_0 нет особых точек, отличных от $z^{\pm}(\varepsilon)$, и нет замкнутых траекторий.

Опишем бифуркации в окрестности контура Γ_0 при $\varepsilon > 0$. Нам понадобится следующее

Определение. Пусть A_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, — подмножества некоторого топологического пространства. Множество A_0 — *топологический предел* множеств A_ε при $\varepsilon \to 0$ ($\underset{\varepsilon \to 0}{lt} A_\varepsilon = A_0$), если для любой окрестности U множества A_0 найдется такое $\varepsilon_* \in (0, \varepsilon_0)$, что $A_\varepsilon \subset U$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$.

Теорема. *При сделанных относительно семейства $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\bar{\delta}}$ предположениях существуют такие окрестность $V(\Gamma_0)$ контура Γ_0 и число $\delta \in (0, \delta_0)$, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ векторное поле X_ε, имеет единственную замкнутую траекторию Γ_ε, принадлежащую $V(\Gamma_0)$. Эта траектория — устойчивый гиперболический предельный цикл, ее топологическим пределом при $\varepsilon \to 0$ является Γ_0.*

Доказательство теоремы приведено в разделах 3–5.

3. Локальная функция соответствия по траекториям поля X_ε^+

По условию линейный оператор $dX_0^+(z^0)$ имеет собственные значения $\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < 0$. Без ограничения общности можно считать, что координаты z_1, z_2 выбраны так, что

$$P_1^+(z_1, z_1, 0) = \lambda_1^+ z_1 + o(|z|), \qquad P_2^+(z_1, z_2, 0) = a z_1 + \lambda_2^+ z_2 + o(|z|), \quad \text{где } a < 0.$$

В координатах $x_1 = z_1 - h^+(\varepsilon), x_2 = z_2 - v^+(\varepsilon)$

$$\overline{X}^{\pm}(z) = Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon)\partial/\partial x_1 + Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon)\partial/\partial x_2,$$

$$Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon) = \lambda_1^+ x_1 + x_1 q_{11}(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 q_{12}(x_1, x_2, \varepsilon), \tag{5}$$

$$Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon) = a x_1 + \lambda_2^+ x_2 + x_1 q_{21}(x_1, x_2, \varepsilon) + x_2 q_{22}(x_1, x_2, \varepsilon), \tag{6}$$

где q_{ij} — C^{r-1}-функции, $q_{ij}(0) = 0$, $i, j = 1, 2$.

Обозначим $K_{d,k}^\varepsilon := \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 \leqslant d, |x_1| \leqslant k x_2\}$ (рис. 2). Из (5) и (6) получаем, что при достаточно малых $d > 0$, $k > 0$ и $0 < \delta_1 < \delta_0$ функция

$$R(x_1, x_2, \varepsilon) := Q_1^+(x_1, x_2, \varepsilon)/Q_2^+(x_1, x_2, \varepsilon)$$

определена для $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)$, $(x_1, x_2) \in K_{d,k}^\varepsilon$. Поскольку $\lambda_1^+/\lambda_2^+ > 1$, то при этом $\pm R(\pm k x_2, x_2, \varepsilon) > k$. Но тогда решение $x_1 = \varphi(x_2, u, \varepsilon)$ дифференциального уравнения $dx_1/dx_2 = R(x_1, x_2, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(d, u, \varepsilon) = u$ с $|u| \leqslant kd$, определено при всех $x_2 \in (0, d]$.

Производная $\varphi_u'(x_2, u, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx_2}\varphi_u' = R_{x_1}'(\varphi(x_2, u, \varepsilon), x_2, \varepsilon)\varphi_u'$$

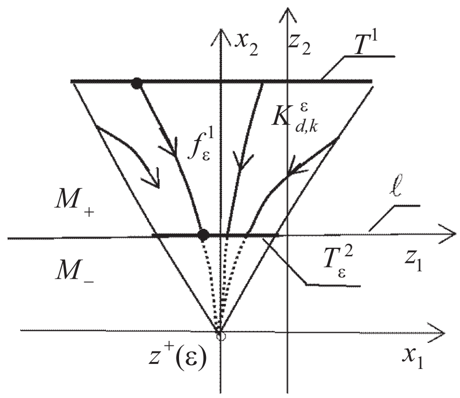

Рис. 2. Конус $K_{d,k}^\varepsilon$, дуги T_ε^1 и T_ε^2, функция f_ε^1

Fig. 2. The cone $K_{d,k}^\varepsilon$, the arcs T_ε^1 and T_ε^2, the function f_ε^1

и начальному условию $\varphi'_u(d,u,\varepsilon)=1$. Поэтому

$$\varphi'_u(x_2,u,\varepsilon)=\exp\int_d^{x_2} R'_{x_1}(\varphi(\xi,u,\varepsilon),\xi,\varepsilon)\,d\xi. \tag{7}$$

Выберем число γ так, что $1<\gamma<\lambda_1^+/\lambda_2^+$. Используя (5) и (6), запишем R'_{x_1} в виде

$$R'_{x_1}(x_1,x_2,\varepsilon)=\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+x_1+x_1s_1(x_1,x_2,\varepsilon)+x_2s_2(x_1,x_2,\varepsilon)}{(ax_1+\lambda_2^+x_2+x_1q_{21}(x_1,x_2,\varepsilon)+x_2q_{22}(x_1,x_2,\varepsilon))^2}, \tag{8}$$

где s_i — C^{r-1}-функции, $s_i(0)=0$, $i=1,2$. Считая d, k и δ_1 достаточно малыми, из (8) получаем следующую оценку:

$$R'_{x_1}(x_1,x_2,\varepsilon)\leqslant\gamma/x_2 \quad \text{при} \quad \varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1),\ (x_1,x_2)\in K^\varepsilon_{d,k}.$$

Отсюда и из (7) имеем

$$0<\varphi'_u(x_2,u,\varepsilon)\leqslant(x_2/d)^\gamma. \tag{9}$$

Обозначим T^1_ε и T^2_ε дуги, задаваемые в координатах (x_1,x_2), соответственно условиями $x_2=d$, $|x_1|\leqslant kd$ и $x_2=-v^+(\varepsilon)$, $|x_1|\leqslant -kv^+(\varepsilon)$. Поскольку сепаратриса L_0 не совпадает с входящей сепаратрисой сшитого седло-узла z^0, то она входит в z^0 по ведущему направлению, соответствующему собственному значению λ_2^+. Поэтому d можно выбрать так, чтобы L_0 пересекала дугу T^1_0 во внутренней точке, x_1-координату которой обозначим ξ_0. Фиксируем k и d. Выбрав δ_1 достаточно малым, будем иметь $\forall\varepsilon\in(0,\delta_1)$ $0<-v^+(\varepsilon)<d$. Функция $u\mapsto f^1_\varepsilon(u):=\varphi(-v^+(\varepsilon),u,\varepsilon)$ является функцией соответствия по траекториям поля $X_\varepsilon,\varepsilon\in(0,\delta_1)$, между дугами $T^1_\varepsilon\subset M_+$ и $T^2_\varepsilon\subset\ell$. Для ее производной получаем из (9) следующую оценку:

$$0<(f^1_\varepsilon)'(u)\leqslant[v^+(\varepsilon)]^\gamma/d^\gamma. \tag{10}$$

4. Локальная функция соответствия по траекториям поля X^-_ε. Функция последования

По условиям теоремы матрица $(\partial P_i^-(0)/\partial z_j)$ имеет собственные значения разных знаков, а соответствующие собственные подпространства трансверсальны прямой $z_2=0$. Поэтому найдется такое $\delta_2\in(0,\delta_1)$, что при $\varepsilon\in(-\delta_2,\delta_2)$ матрица $(\partial P_i^-(h^-(\varepsilon),v^-(\varepsilon),\varepsilon)/\partial z_j)$ имеет собственные значения $\lambda_1^-(\varepsilon)$ и $\lambda_2^-(\varepsilon)$ $(\lambda_2^-(\varepsilon)<0<\lambda_1^-(\varepsilon))$ и соответствующие собственные векторы $(a_1(\varepsilon),-1)^T$ и $(a_2(\varepsilon),1)^T$ $(a_1(\varepsilon)>0,\ a_2(\varepsilon)>0)$, C^{r-1}-гладко зависящие от ε. Тогда в координатах $(\bar z_1,\bar z_1)$, задаваемых равенствами

$$z_1=h^-(\varepsilon)+a_1(\varepsilon)\bar z_1+a_2(\varepsilon)\bar z_2, z_2=v^-(\varepsilon)-\bar z_1+\bar z_2,$$

получаем

$$\bar X^-_\varepsilon(z)=(\lambda_1(\varepsilon)\,\bar z_1+c_1(\bar z_1,\bar z_2,\varepsilon))\partial/\partial\bar z_1+(\lambda_2(\varepsilon)\,\bar z_2+c_2(\bar z_1,\bar z_2,\varepsilon))\partial/\partial\bar z_2,$$

где c_k $(k=1,2)$ — C^{r-1}-функции, обращающиеся в нуль вместе со своими первыми производными по $\bar z_1$ и $\bar z_2$ при $\bar z_1=\bar z_2=0$, на дуге $\ell=S\cap U_0$ $(z_2=0)$ имеем $\bar z_2=-v^-(\varepsilon)+\bar z_1$, а условие $z\in U_0\cap M_-$ $(z_2\leqslant 0)$ равносильно неравенству $\bar z_2\leqslant -v^-(\varepsilon)+\bar z_1$.

При достаточно малых $l_0>0$ и $\delta_3\in(0,\delta_2]$ локальные инвариантные многообразия седла $z^-(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)$ задаются в координатах $(\bar z_1,\bar z_2)$ уравнениями $\bar z_1=w_1(\bar z_2,\varepsilon)$, $\bar z_2\in(-l_0,l_0)$ и $\bar z_2=w_2(\bar z_1,\varepsilon)$, $\bar z_1\in(-l_0,l_0)$, где $w_k\in C^{r-1}$,

$w_k(0,\varepsilon) = (w_k)'_\tau(\tau,\varepsilon)\,|_{\tau=0} = 0$, $k = 1,2$ [9]. Замена $y_1 = \bar z_1 - w_1(\bar z_2,\varepsilon)$, $y_2 = \bar z_2 - w_2(\bar z_1,\varepsilon)$ является диффеоморфизмом, который можно сделать сколь угодно близким к тождественному в C^1-топологии, выбрав достаточно малые l_0 и δ_3. При каждом l_0 число δ_3 можно выбрать столь малым, что при $\varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)$ дуга ℓ пересекается с окрестностью $\Pi^-_\varepsilon = \Pi^-_{l_0,\varepsilon}$ точки $z^-(\varepsilon)$, заданной неравенствами $|\bar z_1| < l_0$, $|\bar z_2| < l_0$ (рис. 3). Поэтому можно считать, что l_0 и δ_3 таковы, что $\forall\ \varepsilon \in (0,\delta_3)$ $\ell \cap \Pi^-_\varepsilon$ имеет уравнение $y_2 = \psi(y_1,\varepsilon)$, где

$$\psi(0,\varepsilon) < -v^-(\varepsilon)/2 < 0, \tag{11}$$
$$0 < \psi'_{y_1}(y_1,\varepsilon) < 2, \tag{12}$$

а условие $z \in \Pi^-_\varepsilon \cap M_-$ равносильно неравенству $y_2 \leqslant \psi(y_1,\varepsilon)$.

В окрестности Π^-_ε

$$\bar X^-_\varepsilon(z) = (\lambda_1(\varepsilon) + r_1(y_1,y_2,\varepsilon))y_1\partial/\partial y_1 + \\ +(\lambda^-_1(\varepsilon) + r_2(y_1,y_2,\varepsilon))y_2\partial/\partial y_2, \tag{13}$$

где $r_k \in C^{r-2}$, $r_k(0,0,\varepsilon) = 0$, $k = 1,2$, и можно считать, что

$$\begin{aligned} &\lambda^-_1(\varepsilon) + r_1(y_1,y_2,\varepsilon) > 0,\\ &\lambda^-_2(\varepsilon) + r_2(y_1,y_2,\varepsilon) < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

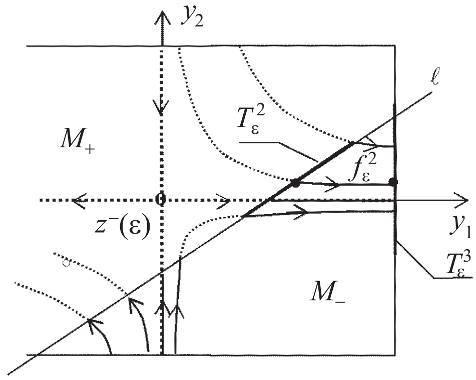

Рис. 3. Окрестность седла $z^-(\varepsilon)$. Дуги T^2_ε и T^3_ε, функция f^2_ε

Fig. 3. A neighborhood of the saddle $z^-(\varepsilon)$. The arcs T^2_ε and T^3_ε, the function f^2_ε

Из (13) получаем, что производная функции $y_2 - \psi(y_1,\varepsilon)$ по направлению векторного поля $\overline{X}^-_\varepsilon$ равна

$$(\lambda^-_2(\varepsilon) + r_2(y_1,y_2,\varepsilon))y_2 - \psi'_{y_1}(y_1,\varepsilon)(\lambda^-_1(\varepsilon) + r_1(y_1,y_2,\varepsilon))y_1.$$

Ввиду (11) и (14) можно считать, что при выбранном δ_3 в точках $\ell \cap \Pi^-_\varepsilon$ с координатой $y_1 \leqslant 0$ она положительна, т. е. поле X_ε, $\varepsilon \in (0,\delta_3)$, в этих точках направлено внутрь M_+. Поскольку в точках дуги T^2_ε поле X_ε направлено внутрь M_-, то все точки T^2_ε имеют положительную координату y_1. Так как для координат x_1,x_2 точек T^2_ε имеем $x_2 = -v^+(\varepsilon)$, $|x_1| \leqslant -kv^+(\varepsilon)$, а $v(0) = 0$, то можно считать, что при $\varepsilon \in (0,\delta_3)$ $T^2_\varepsilon \subset \Pi^-_\varepsilon$ и существует такая постоянная $C > 0$, что

$$0 < y_1 \leqslant C\varepsilon \text{ для координаты } y_1 \text{ любой точки } T^2_\varepsilon. \tag{15}$$

Переход от параметра x_1 ($|x_1| \leqslant -kv^+(\varepsilon)$) на дуге T^2_ε к параметру $\bar z_1$ задается возрастающей аффинной функцией $\bar z_1 = (z_1 - h^-(\varepsilon) + av^-(\varepsilon))/(a_1(\varepsilon) + a_2(\varepsilon))$. Переход от параметра $\bar z_1$ на T^2_ε к параметру y_1 задается равенством $y_1 = \bar z_1 - w_1(-v^-(\varepsilon) + \bar z_1,\varepsilon)$. Поэтому переход от параметра x_1 к параметру y_1 имеет вид $y_1 = \tilde y_\varepsilon(x_1)$, где $(x_1,\varepsilon) \mapsto \tilde y_\varepsilon(x_1)$ — C^{r-1}-функция, $(\tilde y_\varepsilon)'(x_1) > 0$.

Обозначим T^3_ε дугу, заданную в координатах y_1,y_2 условиями $y_1 = l_0/2, |y_2| \leqslant l$, где $0 < l < l_0$. В качестве параметра на T^3_ε возьмем координату y_2. При $\varepsilon = 0$ сепаратриса L_0 поля X_0 трансверсально пересекает дугу T^3_0 в точке с координатой $y_2 = 0$. Так как L_0 трансверсально пересекает и дугу T^1_0 в ее внутренней точке, а также трансверсальна S, то при достаточно малых l и $\delta_4 \in (0,\delta_3)$ для любого $\varepsilon \in [0,\delta_4]$ определено отображение по траекториям поля X_ε дуги T^3_ε в дугу T^1_ε, ставящее в соответствие точке с координатой $y_2 = v$ точку с координатой $x_1 = f_\varepsilon^3(v)$, при этом отображение $(v, \varepsilon) \mapsto f_\varepsilon^3(v)$ принадлежит классу C^{r-2}.

Обозначим $\Pi_{l,\varepsilon}^{ext}$ объединение дуг положительных полутраекторий поля X_ε, начинающихся в точках T_ε^3 и кончающихся в точках T_ε^1. При достаточно малом δ_4 для любого $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ множество $U(k, d, l_0, l, \varepsilon) := K_{d,k}^\varepsilon \cup \Pi_{l_0,\varepsilon}^- \cup \Pi_{l,\varepsilon}^{ext}$ является окрестностью петли Γ_0.

Траектория поля $\overline{X}_\varepsilon^-$, начинающаяся в точке окрестности Π_ε^- с координатами y_1, y_2, $0 < y_1 < l$, $|y_2| < l$, пересекает дугу T_ε^3 в точке с y_2-координатой $Y(y_1, y_2, \varepsilon)$, где Y — C^{r-2}-функция. Из [11, п. 13.8, замечания 2 и 3] следует, что

$$Y(y_1, y_2, \varepsilon) = c(\varepsilon) y_1^{\lambda(\varepsilon)} y_2 + \eta(y_1, y_2, \varepsilon), \tag{16}$$

где $\lambda(\varepsilon) = -\lambda_2^-(\varepsilon)/\lambda_1^-(\varepsilon) > 0$, $c, \eta \in C^1$, $c(\varepsilon) > 0$,

$$|\partial^{i+i} \eta(y_1, y_2, \varepsilon)/\partial y_1^i \partial y_2^j| \leqslant N\, y_1^{\alpha + \lambda(\varepsilon) - i}, \quad 0 \leqslant i + j \leqslant 1, \tag{17}$$

а $\alpha > 0$, $N > 0$ — некоторые постоянные.

Функция $f_\varepsilon^2(y_1) := Y(y_1, \psi(y_1, \varepsilon), \varepsilon)$ задает отображение дуги T_ε^2 в дугу T_ε^3 по траекториям поля X_ε (см. рис. 3). Мы можем считать, что $\delta_4 < 1$. Из (16), (17), (12) и (15) получаем, что найдется такое число $N_1 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ в области определения функции f_ε^2

$$(f_\varepsilon^2)'(y_1) \leqslant N_1 \varepsilon^{\lambda(\varepsilon)} \leqslant N_1. \tag{18}$$

При $\varepsilon \in (0, \delta_4)$ функция $f_\varepsilon := f_\varepsilon^3 \circ f_\varepsilon^2 \circ \tilde{y}_\varepsilon \circ f_\varepsilon^1 : [-kd, kd] \to [-kd, kd]$ задает отображение дуги T_ε^1 в себя по траекториям векторного поля X_ε. Из оценок (10), (18), ограниченности производных функций $\tilde{y}_\varepsilon$, f_ε^3 и равенства $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} v^+(\varepsilon) = 0$ следует, что при достаточно малом $\delta \in (0, \delta_4]$ $\forall\ \varepsilon \in (0, \delta)$ $\quad 0 < (f_\varepsilon)'(x_1) < 1/2$. Поэтому функция последования f_ε имеет единственную неподвижную точку (устойчивую гиперболическую) $\xi(\varepsilon)$. Через соответствующую точку дуги T_ε^1 проходит устойчивая гиперболическая замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε.

5. Окрестность $V(\Gamma_0)$

Построим окрестность $V(\Gamma_0)$, о которой идет речь в теореме. При достаточно малом $\delta_6 \in (0, \delta_5)$ найдется окрестность $V_*(\Gamma_0)$ контура Γ_0, содержащаяся в любой окрестности $U(k, d, l_0, l, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \delta_6)$. Выберем число $\sigma > 0$ так, чтобы $-kd < \xi_0 - \sigma < \xi_0 < \xi_0 + \sigma < kd$. Поскольку контур Γ_0 состоит из C^1-гладких дуг с концами на линиях переключения и трансверсальных этим линиям, то, взяв σ достаточно малым, можно построить окрестность $V(\Gamma_0) \subset V_*(\Gamma_0)$ контура, ограниченную двумя замкнутыми кусочно-гладкими кривыми γ_+ и γ_-, пересекающимися с дугой T_0^1 только в точках соответственно A_0^+ и A_0^- с x_1-координатами $\xi_0 - \sigma$ и $\xi_0 + \sigma$. Используя теорему о неявной функции, получим, что δ_6 можно выбрать так, что при $\varepsilon \in (0, \delta_6)$ дуга T_ε^1 пересекается с кривой γ_+ (γ_-) в единственной точке A_ε^+ (A_ε^-).

Выбрав достаточно малые положительные числа $\tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}$ и $\delta \in (0, \delta_6)$, по ним для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ можно построить окрестность $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon)$ контура Γ_0 аналогично окрестности $U(k, d, l_0, l, \varepsilon)$ так, чтобы $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon) \subset V(\Gamma_0)$. Векторное поле X_ε при $\varepsilon \in (0, \delta)$ имеет в $U(k, \tilde{d}, \tilde{l}_0, \tilde{l}, \varepsilon)$, а потому и в $V(\Gamma_0)$ замкнутую траекторию $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$. Так как часть дуги T_ε^1 между точками A_ε^+ и A_ε^- разбивает $V(\Gamma_0)$ на две односвязные области, не содержащие особые точки поля, то $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ пересекает дугу T_ε^1. Но при $\varepsilon \in (0, \delta)$ Γ_ε — единственная замкнутая траектория поля X_ε, пересекающая дугу T_ε^1. Следовательно, $\tilde{\Gamma}_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon$ — единственная замкнутая траектория поля X_ε, содержащаяся в $V(\Gamma_0)$.

Покажем, что $\underset{\varepsilon\to 0}{lt}\,\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$. Зададим окрестность $U(\Gamma_0)$ сепаратрисного контура Γ_0. Выбрав достаточно малые $\tilde{d}$, $\tilde{l}_0$, $\tilde{l}$ и $\delta_* \in (0,\delta)$, будем иметь при всех $\varepsilon \in (0,\delta_*)$ $U(k,\tilde{d},\tilde{l}_0,\tilde{l},\varepsilon) \subset U(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_0)$. Векторное поле X_ε при $\varepsilon \in (0,\delta_*)$ имеет в $U(k,\tilde{d},\tilde{l}_0,\tilde{l},\varepsilon)$, а потому и в $U(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_0)$ замкнутую траекторию Γ_ε. Следовательно, $\underset{\varepsilon\to 0}{lt}\,\Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Ученые записки Горьковского государственного университета. 1939. Вып. 6. С. 3–24.
2. *Шильников Л. П.* О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // Математический сборник. 1963. Т. 61 (103), № 4. С. 443–466.
3. *Ройтенберг В. Ш.* О рождении устойчивых замкнутых траекторий разрывных векторных полей // Математика и математическое образование. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 3. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2002. С. 19–23.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва : Наука, 1985. 224 с.
5. *di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P.* Piecewise-smooth Dynamical Systems. London : Springer, 2008. 483 p. (Applied Mathematical Sciences, vol. 163). https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4
6. *Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A.* Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // Journal of Differential Equations. 2011. Vol. 250, no. 4. P. 1967–2023. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.0163
7. *Ройтенберг В. Ш.* О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-2
8. *Simpson D. J. W.* Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. 256 p. (World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 70). https://doi.org/10.1142/7612
9. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. Москва : Мир, 1986. 301 с.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Москва : Физматгиз, 1962. Т. 1. 607 с.
11. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.

References

1. Andronov A. A., Leontovich E. A. Some cases of dependence of limit cycles on a parameter. *Uchenye zapiski Gor'kovskogo gosudarstvennogo universiteta* [The Bulletin of Gorky State University], 1939, iss. 6, pp. 3–24 (in Russian).
2. Shilnikov L. P. Some cases of generation of period motions from singular trajectories. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1963, vol. 61 (103), no. 4, pp. 443–466 (in Russian).
3. Roitenberg V. Sh. On generation of stable closed trajectories of discontinuous vector fields. *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice]. Iss. 3. Yaroslavl, YaGTU Publ., 2002, pp. 19–23 (in Russian).
4. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'iu* [Differential Equations with Discontinuous Right-hand Part]. Moscow, Nauka, 1985. 224 p. (in Russian).

5. di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences, vol. 163. London, Springer-Verlag, 2008. 483 p. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-708-4
6. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*, 2011, vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.0163
7. Roitenberg V. Sh. On bifurcations in the neighborhood of a singular point of triple sewn focus type. *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. Mathematics*, 2017, no. 2 (42), pp. 18–31 (in Russian). https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-2
8. Simpson D. J. W. *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 70. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2010. 256 p. https://doi.org/10.1142/7612
9. Palis J., de Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. New York, NY, Springer, 1982. 198 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5 (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 301 p.).
10. Fichtenholz G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. Vol. 1. 607 p. (in Russian).
11. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics (Part II)*. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 5. River Edge, N.J., World Scientific, 2001. https://doi.org/10.1142/4221 (Russ. ed.: Moscow, Izhevsk, 2009. 548 p.).

Поступила в редакцию / Received 25.08.2021
Принята к публикации / Accepted 09.02.2022
Опубликована / Published 31.05.2022