Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 169–179
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 169–179
https://mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179

Научная статья
УДК 517.968.4

О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси

Х. А. Хачатрян[1]✉, А. С. Петросян[2]

[1]Ереванский государственный университет, Армения, 0025, г. Ереван, ул. А. Манукяна, д. 1
[2]Национальный аграрный университет Армении, Армения, 0009, г. Ереван, ул. Теряна, д. 74

Хачатрян Хачатур Агавардович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X, AuthorID: 589262,

Петросян Айкануш Самвеловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физики, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Аннотация. В настоящей работе исследуется класс нелинейных интегральных уравнений на полуоси с некомпактным оператором Гаммерштейна. Предполагается, что ядро уравнения экспоненциально убывает на положительной части числовой оси. Уравнения такого рода возникают в различных областях естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии, в кинетической теории газов. Отличительной особенностью рассматриваемого класса уравнений являются некомпактность соответствующего нелинейного интегрального оператора Гаммерштейна в пространстве существенно ограниченных функций на положительной части числовой прямой и условие критичности (т. е. наличие тривиального нулевого решения). При определенных ограничениях на нелинейность доказывается существование положительного ограниченного и суммируемого решения. Исследуется также асимптотическое поведение решения на бесконечности. Доказательство теоремы существования носит конструктивный характер. Сперва решая определенное простое характеристическое уравнение, строится нулевое приближение в рассматриваемых итерациях. Затем изучается специальное вспомогательное нелинейное интегральное уравнение, решение которого строится с помощью простых последовательных приближений. После этого доказывается, что введенные нами итерации монотонно возрастают и сверху ограничены решением вышеотмеченного вспомогательного интегрального уравнения. Далее, используя соответствующие условия на нелинейность и на ядро, доказывается, что предел этих итераций является решением первоначального уравнения и экспоненциально убывает на бесконечности. При дополнительном ограничении на нелинейность устанавливается единственность построенного решения в определенном классе измеримых функций. В конце работы приводятся конкретные примеры ядра и нелинейности прикладного характера, для которых автоматически выполняются все условия доказанной теоремы.

Ключевые слова: монотонность, итерации, суммируемое решение, выпуклость, ядро

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

Для цитирования: *Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна на полуоси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 169–179. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179

Article

On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein integral equations on the semiaxis

Kh. A. Khachatryan[1]✉, **H. S. Petrosyan**[2]

[1]Yerevan State University, 1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia
[2]Armenian National Agrarian University, 74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia

Khachatur A. Khachatryan, khachatur.khachatryan@ysu.am, https://orcid.org/0000-0002-4835-943X, AuthorID: 589262
Haykanush S. Petrosyan, Haykuhi25@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7172-4730

Abstract. The paper studies a class of nonlinear integral equations on the semiaxis with a non-compact Hammerstein operator. It is assumed that the kernel of the equation decreases exponentially on the positive part of the number axis. Equations of this kind arise in various fields of natural science. In particular, such equations are found in the theory of radiation transfer in spectral lines, in the mathematical theory of the space-time propagation of an epidemic, in the kinetic theory of gases. A distinctive feature of the considered class of equations is the non-compactness of the corresponding nonlinear Hammerstein integral operator in the space of essentially bounded functions on the positive part of the number line and the criticality condition (i.e., the presence of a trivial zero solution). Under certain restrictions on nonlinearity, the existence of a positive bounded and summable solution is proved. The asymptotic behavior of the solution at infinity is also investigated. The proof of the existence theorem is constructive. First, solving a certain simple characteristic equation the zero approximation in the considered iterations is costructed. Then a special auxiliary nonlinear integral equation is studied, the solution of which is constructed using simple successive approximations. After that, it is proved that the iterations introduced by us increase monotonically and are bounded from above by the solution of the aforementioned auxiliary integral equation. Further, using the appropriate conditions for nonlinearity and for the kernel, it is proved that the limit of these iterations is a solution to the original equation and exponentially decreases at infinity. Under an additional constraint on nonlinearity, the uniqueness of the constructed solution is established in a certain class of measurable functions. At the end of the work, specific examples of the kernel and nonlinearity of an applied nature are given for which all the conditions of the theorem proved are automatically satisfied.

Keywords: monotonicity, iteration, summable solution, convexity, kernel
Acknowledgements: The work was supported by the Science Committee of Armenia, in the frames of the research project No. 21T-1A047.
For citation: Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein integral equations on the semiaxis. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 169–179 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-169-179

Введение

Настоящая работа посвящена изучению и решению следующего класса нелинейных интегральных уравнений на полуоси:

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)H(t, f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty) \tag{1}$$

относительно искомой неотрицательной и измеримой функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро K — суммируемая и ограниченная функция на множестве $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющая следующим основным условиям:

$$K(x) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1,\ \nu(K) := \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx < 0, \tag{2}$$

причем считается, что последний интеграл абсолютно сходится.

Нелинейность $H(t, u)$ определена на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, причем удовлетворяет:

а) условию критичности: $H(t, 0) \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}^+$;

б) условию Каратеодори по аргументу u на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, т.е при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ измерима по t на $\mathbb{R}^+$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}^+$ данная функция непрерывна по u на $\mathbb{R}^+$;

в) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ монотонно возрастает по аргументу u на $\mathbb{R}^+$.

Для конкретных представлений ядра K и нелинейности H уравнение (1) возникает в различных областях естествознания. В частности, когда ядро K представляет вполне монотонную функцию, имеющую отрицательный первый момент, уравнение (1) возникает в теории переноса излучения в спектральных линиях, в теории марковских процессов и в кинетической теории газов (см. [1–5]). В случае когда ядро K допускает несимметричное гауссовское распределение: $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+c)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$, уравнение (1) встречается в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [6–8]).

Отметим, что в случае когда нелинейность $H(t, u)$ не зависит от переменной t: $H(t, u) = Q(u)$, где Q непрерывная монотонно возрастающая функция на некотором отрезке $[0, \eta]$, $(\eta > 0)$, причем $Q(0) = 0$, $Q(\eta) = \eta$, $Q(u) \geqslant u$, $u \in [0, \eta]$, уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [9, 10]. В случае когда $H(t, u) = u - \omega(t, u)$, где $\omega(t, u) \geqslant 0$, $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\omega(t, u) \downarrow$ по u полубесконечном интервале $[\delta, +\infty)$, $(\delta > 0)$, причем $\omega(t, u) \leqslant \overset{\circ}{\omega}(t + u)$, $t \geqslant 0$, $u \geqslant \delta$, $\overset{\circ}{\omega}(u) \geqslant 0$, $u \geqslant \delta$, $\overset{\circ}{\omega} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_0(\mathbb{R}^+)$ и $\overset{\circ}{\omega} \downarrow$ на $[\delta, +\infty)$ (здесь $L_1(\mathbb{R}^+)$ — пространство суммируемых функций на $\mathbb{R}^+$, а $C_0(\mathbb{R}^+)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$, имеющих нулевой предел в бесконечности), в работе [11] для уравнения (1) построено однопараметрическое семейство положительных и ограниченных решений, имеющих конечные положительные пределы в бесконечности.

Наконец, когда для нелинейности $H(t, u)$ мажорантой в смысле М. А. Красносельского служит линейная функция (по u) вида $c_0 u + \beta(t)$, $0 < c_0 \leqslant 1$, $\beta(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in L_1(\mathbb{R}^+)$, а минорантой для $H(t, u)$ служит экспоненциально убывающая функция специальной структуры, уравнение (1) изучалось в работе [12]. Следует также отметить, что для симметричных ядер K уравнение (1) при различных ограничениях на $H(t, u)$ исследовалось в работах [13–16].

В настоящей работе при существенно других условиях (слабых по сравнению с условиями из работы [12]) на нелинейности $H(t,u)$ мы докажем существование положительного ограниченного и суммируемого на $\mathbb{R}^+$ решения. Более того, мы также будем исследовать асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности. При дополнительных ограничениях на $H(t,u)$ мы установим единственность построенного решения в определенном классе измеримых функций.

В конце работы приводятся примеры функций $K(x)$ и $H(t,u)$, для которых условия теоремы выполняются.

1. Основные условия на K и на H. Формулировка основного результата

Прежде чем накладывать основные оценки на функцию $H(t,u)$, введем следующие обозначения. Пусть $G(u)$ — непрерывная монотонно возрастающая и выпуклая (вверх) на $\mathbb{R}^+$ функция, причем

$$G(0)=0, \quad \text{существует } G'(0)>1, \quad G'(0)<+\infty, \tag{3}$$

$$G(u)\leqslant G'(0)u, \quad u\in\mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Рассмотрим следующую функцию Дикмана (см. [6]):

$$\mathcal{L}(\lambda):=G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(y)e^{\lambda y}dy, \quad \lambda\geqslant 0, \tag{5}$$

предполагая, что интеграл в (5) сходится, когда $\lambda\in[0,\lambda_0]$, $\lambda_0>0$. Заметим, что $\mathcal{L}(0)=G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(y)dy=G'(0)>1$, $\mathcal{L}'(0)=G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(y)ydy<0$ (в силу условия (2)). С другой стороны, $\mathcal{L}''(\lambda)=G'(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(y)y^2e^{\lambda y}dy>0$ (последний интеграл может быть и бесконечным).

Следовательно, $\mathcal{L}(\lambda)$ представляет собой выпуклую (вниз) функцию на отрезке $[0,\lambda_0]$. В силу непрерывности функции $\mathcal{L}'(\lambda)$ существует число $\lambda^*\in[0,\lambda_0]$ такое, что $\mathcal{L}'(\lambda)<0$, $\lambda\in[0,\lambda^*]$. В дальнейшем предположим, что

$$\mathcal{L}(\lambda^*)<1. \tag{6}$$

Зафиксируем число λ^*. Теперь мы готовы накладывать последние два условия на нелинейность $H(t,u)$.

Предположим также, что

г) выполняется неравенство

$$H(t,e^{-\lambda^* t})\geqslant\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^* t}, \quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где число α задается согласно следующей формуле:

$$\alpha:=\int\limits_{-\infty}^{0}K(y)e^{\lambda^* y}dy; \tag{8}$$

д) существует измеримая функция $\gamma(t)$, определенная на множестве $\mathbb{R}^+$ со свойствами

$$\gamma(t) \geqslant \frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^* t}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \gamma(t)e^{\lambda^* t} \in M(\mathbb{R}^+) \tag{9}$$

($M(E)$ — пространство существенно органичных на E функций), такая, что

$$H(t,u) \leqslant G(u) + \gamma(t), \quad u \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть ядро $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (2) и (6), а нелинейность $H(t,u)$ — условиям а)–д). Тогда уравнение (1) обладает положительным ограниченным и суммируемым решением. Более того, $e^{\lambda^* x}f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Если дополнительно функция $H(t,u)$ удовлетворяет следующему условию Липшица по аргументу u на $\mathbb{R}^+$ равномерно относительно переменной $t \in \mathbb{R}^+$:*

е) существует число $L \in \left(0, \frac{G'(0)}{\mathcal{L}(\lambda^*)}\right)$ такое, что

$$|H(t,u_1) - H(t,u_2)| \leqslant L|u_1 - u_2|, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}^+,$$

то решение единственно в классе неотрицательных и измеримых на $\mathbb{R}^+$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $e^{\lambda^* x}f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$.

2. Об одном нелинейном вспомогательном интегральном уравнении

Рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на полуоси:

$$\phi(x) = \int_0^\infty K(x-t)G(\phi(t))dt + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

относительно искомой измеримой и неотрицательной функции $\phi(x)$, где

$$g(x) = \int_0^\infty K(x-t)\gamma(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Во-первых, заметим, что из свойств (6) и (9) следует, что $e^{\lambda^* x}f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Действительно, учитывая (6) и (9), из представления (12) будем иметь

$$e^{\lambda^* x}g(x) = e^{\lambda^* x}\int_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t}e^{\lambda^* t}\gamma(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}(e^{\lambda^* t}\gamma(t))\int_0^\infty K(x-t)e^{\lambda^*(x-t)}dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}(e^{\lambda^* t}\gamma(t))\int_{-\infty}^\infty K(y)e^{\lambda^* y}dy = \frac{\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)}\sup_{t\geqslant 0}(e^{\lambda^* t}\gamma(t)) := C < +\infty. \tag{13}$$

Во-вторых,

$$g(x) \geqslant e^{-\lambda^* x}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{14}$$

На самом деле, учитывая неравенство (9) и обозначение (8), получим

$$g(x) \geqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t}dt = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^x K(y)e^{-\lambda^*(x-y)}dy \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^* x}\int\limits_{-\infty}^0 K(y)e^{\lambda^* y}dy = e^{-\lambda^* x}, \quad x \geqslant 0.$$

Теперь рассмотрим следующие простые итерации для вспомогательного уравнения (11):

$$\begin{aligned} &\phi_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)G(\phi_n(t))dt + g(x), \\ &\phi_0(x) = g(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{15}$$

Используя неотрицательность ядра K, функции g, а также монотонность функции G и соотношение $G(0) = 0$, несложно проверить, что

$$\phi_n(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{16}$$

Докажем теперь, что

$$e^{\lambda^* x}\phi_n(x) \leqslant \frac{C}{1-\mathcal{L}(\lambda^*)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Неравенство (17) в случае $n = 0$ сразу следует из определения нулевого приближения с учетом неравенств (6) и (13). Предположим, что (17) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (15) с учетом неравенств (4) и (13), а также определения функции $\mathcal{L}(\lambda)$ будем иметь

$$e^{\lambda^* x}\phi_{n+1}(x) \leqslant C + e^{\lambda^* x}G'(0)\int\limits_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t}e^{\lambda^* t}\phi_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant C + \frac{CG'(0)}{1-\mathcal{L}(\lambda^*)}\int\limits_0^\infty K(x-t)e^{\lambda^*(x-t)}dt \leqslant C + \frac{C\mathcal{L}(\lambda^*)}{1-\mathcal{L}(\lambda^*)} = \frac{C}{1-\mathcal{L}(\lambda^*)}.$$

Так как свертка суммируемых и ограниченных функций представляет собой непрерывную функцию (см. [17]), то индукцией по n легко можно убедиться, что $\phi_n \in C(\mathbb{R}^+)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Итак, в силу (16) и (17) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x) = \phi(x)$, причем, согласно теореме Б. Леви (см. [18]), $\phi(x)$ является решением уравнения (11). Из (16) и (17) следует также оценка

$$g(x) \leqslant \phi(x) \leqslant \frac{Ce^{-\lambda^* x}}{1-\mathcal{L}(\lambda^*)}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

Снова используя непрерывность свертки суммируемых и ограниченных функций, заключаем, что $\phi \in C(\mathbb{R}^+)$.

3. Доказательство теоремы. Последовательные приближения для уравнения (1). Единственность решения

Перейдем теперь к основному уравнению (1). Рассмотрим следующие итерации для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x) = \int_0^\infty K(x-t)H(t, f_n(t))dt, \qquad f_0(x) = e^{-\lambda^* x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{19}$$

Индукцией по n докажем справедливость следующих фактов:
1) $f_n(x) \uparrow$ по n, $x \in \mathbb{R}^+$;
2) $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ измеримы на $\mathbb{R}^+$;
3) $f_n(x) \leqslant \phi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+$.

Сначала докажем, что $f_1(x) \geqslant f_0(x)$ и $f_1(x) \leqslant \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Используя условие г), положительность ядра K и обозначение (8), из (19) получим

$$f_1(x) \geqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t}dt \geqslant e^{-\lambda^* x} = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

С другой стороны, из условия $e)$ в силу (10), (2) и (11) имеем

$$f_1(x) \leqslant \int_0^\infty K(x-t)(G(\phi(t)) + \gamma(t))dt = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)G(\phi(t))dt = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Измеримость нулевого приближения сразу следует из непрерывности экспоненциальной функции. Предполагая, что $f_n(x)$ измерима по x на $\mathbb{R}^+$ для некоторого n и при этом используя условие Каратеодори (см. условие б)), из (19) получаем измеримость функции $f_{n+1}(x)$. Предполагая, что $f_n(x) \geqslant f_{n-1}(x)$ и $f_n(x) \leqslant \phi(x)$ при некотором натуральном n и используя монотонность функции $H(t, u)$, положительность ядра K, а также оценку (10), из (19) приходим к следующим неравенствам: $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ и $f_{n+1}(x) \leqslant \phi(x)$. Итак, в силу 1)–3) мы получаем поточечную сходимость последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$e^{-\lambda^* x} \leqslant f(x) \leqslant \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Снова используя условие б) и теорему Б. Леви, заключаем, что предельная функция $f(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$ удовлетворяет уравнению (1). Из (20) с учетом (18) следует, что $e^{\lambda^* x} f(x) \in M(\mathbb{R}^+)$. Перейдем теперь к доказательству единственности решения уравнения (1) в следующем классе измеримых функций:

$$\mathcal{P} := \{f(x) : f(x) \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}^+, \quad e^{\lambda^* x} f(x) \in M(\mathbb{R}^+)\}. \tag{21}$$

Предположим обратное: уравнение (1) имеет два решения f и $\tilde{f}$ из класса $\mathcal{P}$. Тогда, используя условие д), определение функции Дикмана и условие (6) для разности f и $\tilde{f}$, получим

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant L\int_0^\infty K(x-t)|f(t) - \tilde{f}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^\infty K(x-t)e^{-\lambda^* t}dt\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(e^{\lambda^* t}|f(t)-\tilde{f}(t)|)=$$

$$=Le^{-\lambda^* x}\int\limits_{-\infty}^x K(y)e^{\lambda^* y}dy\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(e^{\lambda^* t}|f(t)-\tilde{f}(t)|)\leqslant e^{-\lambda^* x}\frac{L\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}(e^{\lambda^* t}|f(t)-\tilde{f}(t)|),$$

из которого следует, что $\left(1-\frac{L\mathcal{L}(\lambda^*)}{G'(0)}\right)\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}(e^{\lambda^* x}|f(x)-\tilde{f}(x)|)\leqslant 0$.

Так как $L\in\left(0,\frac{G'(0)}{\mathcal{L}(\lambda^*)}\right)$, то из последнего неравенства сразу следует, что $f(x)=\tilde{f}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Теорема доказана.

4. Примеры ядра *K* и нелинейности *H*

Сперва приведем конкретные прикладные примеры ядра K:

А) $K(x)=\int\limits_a^b e^{-|x+c|s}G(s)ds$, $x\in\mathbb{R}$, $c>0$, где $G(s)>0$ — непрерывная функция на $[a,b)$ $(0<a<b\leqslant+\infty)$, причем $2\int\limits_a^b\frac{G(s)}{s}ds=1$;

Б) $K(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+c)^2}$, $\quad x\in\mathbb{R}$, $\quad c>0$.

Прямой проверкой можно убедиться, что для приведенных ядер выполняются условия (2). Приведем теперь содержательные примеры нелинейности $G(u)$:

ж) $G(u)=\gamma_0(1-e^{-u})$, $u\in\mathbb{R}^+$, $\gamma_0>1$ — числовой параметр;

з) $G(u)=\frac{\gamma_0(1+u-e^{-u})}{2}$, $\quad\gamma_0>1$, $\quad u\in\mathbb{R}^+$.

Выполнение условий (3) и (4) совершено очевидно. Проверим выполнение условия (6) на примере Б). Имеем

$$\mathcal{L}(\lambda)=\frac{G'(0)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-(y+c)^2}e^{\lambda y}dy=\gamma_0 e^{\frac{\lambda^2}{4}-c\lambda}.$$

Заметим, что $\mathcal{L}'(\lambda)=\gamma_0\left(\frac{\lambda}{2}-c\right)e^{\frac{\lambda^2}{4}-c\lambda}\leqslant 0$, когда $\lambda\in[0,2c]$,

$$\mathcal{L}''(\lambda)=\frac{\gamma_0}{2}e^{\frac{\lambda^2}{4}-c\lambda}+\gamma_0\left(\frac{\lambda}{2}-c\right)^2e^{\frac{\lambda^2}{4}-c\lambda}>0.$$

Итак, $\mathcal{L}(\lambda)\downarrow$ на отрезке $[0,2c]$ выпукла (вниз). Очевидно, что $\mathcal{L}(2c)=\gamma_0e^{-c^2}<1$ при $c>\sqrt{\ln\gamma_0}$. Итак, если $c\in(\sqrt{\ln\gamma_0},+\infty)$, то в качестве λ^* можно выбрать $\lambda^*=2c$.

Приведем теперь примеры для нелинейности $H(t,u)$. Рассмотрим следующий класс функций:

$$H(t,u)=\Lambda(t,u)\sqrt{G(u)e^{-\lambda^* t}},\quad (t,u)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\tag{22}$$

где $\Lambda(t,u)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ монотонно возрастающая по u на $\mathbb{R}^+$ и непрерывная по совокупности своих аргументов функция, удовлетворяющая следующему двойному неравенству:

$$\frac{1}{\alpha}\leqslant\Lambda(t,u)\leqslant æ,\quad (t,u)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\tag{23}$$

где $æ>\frac{1}{\alpha}$ — некоторое число.

Очевидно, что $H(t,0)=0$, $t\in\mathbb{R}^+$, ибо $G(0)=0$.

Здесь дополнительно предположим, что существует число $\eta \geqslant 1$ такое, что $G(\eta) = \eta$ (для примеров ж) и з) такое число всегда существует).

Из этого в силу соответствующих свойств функции G получаем, что $G(u) \geqslant u$, $u \in [0, \eta]$. Сперва проверим выполнение неравенства (7). В силу (23) и оценки $G(u) \geqslant u$, $u \in [0, \eta]$ из (22) имеем

$$H(t, e^{-\lambda^* t}) = \Lambda(t, e^{-\lambda^* t})\sqrt{G(e^{-\lambda^* t})e^{-\lambda^* t}} \geqslant \frac{1}{\alpha}\sqrt{e^{-2\lambda^* t}} = \frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^* t},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Монотонность функции $H(t, u)$ сразу следует из монотонности $\Lambda(t, u)$ (по u) и $G(u)$. Теперь выберем функцию $\gamma(t)$ (со свойствами (9)) так, чтобы выполнялось неравенство (10). В силу свойств функций Λ и G данное неравенство равносильно оценке:

$$\Lambda^2(t, u)G(u)e^{-\lambda^* t} \leqslant G^2(u) + 2G(u)\gamma(t) + \gamma^2(t), \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

или, что то же самое,

$$G^2(u) + G(u)(2\gamma(t) - \Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^* t}) + \gamma^2(t) \geqslant 0, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{24}$$

Заметим, что когда

$$\gamma(t) \geqslant \frac{1}{4}\Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^* t}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{25}$$

то неравенство (24) будет автоматически выполнено. Действительно, если выполняется (25), то

$$G^2(u) + G(u)(2\gamma(t) - \Lambda^2(t, u)e^{-\lambda^* t}) + \gamma^2(t) = \left(G(u) - \gamma(t) + \frac{\Lambda^2(t, u)}{2}e^{-\lambda^* t}\right)^2 +$$
$$+ e^{-\lambda^* t}\Lambda^2(t, u)\left(\gamma(t) - \frac{\Lambda^2(t, u)}{4}e^{-\lambda^* t}\right) \geqslant 0.$$

Очевидно, что если в качестве $\gamma(t)$ выбрать функцию $\gamma(t) = \max\{\frac{æ^2}{4}; 1\}e^{-\lambda^* t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, то условия (9), (10) и (25) будут выполнены. Условие Каратеодори для функции $H(t, u)$ выполняется в силу непрерывности $G(u)$ и $\Lambda(t, u)$. Для полноты изложения приведем также примеры $\Lambda(t, u)$:

- $\Lambda(t, u) = \frac{1 - \varepsilon e^{-u}}{\alpha(1 - \varepsilon)}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ — параметр, а число α задается согласно (8);
- $\Lambda(t, u) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{u}{u+1}\right)\Gamma(t)$, $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, где $\Gamma \in C(\mathbb{R}^+)$, $\Gamma(t) \geqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} \Gamma(t) < +\infty$.

В конце рассмотрим еще один класс функций, удовлетворяющих условиям а)–д):

$$H(t, u) = G(u) + B(t, u),\ (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

где $B(t, u)$ — непрерывная функция на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим условиям:

- $B(t, u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$;
- $B(t, e^{-\lambda^* t}) \geqslant \frac{1}{\alpha}e^{-\lambda^* t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$;
- $\sup\limits_{u \in \mathbb{R}^+} B(t, u) = \gamma(t), \quad t \in \mathbb{R}^+$.

В качестве $B(t, u)$ можно выбрать следующую функцию:

$$B(t, u) = \frac{\gamma(t)u}{u + \varepsilon e^{-\lambda^* t}}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет условию (9) и $\gamma(t) \geqslant \left(\frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right)e^{-\lambda^* t}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Список литературы

1. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
2. *Феллер Ф.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 т. Т. 2. Москва : Мир, 1967. 765 с.
3. *Cercignani C.* Theory and Application of the Boltzmann Equation. Edinburgh ; London : Scottish Academic Press, 1975. 415 p.
4. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 173, № 3. С. 497–504. https://doi.org/10.4213/tmf6965
5. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
6. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // Journal of Mathematical Biology. 1978. Vol. 6, iss. 2. P. 109–130. https://doi.org/10.1007/BF02450783
7. *Diekmann O.* Run for your life. A note on the asymptotic speed of propogation of an epidemic // Journal of Differential Equations. 1979. Vol. 33, iss. 1. P. 58–73. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9
8. *Сергеев А. Г., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // Труды Московского математического общества. 2019. Т. 80, вып. 1. С. 113–131.
9. *Хачатрян Х. А.* Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси // Доклады Академии наук. 2009. Т. 425, № 4. С. 462–465.
10. *Хачатрян Х. А.* Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200. https://doi.org/10.4213/im5402
11. *Хачатрян Х. А.* Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором // Известия НАН Армении. Математика. 2011. Т. 46, № 2. С. 71–86.
12. *Хачатрян Х. А.* О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2015. Т. 79, № 2. С. 205–224. https://doi.org/10.4213/im8245
13. *Арабаджян Л. Г.* Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Известия НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
14. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны // Теоретическая и математическая физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. https://doi.org/10.4213/tmf36
15. *Жуковская Л. В.* Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. https://doi.org/10.4213/tmf2043
16. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. https://doi.org/10.4213/im8580
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. Москва : Мир, 1975. 443 с.
18. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. Москва : Наука, 1981. 544 с.

References

1. Engibaryan N. B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, pp. 12–14. https://doi.org/10.1007/BF01014505
2. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 2. 2nd ed. Wiley, 1991. 704 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1967. 765 p.).

3. Cercignani C. *Theory and Application of the Boltzmann Equation*. Edinburgh, London, Scottish Academic Press, 1975. 415 p.
4. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. Qualitative difference between solutions for a model of the Boltzmann equation in the linear and nonlinear cases. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 172, iss. 3, pp. 1315–1320. https://doi.org/10.1007/s11232-012-0116-4
5. Kogan M. N. *Rarefied Gas Dynamics*. Springer, 1969. 400 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1967. 440 p.).
6. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, iss. 2, pp. 109–130. https://doi.org/10.1007/BF02450783
7. Diekmann O. Run for your life. A note on the asymptotic speed of propogation of an epidemic. *Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 33, iss. 1, pp. 58–73. https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90080-9
8. Sergeev A. G., Khachatryan Kh. A. On the solvability of a class of nonlinear integral equations in the problem of a spread of an epidemic. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 2019, vol. 80, pp. 95–111. https://doi.org/10.1090/mosc/286
9. Khachatryan Kh. A. Sufficient conditions for the solvability of the Urysohn integral equation on a half-line. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, pp. 246–249. https://doi.org/10.1134/S1064562409020264
10. Khachatryan Kh. A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity. *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 163–189. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002579
11. Khachatryan Kh. A. On a class of nonlinear integral equations with a noncompact operator. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2011, vol. 46, iss. 2, pp. 89–100. https://doi.org/10.3103/S106836231102004X
12. Khachatryan Kh. A. Positive solubility of some classes of non-linear integral equations of Hammerstein type on the semi-axis and on the whole line. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 411–430. https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002748
13. Arabadzhyan L. G. Solution of certain integral equations of the Hammerstein type. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 1997, vol. 32, iss. 1, pp. 17–24.
14. Vladimirov V. S., Volovich Y. I. Nonlinear dynamics equation in p-adic string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004. vol. 138, iss. 3, pp. 297–309. https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29
15. Zhukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 146, iss. 3, pp. 335–342. https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3
16. Khachatryan Kh. A. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, iss. 2, pp. 407–427. https://doi.org/10.1070/IM8580
17. Rudin W. *Functional Analysis*. 2nd ed. New York, McGraw-Hill, Inc., 1991. 441 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1975. 443 p.).
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsij i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Function and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1981. 544 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 08.08.2021
Принята к публикации / Accepted 21.09.2021
Опубликована / Published 31.05.2022