

## МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 180–195  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 180–195

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195>

Научная статья

УДК 539.3

### Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня

А. О. Ватульян<sup>1,2</sup>, С. А. Нестеров<sup>2</sup>✉

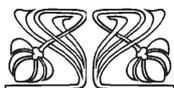
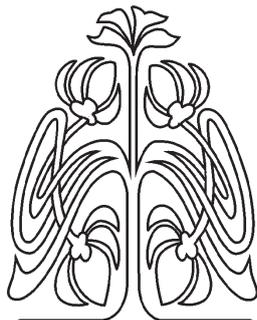
<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича, Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8-А

<sup>2</sup>Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук, Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53

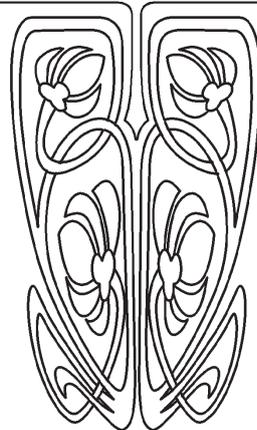
**Ватульян Александр Ованесович**, доктор физико-математических наук, <sup>1</sup>заведующий кафедрой теории упругости, <sup>2</sup>заведующий отделом дифференциальных уравнений, [aovatulyan@sfned.ru](mailto:aovatulyan@sfned.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

**Нестеров Сергей Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>, AuthorID: 808934

**Аннотация.** Представлен подход к решению обратной задачи об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. Рассмотрены две задачи термоупругости с различной тепловой нагрузкой на торцах стержня. В качестве входной информации выступают данные измерений температуры на торце стержня на конечном временном интервале. Прямые задачи после применения преобразования Лапласа решены на основе метода пристрелки и обращения трансформант на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Проведен анализ влияния законов изменения переменных характеристик на значения снимаемой в эксперименте входной информации. Решение нелинейной обратной задачи построено на основе итерационного процесса. Начальное приближение для итерационного процесса находится в классе линейных функций, коэффициенты которых определяют из условия минимального значения функционала невязки. Для нахождения поправок к законам



Научный  
отдел





изменения термомеханических характеристик на основе слабой постановки каждой прямой задачи и метода линеаризации получена система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Регуляризация системы интегральных уравнений осуществлена на основе метода А. Н. Тихонова. Проведены вычислительные эксперименты по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик при известных законах изменения остальных характеристик. Восстанавливались пары как монотонно возрастающих, так и монотонно убывающих функций.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный стержень, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, коэффициент температурного напряжения, метод пристрелки, идентификация, коэффициентная обратная задача термоупругости, система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Южного математического института — филиала Владикавказского научного центра РАН.

**Для цитирования:** Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 2. С. 180–195. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195> Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Solution of the inverse problem of two thermomechanical characteristics identification of a functionally graded rod

A. O. Vatulyan<sup>1</sup>, S. A. Nesterov<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I. I. Vorovich, 8-A Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia

<sup>2</sup>Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences, 53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

**Alexander O. Vatulyan**, [aovatulyan@sfnu.ru](mailto:aovatulyan@sfnu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>, AuthorID: 3469

**Sergey A. Nesterov**, [1079@list.ru](mailto:1079@list.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>, AuthorID: 808934

**Abstract.** An approach to solving the inverse problem of the simultaneous identification of two thermomechanical characteristics of a functionally graded rod is presented. Two problems of thermoelasticity with different heat loads at the ends of the rod are considered. The input information is the temperature measurement data at the end of the rod over a finite time interval. Direct problems after applying the Laplace transform are solved on the basis of the shooting method and inversion of transformants based on the expanding the original in a series in the shifted Legendre polynomials. The analysis of the influence of the variable characteristics change laws on the values of the input information taken in the experiment is carried out. The solution to the nonlinear inverse problem is based on an iterative process. The initial approximation for the iterative process is in the class of linear functions, the coefficients of which are determined from the condition of the minimum value of the residual functional. To find corrections to the laws of change in thermomechanical characteristics on the basis of a weak statement of each direct problem and the linearization method, a system of Fredholm integral equations of the 1st kind is obtained. The system of integral equations is regularized based on the method of A. N. Tikhonov. Computational experiments on the simultaneous reconstruction of two thermophysical characteristics with known laws of change in other characteristics are carried out. Pairs of both monotonically increasing and monotonically decreasing functions were reconstructed.



**Keywords:** functionally graded rod, heat conduction coefficient, specific heat capacity, thermal stress coefficient, shooting method, identification, coefficient inverse problem of thermoelasticity, system of Fredholm integral equations of the 1st kind

**Acknowledgements:** This work was supported by the Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Vatulyan A. O., Nesterov S. A. Solution of the inverse problem of two thermo-mechanical characteristics identification of a functionally graded rod. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 2, pp. 180–195 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Обычно расчеты, связанные с нахождением напряженно-деформированного состояния стержневых конструкций, находящихся в условиях высокотемпературного нагружения, проводят для однородных материалов. Однако в настоящее время в различных областях техники все шире стали использовать функционально-градиентные материалы (FGM) — неоднородные материалы с заданными свойствами [1]. В этих материалах, в отличие от слоистых композитов, удается избежать скачка термомеханических характеристик через поверхность раздела. Из-за сложной и многоступенчатой технологии изготовления FGM в конечном изделии могут присутствовать отклонения от заданных законов неоднородности. Поэтому требуется идентификация реальных свойств изделия после изготовления. Однако из-за того, что термомеханические характеристики являются функциями координат, они могут быть определены только неразрушающими методами контроля, теоретически опирающимися на аппарат коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики.

КОЗ термоупругости [2] — это задачи нахождения термомеханических характеристик (модулей упругости, плотности, коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, коэффициента температурного напряжения) как коэффициентов дифференциальных операторов уравнений термоупругости по дополнительной информации о полях перемещений или температуры, измеренной на части границы объекта, на некотором временном отрезке.

Из-за некорректности и нелинейности КОЗ в настоящее время актуальной задачей является построение экономных и устойчивых алгоритмов их решения. Наиболее распространенным методом решения КОЗ является построение функционала невязки и его минимизация каким-либо из градиентных методов [3, 4] или генетическим алгоритмом [5]. На основе такого подхода выполнено довольно большое количество исследований КОЗ теплопроводности [3–8] и теории упругости [9–11]. Однако для ряда материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [12]. При решении КОЗ термоупругости возникает проблема построения операторных уравнений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции.

Ранее авторами был разработан и апробирован численный метод решения одномерных нелинейных КОЗ теории упругости [13] и термоупругости [12, 14, 15], основанный на построении итерационного процесса. Для этого на основе слабой постановки прямой задачи и линеаризации была получена система линеаризованных операторных уравнений в трансформантах Лапласа [12]. Ограничившись восстановлением только одной из термомеханических характеристик при известных других, после перехода



от трансформант Лапласа к оригиналам была проведена идентификация термомеханических характеристик стержня [14] и цилиндра [15]. Начальное приближение определялось в классе линейных функций, коэффициенты которых определяют из условия минимального значения функционала невязки. Для нахождения поправок термомеханических характеристик на каждом шаге итерационного процесса решалось интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

Однако обычно на практике неизвестными являются несколько термомеханических характеристик. Поэтому обратная задача о реконструкции нескольких термомеханических характеристик неоднородных тел является актуальной.

В данной работе рассматривается КОЗ об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня. Рассмотрены две постановки задач термоупругости с различной тепловой нагрузкой на торцах стержня. Прямые задачи после применения преобразования Лапласа решены с использованием метода пристрелки и обращения трансформант на основе метода разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Решение обратных задач построено на основе итерационного процесса, на каждом шаге которого численно решалась система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В ходе вычислительных экспериментов восстанавливались пары как монотонно возрастающих, так и монотонно убывающих функций.

## 1. Постановка обратной задачи термоупругости для функционально-градиентного стержня

Рассмотрим КОЗ об определении законов изменения двух теплофизических характеристик функционально-градиентного стержня длины  $l$ . Торцы стержня  $x = 0$  жестко закреплен и на нем поддерживается нулевая температура, на другом торце  $x = l$ , свободном от напряжений, действует тепловой поток. В рамках тепловой диагностики идентификация переменных свойств может быть осуществлена по данным о температуре, измеренной на торце стержня, на конечном временном интервале. Поскольку неизвестными являются две теплофизические характеристики, то рассмотрим две задачи термоупругости с разной тепловой нагрузкой на торце  $x = l$ . В первой задаче на торце действует тепловой поток  $q_0te^{-t}$ ; во второй задаче — тепловой поток  $q_0H(t)$ , где  $H(t)$  — функция Хевисайда.

Постановка задачи 1 имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = c_\varepsilon(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = 0, \quad (4)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0te^{-t}, \quad (5)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (6)$$



Постановка задачи 2 совпадает с постановкой задачи 1 за исключением тепловых граничных условий (5), вместо которых ставятся условия

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k(l) \frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0 H(t). \quad (7)$$

Перейдем в (1)–(7) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая [14]:  $z = \frac{x}{l}$ ,  $\bar{k}(z) = \frac{k(x)}{k_0}$ ,  $\bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon(x)}{c_0}$ ,  $\bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x)}{\rho_0}$ ,  $\bar{E}(z) = \frac{E(x)}{E_0}$ ,  $\bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(x)}{\gamma_0}$ ,  $t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$ ,  $\tau = \frac{t}{t_1}$ ,  $W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}$ ,  $U = \frac{u}{l}$ ,  $\Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}$ ,  $\delta_0 = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 E_0}$ ,  $\beta = \frac{q_0 \gamma_0 l}{k_0 E_0}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{t_2}{t_1}$ . Здесь  $E_0, \rho_0, k_0, c_0, \gamma_0$  – некоторые характерные величины.

В дальнейшем в безразмерных формулах обозначим функции с индексами «I» и «II» как функции, отвечающие первой и второй постановке задач соответственно.

Тогда задача 1 в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{\partial \Omega_I}{\partial z} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U_I}{\partial \tau^2}, \quad z \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \infty), \quad (8)$$

$$\Omega_I = \bar{E}(z) \frac{\partial U_I}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W_I, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}(z) \frac{\partial W_I}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W_I}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U_I}{\partial z \partial \tau}, \quad z \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \infty), \quad (10)$$

$$U_I(0, \tau) = 0, \quad \Omega_I(1, \tau) = 0, \quad (11)$$

$$W_I(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W_I}{\partial z}(1, \tau) = \beta \tau e^\tau, \quad (12)$$

$$W_I(z, 0) = U_I(z, 0) = \frac{\partial U_I}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Обезразмеренная постановка задачи 2 отличается от задачи 1 только тепловыми граничными условиями. Вместо граничных условий (12) имеем

$$W_{II}(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W_{II}}{\partial z}(1, \tau) = \beta H(\tau). \quad (14)$$

Множитель  $\varepsilon_0$ , стоящий в правой части уравнения движения (8), очень мал ( $10^{-16} \dots 10^{-12}$ ), поэтому в дальнейшем для упрощения расчетов будем рассматривать квазистатические постановки прямых задач термоупругости, не учитывающих инерционные члены, т.е.  $\frac{\partial \Omega_I}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \Omega_{II}}{\partial z} = 0$ .

Прямая задача термоупругости состоит в нахождении функций  $W_I(z, \tau)$ ,  $U_I(z, \tau)$  из (8)–(13) по известным термомеханическим характеристикам ( $\bar{E}(z)$ ,  $\bar{\rho}(z)$ ,  $\bar{c}(z)$ ,  $\bar{k}(z)$ ,  $\bar{\gamma}(z)$ ).

Особенности идентификации механических характеристик неоднородных тел исследованы в [13]. Мы же подробно рассмотрим особенности идентификации теплофизических характеристик.

В обратной задаче требуется одновременно восстановить две теплофизические характеристики при известных остальных по дополнительной информации о торцевой температуре  $f_I(\tau)$ ,  $f_{II}(\tau)$ , измеренной в ходе проведения двух экспериментов с тепловой нагрузкой, моделируемой граничными условиями (12) и (14) соответственно:

$$W_I(1, \tau) = f_I(\tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (15)$$

$$W_{II}(1, \tau) = f_{II}(\tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (16)$$



## 2. Решение прямой задачи термоупругости

При произвольных законах изменения термомеханических характеристик прямые задачи вида (8)–(13) могут быть решены лишь численно, например методом стрельки. Применим его к решению поставленных прямых задач. Для этого применим преобразование Лапласа к уравнениям равновесия (8), теплопроводности (10), граничным условиям (11), (12) с учетом начальных условий (13) и того, что  $\tilde{\Omega}(z, p) = 0$ , после некоторых преобразований перейдем к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\frac{d\tilde{W}_I}{dz} = \frac{1}{k(z)}\tilde{Q}_I(z, p), \quad (17)$$

$$\frac{d\tilde{Q}_I}{dz} = p \left( \bar{c}(z) + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2(z)}{\bar{E}(z)} \right) \tilde{W}_I(z, p), \quad (18)$$

$$\frac{d\tilde{U}_I}{dz} = \frac{\bar{\gamma}(z)}{\bar{E}(z)}\tilde{W}_I(z, p). \quad (19)$$

Далее для 1-й задачи методом Рунге – Кутта решается вспомогательная задача Коши, состоящая из системы дифференциальных уравнений (17)–(19) со следующими условиями на торце  $z = 0$ :  $\tilde{U}_1(0) = 0$ ,  $\tilde{W}_1(0) = 0$ ,  $\tilde{Q}_1(0) = 1$ . Составляются выражения  $\tilde{U}_I = \alpha_1 \tilde{U}_1$ ,  $\tilde{W}_I = \alpha_1 \tilde{W}_1$ ,  $\tilde{Q}_I = \alpha_1 \tilde{Q}_1$ . Неизвестная константа  $\alpha_1$  определяется путем удовлетворения условию на торце  $z = 1$ :  $\tilde{Q}_I(1, p) = \frac{\beta}{(p+1)^2}$ .

Для 2-й задачи решается вспомогательная задача Коши, состоящая из системы дифференциальных уравнений (17)–(19) со следующими условиями на торце  $z = 0$ :  $\tilde{U}_2(0) = 0$ ,  $\tilde{W}_2(0) = 1$ ,  $\tilde{Q}_2(0) = 0$ . Составляются выражения  $\tilde{U}_{II} = \alpha_2 \tilde{U}_2$ ,  $\tilde{W}_{II} = \alpha_2 \tilde{W}_2$ ,  $\tilde{Q}_{II} = \alpha_2 \tilde{Q}_2$ . Неизвестная константа  $\alpha_2$  определяется путем удовлетворения условию на торце  $z = 1$ :  $\tilde{Q}_{II}(1, p) = \frac{\beta}{p}$ .

После нахождения решений прямых задач в трансформантах для каждого значения параметра  $p = 1, 2, \dots$  для нахождения оригиналов функций в работе применялось обращение преобразования Лапласа на основе метода разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. На примере однородного стержня проведено сравнение результатов, полученных предложенным методом решения прямой задачи с аналитическим решением. Выяснено, что для того чтобы погрешность вычисления оригиналов температуры для времени  $\tau \geq 0.01$  не превосходила 1%, достаточно ограничиться 50 членами ряда в разложении по смещенным многочленам Лежандра.

Важным этапом при решении обратных задач является анализ влияния законов изменения переменных характеристик на значения снимаемой в эксперименте входной информации.

Проведен анализ влияния законов изменения теплофизических характеристик и параметра связанности  $\delta_0$  на температуру, измеренную на торце стержня  $z = 1$ , которая выступает при решении обратных задач в качестве входной информации. Выяснено, что законы изменения коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости для рассматриваемых задач оказывают сильное влияние на торцевую температуру при любом параметре связанности  $\delta_0 = 0.01 \dots 0.4$ . Влияние же коэффициента температурных напряжений на торцевую температуру сильно зависит от величины параметра связанности и оказывается существенным только при  $\delta_0 \geq 0.2$ .

На рис. 1–3 показаны графики  $W_I(1, \tau)$  и  $W_{II}(1, \tau)$  для различных наборов законов изменения свойств материала при  $\beta = 1$ .



Так, на рис. 1, для того чтобы показать влияние коэффициента теплопроводности  $\bar{k}(z)$  на торцевую температуру, были построены графики  $W_I(1, \tau)$  и  $W_{II}(1, \tau)$  при  $\delta_0 = 0.03$  и двух наборах законов изменения свойств материала: 1)  $\bar{k}(z) = 1$ ,  $\bar{c}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 3z$  (сплошная линия); 2)  $\bar{c}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = \bar{k}(z) = 1 + 3z$  (пунктир).

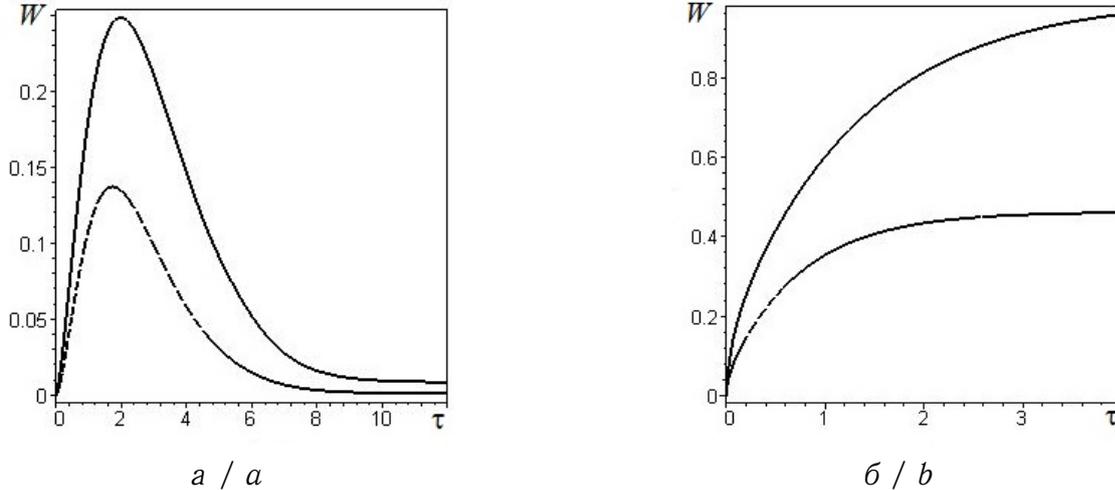


Рис. 1. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения коэффициента теплопроводности: а –  $W_I(1, \tau)$ ; б –  $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 1. End temperature graphs plotted for various laws of change in the heat conduction coefficient: а –  $W_I(1, \tau)$ ; б –  $W_{II}(1, \tau)$

Для оценки влияния законов изменения удельной теплоемкости  $\bar{c}(z)$  аналогично на рис. 2 построены графики торцевой температуры при  $\delta_0 = 0.03$  и двух наборах законов изменения свойств материала: 1)  $\bar{c}(z) = 1$ ,  $\bar{k}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2e^{-2z}$  (сплошная линия); 2)  $\bar{c}(z) = \bar{k}(z) = \bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2e^{-2z}$  (пунктир).

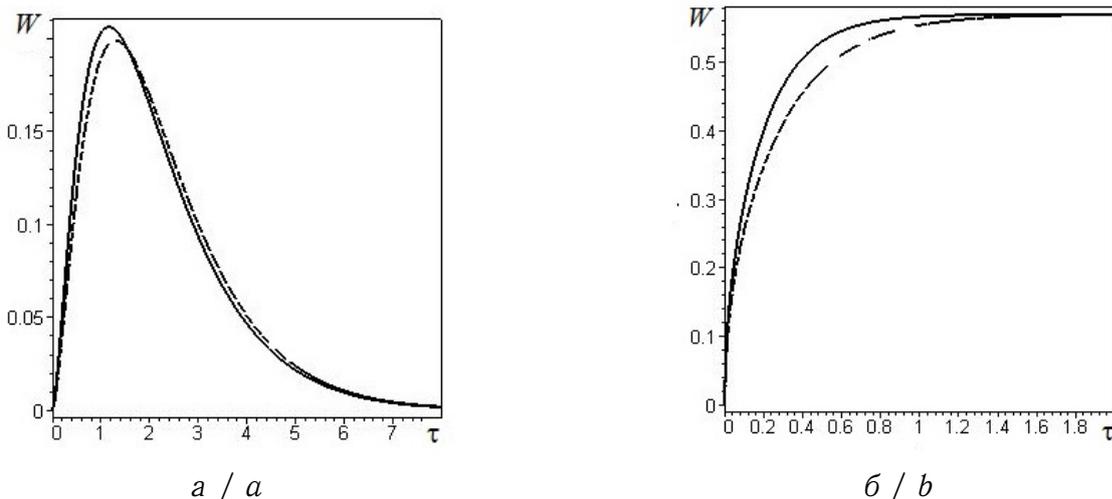


Рис. 2. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения удельной теплоемкости: а –  $W_I(1, \tau)$ ; б –  $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 2. End temperature graphs plotted for various laws of change in the heat capacity change: а –  $W_I(1, \tau)$ ; б –  $W_{II}(1, \tau)$



На рис. 3 показано влияние коэффициента температурного напряжения  $\bar{\gamma}(z)$  на торцевую температуру неоднородного стержня при большом параметре связанности  $\delta_0 = 0.4$ . Рассмотрены следующие два набора законов изменения свойств материала: 1)  $\bar{\gamma}(z) = 1$ ,  $\bar{k}(z) = \bar{c}(z) = \bar{E}(z) = 2 + \cos(3z)$  (сплошная линия); 2)  $\bar{k}(z) = \bar{c}(z) = \bar{E}(z) = \bar{\gamma}(z) = 2 + \cos(3z)$  (пунктир).

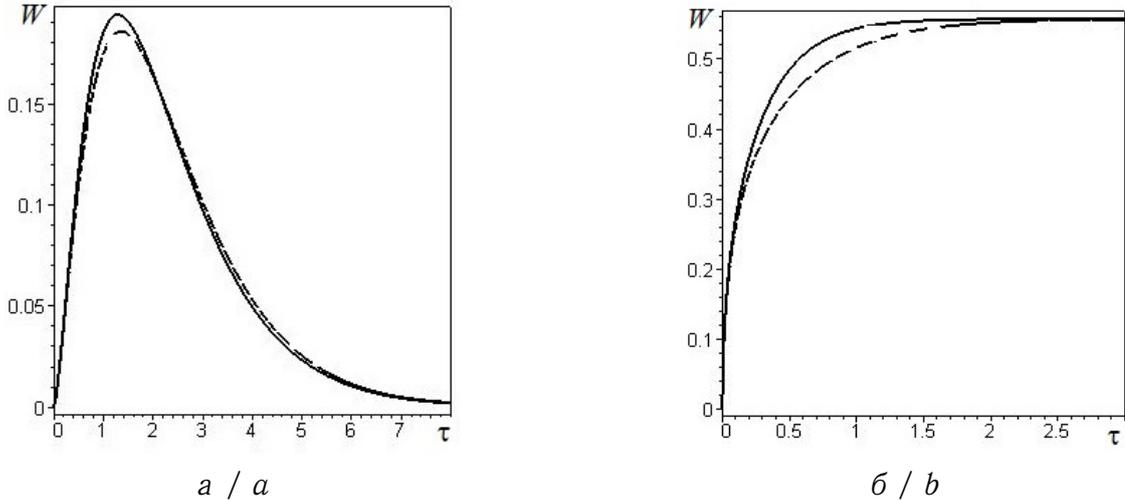


Рис. 3. Графики торцевой температуры, построенные при различных законах изменения коэффициента температурного напряжения: а —  $W_I(1, \tau)$ ; б —  $W_{II}(1, \tau)$

Fig. 3. End temperature graphs plotted for various laws of variation of the thermal stress coefficient: а —  $W_I(1, \tau)$ ; б —  $W_{II}(1, \tau)$

Графики торцевой температуры на рис. 2 для различных наборов законов удельной теплоемкости и на рис. 3 для различных наборов законов коэффициента температурных напряжений отличаются друг от друга незначительно, что делает невозможным одновременную реконструкцию удельной теплоемкости и коэффициента температурных напряжений.

### 3. Решение обратной задачи термоупругости

КОЗ термоупругости является нелинейной задачей. Построим ее решение на основе итерационного процесса, воспользовавшись техникой, описанной в работе [12]. Записав для задач 1 и 2 слабые постановки в трансформантах Лапласа и используя метод линеаризации для нахождения поправок теплофизических характеристик  $\delta\bar{a}^{(n-1)}$  ( $\delta\bar{k}^{(n-1)}$ ,  $\delta\bar{c}^{(n-1)}$ ,  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$ ) на  $(n - 1)$ -й итерации, была получена система двух операторных уравнений 1-го рода:

$$(p + 1)^2 \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p + 1)^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz + \delta_0 p(p + 1)^2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_I^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_I^{(n-1)} dz = \beta(\tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p)), \quad (20)$$

$$p \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz + \delta_0 p^2 \int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} \frac{d\tilde{U}_{II}^{(n-1)}}{dz} \tilde{W}_{II}^{(n-1)} dz = \beta(\tilde{f}_{II}(p) - \tilde{W}_{II}^{(n-1)}(1, p)). \quad (21)$$



Исходя из анализа влияния законов изменения теплофизических характеристик на торцевую температуру, рассмотрено два различных случая одновременной идентификации двух теплофизических характеристик.

1. Пусть  $\bar{\gamma}(z)$  известна. Необходимо определить  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{c}(z)$ .

В этом случае, полагая в (20), (21)  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)} = 0$ , получим

$$(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_I^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p(p+1)^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_I^{(n-1)})^2 dz = \beta(\tilde{f}_I(p) - \tilde{W}_I^{(n-1)}(1, p)), \quad (22)$$

$$p \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} \left( \frac{dW_{II}^{(n-1)}}{dz} \right)^2 dz + p^2 \int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}_{II}^{(n-1)})^2 dz = \beta(\tilde{f}_{II}(p) - \tilde{W}_{II}^{(n-1)}(1, p)). \quad (23)$$

Обращая операторные уравнения в трансформантах (22), (23), получим систему операторных уравнений в оригиналах, которая является системой интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода:

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} R_{11}(z, \tau) + \delta\bar{c}^{(n-1)} R_{12}(z, \tau)) dz = f_I(\tau) - W_I^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (24)$$

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} R_{21}(z, \tau) + \delta\bar{c}^{(n-1)} R_{22}(z, \tau)) dz = f_{II}(\tau) - W_{II}^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (25)$$

Здесь ядра (24), (25) имеют вид

$$R_{11}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \left( \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial^3 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau^2} \right) \times \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1,$$

$$R_{12}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \left( W_I^{(n-1)}(z, \tau_1) + 2 \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau^2} \right) \times \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1,$$

$$R_{21}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial^2 W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z} d\tau_1,$$

$$R_{22}(z, \tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1.$$



2. Пусть  $\bar{c}(z)$  известна. Необходимо определить  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$ .

В этом случае, полагая в (20), (21)  $\delta\bar{c}^{(n-1)} = 0$ , после обращения трансформант получим систему операторных уравнений в оригиналах для нахождения поправок  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$ ,  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$ :

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{11}(z, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{12}(z, \tau)) dz = f_I(\tau) - W_I^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_1, b_1], \quad (26)$$

$$\int_0^1 (\delta\bar{k}^{(n-1)} M_{21}(z, \tau) + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_{22}(z, \tau)) dz = f_{II}(\tau) - W_{II}^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [a_2, b_2]. \quad (27)$$

Здесь ядра (26), (27) имеют вид

$$\begin{aligned} M_{11}(z, \tau) &= R_{11}(z, \tau), \quad M_{21}(z, \tau) = R_{21}(z, \tau), \\ M_{12}(z, \tau) &= \frac{\delta_0}{\beta} \int_0^\tau \left( W_I^{(n-1)}(z, \tau_1) + 2 \frac{\partial W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 W_I^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau^2} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial^2 U_I^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z \partial \tau} d\tau_1, \\ M_{22}(z, \tau) &= \frac{\delta_0}{\beta} \int_0^\tau \frac{\partial W_{II}^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_{II}^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial z \partial \tau} d\tau_1. \end{aligned}$$

На основе системы операторных уравнений вида (24)–(27) можно организовать итерационный процесс для определения искомых характеристик.

Итерационный процесс стартует с выбора начальных приближений двух функций, которые определяются в классе линейных функций  $\bar{a}_1^{(0)} = m_1 + m_2 z$ ,  $\bar{a}_2^{(0)} = m_3 + m_4 z$  на основе минимизации функционала невязки

$$J = \int_{a_1}^{b_1} (f_I(\tau) - W_I(1, \tau))^2 d\tau + \int_{a_2}^{b_2} (f_{II}(\tau) - W_{II}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (28)$$

на двух множествах  $A_1$  и  $A_2$ , построенных по априорной информации об ограниченности искомых функций  $0 < a_1^- \leq \bar{a}_1(z) \leq a_1^+$ ,  $0 < a_2^- \leq \bar{a}_2(z) \leq a_2^+$ ,  $z \in [0, 1]$ . Здесь  $W_I(1, \tau)$  и  $W_{II}(1, \tau)$  — решения задач 1 и 2 в точке  $z = 1$  при заданных законах  $\bar{a}_1^{(0)}$ ,  $\bar{a}_2^{(0)}$ , где параметры  $m_1, m_2, m_3, m_4$  выбраны из соответствующих множеств  $A_1$  и  $A_2$ . Численная реализация этого подхода осуществляется путем замены интегральных операторов в правой части (28) на конечные суммы, вычислением их значений для каждого набора точек на сетках разбиений множеств  $A_1$  и  $A_2$  и выбором точек, на котором достигается наименьшее значение функционала  $J$ .

Далее осуществляется корректировка текущих законов изменения термомеханической характеристики путем нахождения двух поправок  $\delta\bar{a}_1^{(n-1)}$ ,  $\delta\bar{a}_2^{(n-1)}$  из решения соответствующих систем ИУФ 1-го рода. После нахождения поправок строятся новые приближения  $\bar{a}_1^{(n)} = \bar{a}_1^{(n-1)} + \delta\bar{a}_1^{(n-1)}$ ,  $\bar{a}_2^{(n)} = \bar{a}_2^{(n-1)} + \delta\bar{a}_2^{(n-1)}$ . Далее процесс замыкается и повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто условие остановки: достижения некоторого порогового значения функционала невязки (28), равного  $10^{-4}$ , или достижения предельного количества итераций, равного 20.



При этом следует отметить, что основная сложность реализации этого процесса состоит в построении численного решения систем ИУФ 1-го рода. Поскольку решение системы ИУФ 1-го рода является некорректной задачей, то для его регуляризации применяется метод А. Н. Тихонова [16]. Для этого вводится равномерное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на  $n$  отрезков точками  $z_j = \Delta z (j - 1)$ ,  $j = 1 \dots n$ , где  $\Delta z = \frac{1}{n-1}$  — шаг разбиения по безразмерной координате и равномерное разбиение безразмерных временных отрезков  $[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  на  $m$  отрезков точками  $\tau_{1i} = \Delta \tau_1 (i - 1)$ ,  $\tau_{2i} = \Delta \tau_2 (i - 1)$ ,  $i = 1 \dots m$ , где  $\Delta \tau_1 = \frac{b_1 - a_1}{m-1}$ ,  $\Delta \tau_2 = \frac{b_2 - a_2}{m-1}$  — шаги разбиения по безразмерному времени.

Согласно методу Тихонова решение обратной задачи сводится к решению регуляризованной системы уравнений:

$$B_\alpha y = F_\alpha, \tag{29}$$

где  $B_\alpha = B + \alpha C$ ,  $B = A^T A$ ,  $F_\alpha = A^T b$ ,  $A^T$  — транспонированная матрица  $A$ ,  $C = E + C_0$ ,  $E$  — единичная матрица,  $\alpha$  — параметр регуляризации, который выбирается по обобщенной невязке согласно [16].

При этом компоненты векторов  $y$ ,  $b$  и матрицы  $A$  имеют вид

$$y_j = \begin{cases} \bar{a}_1(z_j), & j = 1 \dots n, \\ \bar{a}_2(z_{j-n}), & j = n + 1 \dots 2n, \end{cases} \quad b_i = \begin{cases} f_I(\tau_i), & i = 1 \dots m, \\ f_{II}(\tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} R_{11}(z_j, \tau_i), & i = 1 \dots m, j = 1 \dots n, \\ R_{12}(z_{j-n}, \tau_i), & i = 1 \dots m, j = n + 1 \dots 2n, \\ R_{21}(z_j, \tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, j = 1 \dots n, \\ R_{22}(z_{j-n}, \tau_{i-m}), & i = m + 1 \dots 2m, j = n + 1 \dots 2n, \end{cases}$$

$C_0$  — матрица размером  $2n \times 2n$ , которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} & 0 \dots & 0 \\ -\frac{1}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} \dots & 0 \\ \dots & \dots & \frac{1}{\Delta z^2} & -\frac{1}{\Delta z^2} \\ \dots & \dots & -\frac{1}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} \end{pmatrix}.$$

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

В данном разделе представлены результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик в классах степенных, логарифмических, тригонометрических и экспоненциальных функций. В вычислениях принято  $\beta = 1$ ,  $n = 31$ .

Найдены наиболее информативные интервалы для измерения входной информации. В случае тепловой торцевой нагрузки, соответствующей 1-й постановке задачи, наиболее информативным является отрезок  $[a_1, b_1] = [0.04, 0.72]$ , а при 2-й постановке задачи — отрезок  $[a_2, b_2] = [0.03, 0.48]$ . Съём дополнительной информации происходил в 11 точках (параметр  $m = 11$ ) внутри выбранных информативных отрезков.

На рис. 4–7 представлены результаты реконструкции пар теплофизических характеристик ( $\bar{c}(z)$  и  $\bar{k}(z)$ ), ( $k(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$ ). При этом сплошной линией изображен точный закон неоднородности, точками — восстановленный.

В первой серии экспериментов восстанавливалась пара функций  $\bar{c}(z)$ ,  $\bar{k}(z)$  при известных  $\bar{\gamma}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2z$  и  $\delta_0 = 0.03$ .

Сначала были проведены эксперименты по одновременной реконструкции двух характеристик, имеющих монотонно возрастающие законы неоднородности:  $\bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$ ,  $\bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$  (рис. 4). Начальные приближения коэффициентов:



$\bar{k}_0(z) = 0.45 + 0.5z$ ,  $\bar{c}_0(z) = 0.5 + 0.45z$ . Потребовалось 16 итераций; максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 6%.

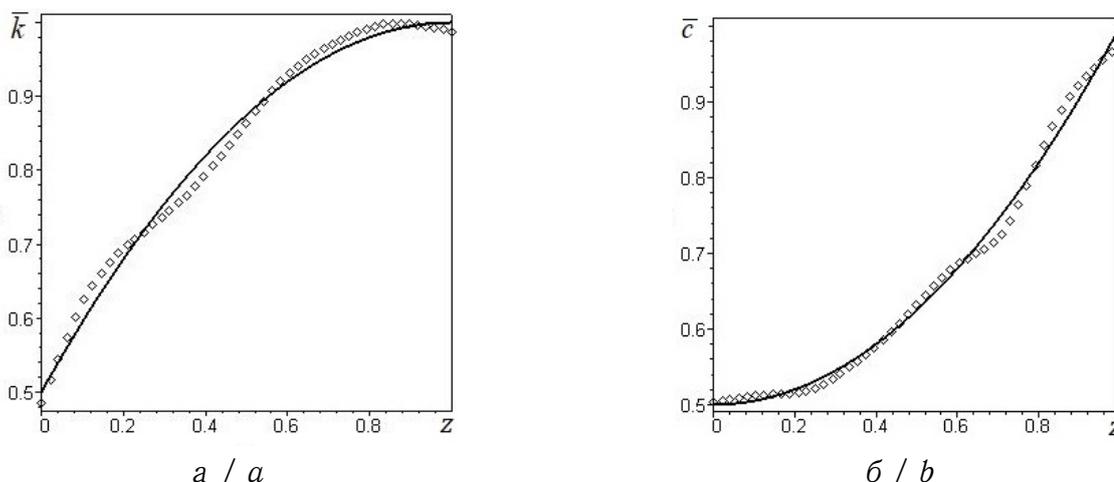


Рис. 4. Результаты реконструкции возрастающих функций:  $a - \bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$ ;  
 $b - \bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$   
 Fig. 4. Results of reconstruction of increasing functions:  $a - \bar{k}(z) = 1 - 0.5(z - 1)^2$ ;  
 $b - \bar{c}(z) = 0.5(1 + z^2)$

Затем были проведены эксперименты по одновременной реконструкции двух характеристик, имеющих монотонно убывающие законы неоднородности:  $\bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$ ,  $\bar{c}(z) = 1.2 \cos(z)$  (рис. 5). Начальные приближения коэффициентов:  $\bar{k}_0(z) = 1.45 - 0.9z$ ,  $\bar{c}_0(z) = 1.25 - 0.6z$ . Потребовалось 14 итераций; максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 5%.

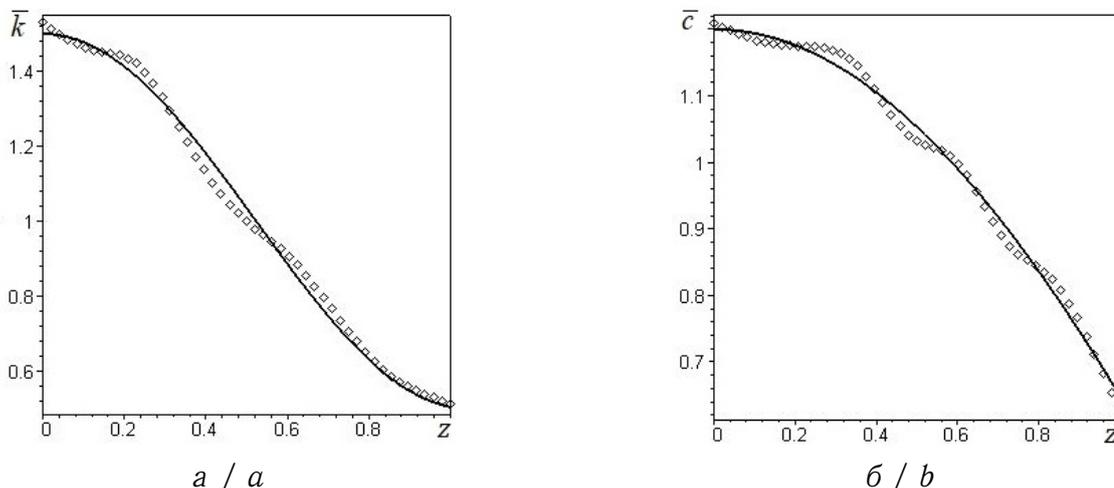


Рис. 5. Результаты реконструкции убывающих функций:  $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$ ;  
 $b - \bar{c}(z) = \cos(z)$   
 Fig. 5. The results of the reconstruction of decreasing functions:  $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.5 \cos(3z)$ ;  
 $b - \bar{c}(z) = \cos(z)$

Во второй серии экспериментов восстанавливалась пара функций  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$  при известных  $\bar{c}(z) = \bar{E}(z) = 1 + 2z$ . При этом одновременная реконструкция  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$  оказалась возможной только при параметре связанности  $\delta_0 \geq 0.2$ .



На рис. 6 показаны результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик, имеющих монотонно возрастающие законы неоднородности:  $\bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$ ,  $\bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$  при  $\delta_0 = 0.4$ . Начальные приближения коэффициентов:  $\bar{k}_0(z) = 1.2 + 1.25z$ ,  $\bar{\gamma}_0(z) = 1 + 1.45z$ . Выход из итерационного процесса произошел по предельному количеству итераций. При этом на последней итерации максимальная погрешность восстановления двух функций не превысила 8%.

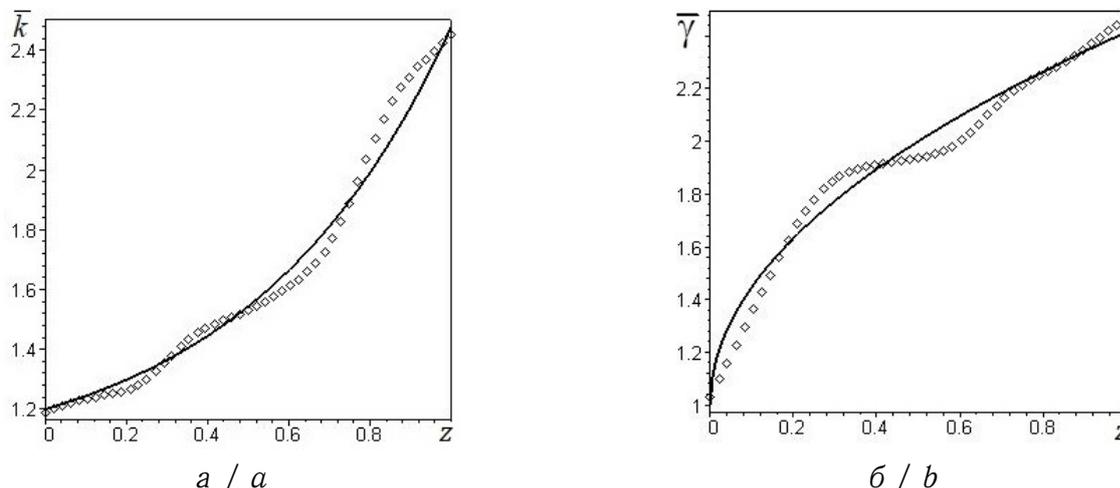


Рис. 6. Результаты реконструкции возрастающих функций:  $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$ ;  
 $b - \bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$

Fig. 6. Results of reconstruction of increasing functions:  $a - \bar{k}(z) = 1 + 0.2e^{2z}$ ;  
 $b - \bar{\gamma}(z) = 1 + \sqrt{2z}$

На рис. 7 показаны результаты вычислительных экспериментов по одновременной реконструкции двух теплофизических характеристик, имеющих монотонно убывающие законы неоднородности:  $\bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$ ,  $\bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$  при  $\delta_0 = 0.4$ . Начальные приближения коэффициентов:  $\bar{k}^{(0)}(z) = 2 - 0.9z$ ,  $\bar{\gamma}_0(z) = 2.1 - 1.85z$ .

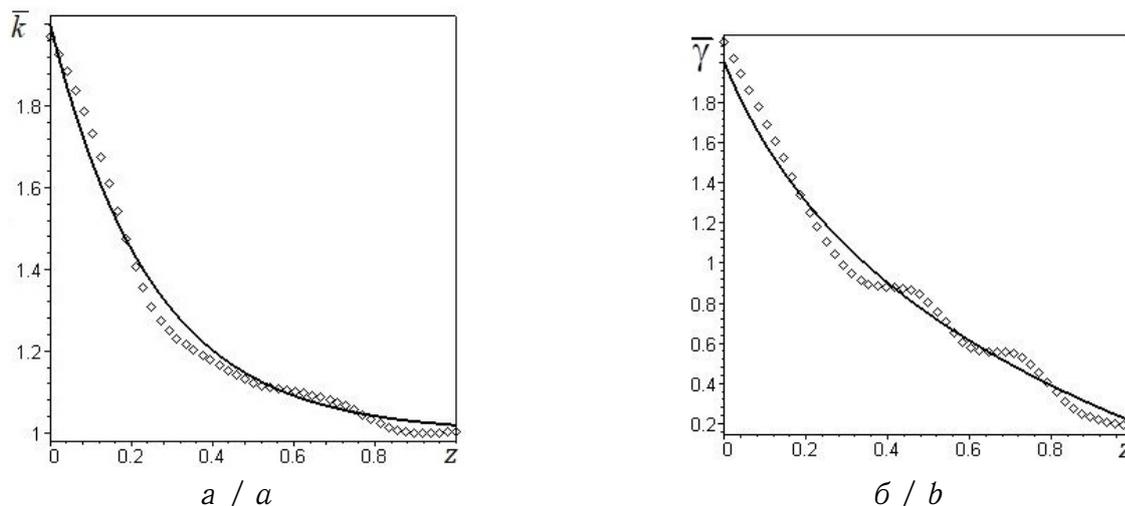


Рис. 7. Результаты реконструкции убывающих функций:  $a - \bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$ ;  
 $b - \bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$

Fig. 7. The results of the reconstruction of decreasing functions:  $a - \bar{k}(z) = 1 + e^{-4z}$ ;  
 $b - \bar{\gamma}(z) = 2 - \ln(1 + 5z)$



Максимальная погрешность восстановления двух функций на 20-й итерации не превысила 7%.

## Заключение

Исследована обратная задача об одновременной идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня по дополнительной информации, полученной в результате проведения двух вычислительных экспериментов с различным типом торцевой нагрузки. Прямые задачи после обезразмеривания и преобразования Лапласа решались с использованием метода пристрелки и обращения трансформант на основе разложения оригинала в ряд по смещенным многочленам Лежандра. Для нахождения двух поправок термомеханических характеристик в итерационном процессе получена система интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что: 1) на результат реконструкции пары функций ( $\bar{c}(z)$  и  $\bar{k}(z)$ ) величина параметра связанности  $\delta_0$  оказывает небольшое влияние, в то же время успешная реконструкция пары ( $\bar{k}(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$ ) возможна только при  $\delta_0 \geq 0.2$ ; 2) пары функций  $\bar{c}(z)$  и  $\bar{k}(z)$  восстанавливаются с меньшей погрешностью (не превышающей 6%), чем пары  $\bar{k}(z)$  и  $\bar{\gamma}(z)$ .

## Список литературы

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60, iss. 5. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел : Изд-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1988. 288 с.
4. Razzaghi H., Kowsary F., Ashjaee M. Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient // Applied Thermal Engineering. 2019. Vol. 154. P. 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068>
5. Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems // Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals. 1995. Vol. 28, iss. 3. P. 293–306. <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
6. Dulikravich G. S., Reddy S. R., Pasqualetto M. A., Colaco M. J., Orlande H. R., Coverston J. Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2016. Vol. 24. P. 181–194. <https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057>
7. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2018. Vol. 34, iss. 4. P. 1370–1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
8. Helmig T., Al-Sibai F., Kneer R. Estimating sensor number and spacing for inverse calculation of thermal boundary conditions using the conjugate gradient method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. Vol. 153. Art. 119638. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119638>
9. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // Meccanica. 2003. Vol. 38. P. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
10. Grediac M., Hild F., Pineau A. Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics. Great Britain : Wiley-ISTE, 2013. 485 p. <https://doi.org/10.1002/9781118578469>



11. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, iss. 14–15. P. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону ; Таганрог : Изд-во Южного федерального ун-та, 2019. 146 с.
13. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020. Vol. 43, iss. 11. P. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 767–773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
15. Ватульян А. О., Нестеров С. А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 1. С. 35–47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
16. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1990. 230 с.

### References

1. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 5, pp. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Diagnostics Problems for Inhomogeneous Thermoelastic Media]. Orel, OrelGTU Publ., 2002. 168 p. (in Russian).
3. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S. V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-posed Problems]. Moscow, Nauka, 1988. 288 p. (in Russian).
4. Razzaghi H., Kowsary F., Ashjaee M. Derivation and application of the adjoint method for estimation of both spatially and temporally varying convective heat transfer coefficient. *Applied Thermal Engineering*, 2019, vol. 154, pp. 63–75. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068>
5. Raudensky M., Woodbary K. A., Kral J. Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 1995, vol. 28, iss. 3, pp. 293–306. <https://doi.org/10.1080/10407799508928835>
6. Dulikravich G. S., Reddy S. R., Pasqualetto M. A., Colaco M. J., Orlande H. R., Coverston J. Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. <https://doi.org/10.1515/jiip-2015-0057>
7. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2018, vol. 34, iss. 4, pp. 1370–1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
8. Helmig T., Al-Sibai F., Kneer R. Estimating sensor number and spacing for inverse calculation of thermal boundary conditions using the conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, vol. 153, Art. 119638. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119638>
9. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach. *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535–545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
10. Grediac M., Hild F., Pineau A. *Full-Field Measurements and Identification in Solid Me-*



- chanics. Great Britain, Wiley-ISTE, 2013. 485 p. <https://doi.org/10.1002/9781118578469>
11. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, vol. 44, iss. 14–15, pp. 4978–5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
  12. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. *Koeffitsiyentnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics]. Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Publ., 2019. 146 p. (in Russian).
  13. Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D. Concerning an approach to identifying the Lamé parameters of an elastic functionally graded cylinder. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, vol. 43, iss. 11, pp. 6861–6870. <https://doi.org/10.1002/mma.6428>
  14. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 767–773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
  15. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 1, pp. 35–47 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
  16. Tikhonov A. N., Goncharovskiy A. V., Stepanov V V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.12.2021

Принята к публикации / Accepted 02.02.2022

Опубликована / Published 31.05.2022