Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 287–292
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 287–292
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-287-292, EDN: JWHHEK

Научная статья
УДК 517.98

О непрерывности некоторых классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой

А. Н. Малютина

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

Малютина Александра Николаевна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры математического анализа и теории функций, nmd@math.tsu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4017-8543, AuthorID: 8175

Аннотация. По известной теореме вложения С. Л. Соболева, если G — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и функция f — функция, имеющая первые обобщенные производные, суммируемые со степенью p, то она непрерывна в G. Если $1 < p \leqslant n$, этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы находим необходимые условия, при которых некоторые классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой $1 < s \leqslant n$ будут непрерывными. Примеры подклассов таких отображений с указанными выше свойствами приведены в наших работах.

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, непрерывность

Для цитирования: *Малютина А. Н.* О непрерывности некоторых классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 287–292. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-287-292, EDN: JWHHEK

Article

On the continuity of some classes and subclasses of maps with an s-averaged characteristic

A. N. Malyutina

Tomsk State University, 36 Lenina Ave., Tomsk 634050, Russia

Aleksandra N. Malyutina, nmd@math.tsu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4017-8543, AuthorID: 8175

Abstract. According to the well-known theorem of S. L. Sobolev, if G is a bounded domain of Euclidean space and a function is a function having the first generalized derivatives summable with degree p, then it is continuous in G. If $1 < p \leqslant n$ this property, generally speaking, may not be. In this paper, we find the necessary conditions under which some classes and subclasses of maps with an s-averaged characteristic will be continuous. Examples of subclasses of such mappings with the above properties are given in our papers.

Keywords: mapping with an s-averaged characteristic, differential properties, continuity

For citation: Malyutina A. N. On the continuity of some classes and subclasses of maps with an s-averaged characteristic. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 287–292 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-287-292, EDN: JWHHEK

По известной теореме С. Л. Соболева [1, с. 64], если G — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и функция $f\colon G \to \mathbb{R}^1$, $f \in W^1_{p,loc}(G)$, $p > n$ [1, с. 64], то она непрерывна в G. Если $1 < p \leqslant n$, этого свойства, вообще говоря, может и не быть. В настоящей работе мы обобщаем результаты, полученные в [2], и находим необходимые условия, при которых некоторые классы и подклассы отображений с s-усредненной характеристикой $1 < s \leqslant n$ будут непрерывными. Примеры подклассов таких отображений с указанными выше свойствами приведены в [3, 4].

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, $f \in W^1_n(G)$, $1 < s \leqslant n$, пусть для любого $y \in G$ выполняются неравенства

$$\int\limits_G (\lambda(x,f))^s\, k\left(|x-y|\right)\, d\sigma_x < M, \tag{1}$$

$$\int\limits_G (\lambda^*(x,f))^{s^*}\, k\left(|x-y|\right)\, d\sigma_x < M^*, \tag{2}$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, положительна, не возрастает и $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$. В случае (1) будем говорить, что отображение с (s,k)-усредненной характеристикой, а в случае (2) — отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой, где функция $f \in W^1_n(G,k,M)$, $1 < s < n$.

Теорема. *Пусть f — отображение с (s^*,k)-усредненной характеристикой и выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^a k^{\frac{1}{s^*}}(t)\, t^{\frac{n}{s^*}}\, dt < +\infty, \quad a > n-p. \tag{3}$$

Если $f \in W^1_{n,loc}(G)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(G)$ и для $1 < s \leqslant n$, и для любой точки $y \in G$

$$I\left(\int\limits_G \left(\frac{|\Delta f|^n}{J(x,f)}\right)^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) < M, \tag{4}$$

если $\alpha > n-s$, то на любом компакте A из области G функция f эквивалентна некоторой непрерывной функции.

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теоремы Арцела. Для этого построим равностепенно непрерывную и равномерно ограниченную на K последовательность функций, сходящуюся к функции f почти везде в G. Рассмотрим последовательность ε-усреднений функции f по С. Л. Соболеву при достаточно малых ε. Здесь ε-усреднением функции f по С. Л. Соболеву [1, с. 34] является функция

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x-u}{\varepsilon}\right) f(u)\, du = \varepsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)\, du.$$

Из [1, с. 79] следует, что вне области G функция $f_\varepsilon = 0$. Известно [1, с. 34], что функция f_ε бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и $||f_\varepsilon - f||_p, \mathbb{R}^n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и что $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$. Существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что компакт

$$K \subset G_1 \subset G_2, \quad \overline{G}_1 \subset G_2, \quad \overline{G}_2 \subset G,$$

где $\overline{G}_i$ — замыкание множества G_i, $i = 1, 2$. Покажем, что для достаточно малых ε

$$I\left(\int\limits_G \frac{|\Delta f|^n}{J(x,f)} ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) < M, \quad y \in G_2.$$

Используя обобщенное неравенство Минковского [5] и условие (1), получим

$$I\left(\int\limits_{G_2} \frac{|\Delta f|^n}{J(x,f)} ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) =$$

$$= \left[\int\limits_{G_2} \varepsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \frac{|\Delta f(x-u)|^n}{J(x,f)}\, du ||x-y||^{\alpha}\, d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-n} \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \left[\int\limits_{G_2} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \left(\frac{|\Delta f(x-u)|^n}{J(x,f)}\right)^s ||x-y||^{\alpha}\, d\sigma_x\right]^{\frac{1}{s}} du \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-n} M \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = M, \tag{5}$$

если $(y-u) \in G$, т. е. при $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 меньше расстояния от границы множества G_2 до границы G. Из неравенства (5) следует, что $\forall y \in G_2$ выполнено неравенство:

$$\left(\int\limits_G \frac{|\Delta f|^n}{J(x,f)} ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right)^s < n^{\frac{n}{2}} M, \text{ если } B(y,r) \subset G_2.$$

Из (3) следует, что непрерывные функции f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условию леммы Ч. Морри [6, с. 11], поэтому для любых точек x, y, таких, что шар

$$B\left(\frac{x+y}{2}, \frac{3}{2}|x-y|\right) \subset G_2, \quad |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| < N|x-y|^\beta,$$

где $\beta = \frac{\alpha-n+s}{s}$ и N зависит от M, n, s, α.

Таким образом, семейство функций f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на K равностепенно непрерывно. Покажем, что функции f_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на K ограничены одним числом. Существует функция $\eta \in D$ такая, что ее носитель лежит в G_2 и $\eta(x) = 1$ для $x \in G_1$ [7, с. 16].

Функция $f_\eta \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Доопределим $f \equiv 0$ вне области G. Для $\varphi \in D$, то имеем [8]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\varphi\, dx = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\varphi\, dx = \int\limits_{G} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f\varphi\, dx + \int\limits_{G} \eta\varphi\frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx\right) =$$

$$= \int\limits_{G} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i} f\varphi\, dx - \int\limits_{G} f\eta\varphi\frac{\partial(\eta\varphi)}{\partial x_i}\, dx\right) = -\int\limits_{G} f\eta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx. \tag{6}$$

Из (6) следует, что обобщенная производная

$$\frac{\partial(\eta, f)}{\partial x_i} = \frac{\partial\eta}{\partial x_i} f + \eta\frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Покажем, что для функции ηf

$$I\left(\int\limits_G \left|\frac{|\Delta\eta f|^n}{J(x,f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) < M, \quad \forall\, y \in K.$$

Из (7) следует, что

$$I\left(\int\limits_G \left|\frac{|\Delta\eta f|^n}{J(x,\eta f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) \leqslant$$

$$\leqslant I\left(\int\limits_G \left|\frac{|\Delta\eta|^n}{J(x,\eta f)} f\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) + I\left(\int\limits_G \left|\eta\frac{|\Delta f|^n}{J(x,\eta f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right) \leqslant$$

$$\leqslant I\left(\int\limits_G \left|\frac{|\Delta\eta|^n}{J(x,\eta f)} f\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right)_{y\in G_2} + I\left(\int\limits_G \left|\eta\frac{|\Delta f|^n}{J(x,f)}\right|^s ||x-y||^{-\alpha}\, d\sigma_x\right)_{y\in G_2} \leqslant$$

$$\leqslant Ad^{\frac{-\alpha}{s}}B + CM = M_1, \tag{8}$$

где $A = \max\frac{\partial\eta}{\partial x_i}$, $x \in G_2$; $C = \max\eta(x)$, $x \in G_2$; $B = ||f||_{p,G}$; d — расстояние между границами множеств G_1 и G_2. Известно [8], что функция $\varphi \in D$ удовлетворяет условиям теоремы и, применяя условие Гёльдера и оценки (8), получаем

$$|\eta(x)f_\varepsilon(x)| = \left|\frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial x_i}(x-y)\frac{y_i}{|y|^n}\, dy\sigma_y\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^n \int\limits_{G_2} \frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\frac{d\sigma_y}{|y-x|^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial(\eta f_\varepsilon)}{\partial y_i}(y)\right|^p |y-x|^{-\alpha}\, d\sigma_y\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int\limits_{G_2} |y-x|^m\, d\sigma_y\right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant M_2,$$

где $m = \frac{np-p-a}{p-1}$, $m+n > 0$, M_2 зависит от M_1, n и диаметра области G_2.

Для $x \in K$, $\eta(x)\nabla f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x)$ и $|f_\varepsilon| \leqslant M_2$, следовательно, равномерно ограничена. Таким образом, на K семейство функций f_ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$ равностепенно непрерывно, равномерно ограничено, поэтому, по теореме Арцеля, из семейства можно выделить подпоследовательность функций $|f_n(x)|$, равномерно сходящуюся на K почти везде в G [5] к некоторой непрерывной функции Ψ. Таким образом, получившиеся функции f и Ψ эквивалентны. □

Замечание. Построенные примеры показывают, что в рассматриваемых подмножествах функций класса $W_p^1(G)$ с $p = n$ существуют функции, не принадлежащие ни одному из классов $W_l^1(G)$ при $l > n$.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
2. *Никулина Н. Г.* О непрерывности одного класса функций // Экстремальные задачи теории функций : сб. статей / ред. В. В. Черников. Томск : Изд-во Томского ун-та, 1980. С. 78–83.
3. *Асанбеков У. К., Малютина А. Н.* Вычисление модуля сферического кольца // Комплексный анализ и его приложения : материалы VIII Петрозаводской междунар. конф. (Петрозаводск, 03–09 июля 2016 г.). Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2016. С. 103–106. EDN: WLTYKX
4. *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic // Комплексный анализ и его приложения : материалы VII Петрозаводской междунар. конф. (Петрозаводск, 29 июня – 05 июля 2014 г.). Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 12–17. EDN: SIDYGZ
5. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1969. 455 с.
6. *Малютина А. Н., Асанбеков У. К.* О модуле непрерывности отображений с s-усредненной характеристикой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 59. С. 11–15. https://doi.org/10.17223/19988621/59/2, EDN: GLUSCA
7. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. Москва : Наука, 1976. 280 с.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Москва : Мир, 1973. 342 с.

References

1. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics]. Leningrad, LSU Publ., 1950. 255 p. (in Russian).
2. Nikulina N. G. On the continuity of a class of functions. In: V. V. Chernikov (ed.) *Extreme Problems of the Theory of Functions*. Tomsk, Tomsk State University Publ., 1980, pp. 78–83 (in Russian).
3. Asanbekov U. K., Malyutina A. N. Calculation of the module of a spherical ring. *Complex Analysis and Its Applications: Proceedings of the VIII Petrozavodsk International Conference (Petrozavodsk, 2016, July 3–9)*. Petrozavodsk, PetrSU Publ., 2016, pp. 103–106 (in Russian). EDN: WLTYKX
4. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. Examples of the mappings with s-averaged characteristic. *Complex Analysis and Its Applications: Proceedings of the VII Petrozavodsk International Conference (Petrozavodsk, 2014, June 29 – July 5)*. Petrozavodsk, PetrSU Publ., 2014, pp. 12–17. EDN: SIDYGZ

5. Nikolsky S. M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems]. Moscow, Nauka, 1969. 455 p. (in Russian).
6. Malyutina A. N., Asanbekov U. K. On the module of continuity of mappings with an s-averaged characteristic. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, no. 59, pp. 11–15 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/59/2, EDN: GLUSCA
7. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1976. 280 p. (in Russian).
8. Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1970. 288 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 342 p.).

Поступила в редакцию / Received 12.03.2022
Принята к публикации / Accepted 15.04.2022
Опубликована / Published 31.08.2022