Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 293–306
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 293–306
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-293-306, EDN: MDACEG

Научная статья
УДК 512.534.5;519.713.2

Об элементарной определимости класса универсальных гиперграфических автоматов в классе полугрупп

В. А. Молчанов[1], **Е. В. Хворостухина**[2]✉

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

Молчанов Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, v.molchanov@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0001-6509-3090, AuthorID: 2266

Хворостухина Екатерина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационно-коммуникационные системы и программная инженерия», katyanew2007@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-2775-5732, AuthorID: 825942

Аннотация. Гиперграфическими автоматами называются автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами гиперграфов, сохраняющимися функциями переходов и выходными функциями. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными гиперграфическими автоматами. Для таких автоматов полугруппы входных сигналов являются производными алгебрами отображений, свойства которых взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры исходного автомата. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных сигналов. Ранее авторами было доказано, что такие автоматы над гиперграфами из довольно широкого класса полностью (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов. В настоящей работе доказывается элементарная определимость класса таких автоматов в классе полугрупп. Основной результат статьи дает решение этой задачи для универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как он содержит, в частности, автоматы, у которых гиперграфы состояний и выходных сигналов являются плоскостями (например, проективными или аффинными). Полученные результаты показывают, что универсальный гиперграфический автомат над p-гиперграфами с точностью до изоморфизма представляется как алгебраическая система, построенная в полугруппе входных сигналов этого автомата с помощью канонических отношений этого автомата, которые определяются формулами элементарной теории полугрупп. С помощью такого представления автоматов определяется эффективная синтаксическая трансформация формул элементарной теории гиперграфических автоматов в формулы элементарной теории полугрупп, что позволяет всесторонне исследовать взаимосвязь элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и их полугрупп входных сигналов.

Ключевые слова: элементарная определимость, автомат, гиперграф, полугруппа

Для цитирования: *Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.* Об элементарной определимости класса универсальных гиперграфических автоматов в классе полугрупп // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 293–306. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-293-306, EDN: MDACEG

Article

Elementary definability of the class of universal hypergraphic automata in the class of semigroups

V. A. Molchanov[1], **E. V. Khvorostukhina**[2]✉

[1]Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia
Vladimir A. Molchanov, v.molchanov@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0001-6509-3090, AuthorID: 2266
Ekaterina V. Khvorostukhina, katyanew2007@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0002-2775-5732, AuthorID: 825942

Abstract. Hypergraphic automata are automata, state sets and output symbol sets of which are hypergraphs, being invariant under actions of transition and output functions. Universally attracting objects in the category of hypergraphic automata are called universal hypergraphic automata. The semigroups of input symbols of such automata are derivative algebras of mappings for such automata. So their properties are interconnected with the properties of the algebraic structures of the automata. Thus, we can study universal hypergraphic automata by investigating their semigroups of input symbols. Earlier, the authors proved that such automata over hypergraphs from a fairly wide class are completely (up to isomorphism) determined by their semigroups of input symbols. In this paper, we prove the elementary definability of the class of such automata in the class of semigroups. The main result of the paper is the solving of this problem for universal hypergraphic automata over p-hypergraphs. It is a wide and very important class of automata because such algebraic systems contain automata whose state hypergraphs and hypergraphs of output symbols are projective or affine planes. The results show that the universal hypergraphic automaton over p-hypergraphs is represented as an algebraic system, constructed in the semigroup of input symbols of the automaton using the canonical relations of the automaton. These relations are determined by the formulas of the elementary theory of semigroups. Using such a representation of automata, an effective syntactic transformation of formulas of the elementary theory of hypergraphic automata into formulas of the elementary theory of semigroups is determined. It allows a comprehensive study of the relationship between the elementary properties of universal hypergraphic automata over p-hypergraphs and their semigroups of input symbols.
Keywords: elementary definability, automaton, hypergraph, semigroup
For citation: Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. Elementary definability of the class of universal hypergraphic automata in the class of semigroups. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 293–306 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-293-306, EDN: MDACEG

Введение

Согласно алгебраической теории автоматов [1], универсальным гиперграфическим автоматом над гипергрфами H_1, H_2 является многосортная алгебраическая система $\mathrm{Atm}(H_1, H_2) = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$, состоящая из гиперграфа состояний H_1, гиперграфа выходных сигналов H_2, полугруппы входных сигналов $S = \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}(H_1, H_2)$, функции переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функции $\lambda(x, s) = \psi(x)$ (здесь x — вершина гиперграфа H_1 и $s = (\varphi, \psi) \in S$). Для такого автомата $\mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ полугруппа входных сигналов $S = \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ является производной алгеброй отображений, свойства которой взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры исходного автомата. Это позволяет изучать универсальные гиперграфические автоматы с помощью исследования их полугрупп входных сигналов. В работе [2] доказано, что универсальные гиперграфические автоматы над так называемыми p-гиперграфами полностью (с точностью до изоморфизма) определяются своими полугруппами входных сигналов. Позже в работах [3, 4] получены конкретная характеризация таких автоматов и абстрактная характеризация полугрупп их входных сигналов, найдено представление таких автоматов с помощью их входных сигналов.

Результаты настоящей работы относятся к исследованию важной проблемы элементарной классификации исходных математических объектов с помощью теорий первого порядка производных алгебраических систем, рассматриваемой Ю. М. Важениным и А. Г. Пинусом в обзорной статье [5]. Ранее в этом направлении были получены важные результаты А. Г. Пинусом [6–8] для разнообразных производных структур свободных алгебр, унаров и групп, Ю. М. Важениным [9, 10] для полугрупп преобразований графов, Е. И. Буниной и А. В. Михалевым [11] для колец эндоморфизмов групп. Как известно [12], эффективным инструментом решения такого рода проблем является метод элементарной определимости одного класса моделей $\mathbf{K}$ в другом классе моделей $\mathbf{K_1}$, суть которого заключается в построении изоморфной копии исходной модели $A \in \mathbf{K}$ в ее производной модели $S(A) \in \mathbf{K_1}$ с помощью средств узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры класса $\mathbf{K_1}$.

В настоящей работе доказывается элементарная определимость класса универсальных гиперграфических автоматов над так называемыми p-гиперграфами в классе всех полугрупп: в теореме 1 получены формулы языка УИП теории полугрупп, с помощью которых для любого универсального гиперграфического автомата $\mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ над p-гиперграфами H_1, H_2 строится изоморфная копия такого автомата в его полугруппе входных сигналов. С помощью этого результата в теореме 2 определяется эффективная синтаксическая трансформация формул языка элементарной теории гиперграфических автоматов в формулы элементарной теории полугрупп, которая прозволяет всесторонне исследовать взаимосвязь элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и их полугрупп входных сигналов.

1. Основные понятия

В работе используются общепринятая терминология и основные понятия теории автоматов [1], теории моделей [13], теории полугрупп [14], алгебры отношений [15] и теории гиперграфов [16].

Определение 1. *Гиперграфом* называется система вида $H = (X, L)$, где X — непустое множество вершин гиперграфа и L — семейство некоторых подмножеств множества X, называемых ребрами гиперграфа. Множество вершин гиперграфа называется ограниченным, если оно содержится в некотором его ребре.

Определение 2. Для фиксированного натурального числа p гиперграф H называется *p-гиперграфом*, если выполняются следующие аксиомы:

(A_1) любые p вершин содержатся в одном и только одном ребре;

(A_2) каждое ребро содержит по крайней мере $p+1$ вершину;

(A_3) в множестве X есть $(p+1)$-элементное множество, не принадлежащее ни одному ребру.

Например, если рассматривать плоскости [17] как гиперграфы, вершинами которых являются точки, а ребрами — прямые этих плоскостей, то любая проективная плоскость и любая аффинная плоскость с числом точек более четырех являются 2-гиперграфами.

Помимо этих известных примеров, существует множество других нетривиальных p-гиперграфов. В частности, 3-гиперграфом является гиперграф $H = (X, L)$ с множеством вершин $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и множеством ребер $L = \{l_1, l_2, ..., l_{14}\}$, где $l_1 = \{1,2,3,4\}$, $l_2 = \{1,2,5,6\}$, $l_3 = \{1,2,7,8\}$, $l_4 = \{1,3,5,7\}$, $l_5 = \{1,3,6,8\}$, $l_6 = \{1,4,5,8\}$, $l_7 = \{1,4,6,7\}$, $l_8 = \{2,3,5,8\}$, $l_9 = \{2,3,6,7\}$, $l_{10} = \{2,4,5,7\}$, $l_{11} = \{2,4,6,8\}$, $l_{12} = \{3,4,5,6\}$, $l_{13} = \{3,4,7,8\}$, $l_{14} = \{5,6,7,8\}$.

Для гиперграфов $H_1 = (X_1, L_1)$, $H_2 = (X_2, L_2)$ отображение $\varphi : X_1 \to X_2$ называется гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_2, если оно ограниченные множества вершин гиперграфа H_1 отображает в ограниченные множества вершин гиперграфа H_2, т. е. выполняется свойство

$$(\forall\, l \in L_1)(\exists\, l' \in L_2)(\varphi(l) \subset l').$$

В частности, из аксиомы (A_1) следует, что для любой вершины $x \in X_2$ постоянное отображение $c_x : X_1 \to \{x\}$ является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_2. Множество всех гомоморфизмов H_1 в H_2 обозначается $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$. Гомоморфизм гиперграфа H_1 в себя называется эндоморфизмом этого гиперграфа. Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H_1 с операцией композиции образует полугруппу $\mathrm{End}(H_1)$. Как известно [1], множество $S(H_1, H_2) = \mathrm{End}(H_1) \times \mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ образует полугруппу с ассоциативной бинарной операцией «$\cdot$», определяющейся по правилу $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1)$ для пар $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \mathrm{End}\, H_1 \times \mathrm{Hom}(H_1, H_2)$.

Для описания свойств гиперграфа $H = (X, L)$ на языке УИП будем рассматривать H в виде двухсортной алгебраической системы $H = (X, L, \rho)$ с двумя базисными множествами X, L и бинарным отношением $\rho \subset X \times L$, которое определяется по формуле $(x, l) \in \rho \Longleftrightarrow x \in l$.

Изоморфизмом таких алгебраических систем $H_1 = (X_1, L_1, \rho_1)$, $H_2 = (X_2, L_2, \rho_2)$ называется упорядоченная пара (φ, ψ) биекций $\varphi : X_1 \longrightarrow X_2$, $\psi : L_1 \longrightarrow L_2$, сохраняющая бинарные отношения этих систем, т.е. для любых $x \in X_1, l \in L_1$ выполняется условие $(x, l) \in \rho_1 \Longleftrightarrow (\varphi(x), \psi(l)) \in \rho_2$.

Определение 3. Следуя [1], под *автоматом* будем понимать алгебраическую систему $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X_1, множества выходных сигналов X_2, полугруппы входных сигналов S, функции переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функции $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, таких что для любых $x \in X_1$ и $a, b, c \in S$ выполняются равенства

$$(ab)c = a(bc), \quad \delta(x, ab) = \delta(\delta(x, a), b), \quad \lambda(x, ab) = \lambda(\delta(x, a), b). \tag{1}$$

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s : X_1 \to X_1$ и $\lambda_s : X_1 \to X_2$ по формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X_1$.

По определению [1], гиперграфический автомат является многосортной алгеброй $\mathbf{A} = (X_1, S, X_2, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2, наделенными структурами гиперграфов $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов S, функцией переходов $\delta : X_1 \times S \to X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \to X_2$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ отображение δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H_1 и отображение λ_s является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_2. Такие автоматы обозначаются символом $\mathbf{A} = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$.

Гомоморфизмом гиперграфического автомата $\mathbf{A} = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $\mathbf{A}' = (H_1', S', H_2', \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ гомоморфизмов $f : H_1 \longrightarrow H_1'$, $\pi : S \longrightarrow S'$ и $g : H_2 \longrightarrow H_2'$, сохраняющих алгебраические операции таких автоматов, т. е. для любой вершины x гиперграфа H_1 и любого входного сигнала $s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x,s)) = \delta'(f(x), \pi(s))$, $g(\lambda(x,s)) = \lambda'(f(x), \pi(s))$. Гомоморфизм $\gamma = (f, \pi, g)$ называется изоморфизмом автомата $\mathbf{A}$ на автомат $\mathbf{A}'$, если все гомоморфизмы f, π, g являются изоморфизмами соответствующих алгебраических систем.

Важный пример гиперграфического автомата дает алгебраическая система

$$\mathrm{Atm}(H_1, H_2) = (H_1, S(H_1, H_2), H_2, \delta', \lambda'),$$

где $H_1 = (X_1, L_1)$, $H_2 = (X_2, L_2)$ — некоторые гиперграфы, и для любых $x \in X_1$, $(\varphi, \psi) \in S(H_1, H_2)$ определены значения $\delta'(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda'(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$. Легко проверить, что автомат $\mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi : S \longrightarrow S(H_1, H_2)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_{X_1}, \pi, \Delta_{X_2})$ является гомоморфизмом A в $\mathrm{Atm}(H_1, H_2)$. По этой причине такой гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ называется [1] универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_1, H_2.

2. Основные результаты

Полученные в работах [2–4] результаты позволяют доказать, что класс всех универсальных гиперграфических автоматов элементарно определим [12] в классе всех полугрупп.

Теорема 1. *Существуют такие формулы* $Z(x)$, $D_i(x_1, x_2, ..., x_p)$, $E_i(x, y)$, $\mathrm{Eq}_i(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_p)$, $\mathrm{Ins}_i(x, x_1, ..., x_p)$, $i = 1, 2$, *сигнатуры языка элементарной теории полугрупп, что любой универсальный гиперграфический автомат* $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ *над* p*-гиперграфами* $H_1 = (X_1, L_{X_1})$, $H_2 = (X_2, L_{X_2})$ *и его полугруппа входных сигналов* $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) *множества* $\widetilde{Z} = \{x \in S : S \models Z(x)\}$ *и* $\widetilde{D_i} = \{\{x_1, x_2, ..., x_p\} \in S^p : S \models D_i(x_1, x_2, ..., x_p)\}$ $(i = 1, 2)$ *не пусты;*
2) *для каждого* $i = 1, 2$ *формула* $\mathrm{E}_i(x, y)$ *задает отношение эквивалентности* $\widetilde{\mathrm{E}}_i$ *на множестве* $\widetilde{Z}$*;*
3) *для каждого* $i = 1, 2$ *формула* $\mathrm{Eq}_i(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_p)$ *задает отношение эквивалентности* $\widetilde{\mathrm{Eq}_i}$ *на множестве* $\widetilde{D_i}$*;*
4) *для каждого* $i = 1, 2$ *формула* $\mathrm{Ins}_i(x, x_1, ..., x_p)$ *задает бинарное отношение* $\widetilde{\mathrm{Ins}_i}$ *между элементами множества* $\widetilde{Z}$ *и элементами множества* $\widetilde{D_i}$*, которое*

согласовано с эквивалентностями $\widetilde{E_i}$, $\widetilde{\mathrm{Eq}_i}$ *по следующей формуле:*

$$(x, x_1, ..., x_p) \in \widetilde{\mathrm{Ins}_i} \wedge x \equiv y(\widetilde{E_i}) \wedge (x_1, ..., x_p) \equiv (y_1, ..., y_p)(\widetilde{\mathrm{Eq}_i}) \Longrightarrow \Longrightarrow (y, y_1, ..., y_p) \in \widetilde{\mathrm{Ins}_i};$$

5) *автомат* $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ *изоморфен фактор-системе* $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$ *пятисортной алгебраической* Ω*-системы* $\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\left(X_1', \widetilde{D_1}, \widetilde{\mathrm{Ins}_1}\right), (S, \cdot), \left(X_2', \widetilde{D_2}, \widetilde{\mathrm{Ins}_2}\right), f_1, f_2\right)$ *по конгруэнции* $\widetilde{\theta} = (\widetilde{E_1}, \widetilde{\mathrm{Eq}_1}, \Delta_S, \widetilde{E_2}, \widetilde{\mathrm{Eq}_2})$*, где* $X_1' = X_2' = \widetilde{Z}$*, «$\cdot$» — операция умножения полугруппы* S *и операции* $f_i : X_1' \times S \to X_i'$ *определяются по формулам* $f_i(x, s) = x \cdot s \in X_i'$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ — универсальный гиперграфический автомат над p-гиперграфами $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$ с полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$.

Согласно результатам работы [4], для такого автомата $\mathbf{A}$ определяются следующие канонические отношения на его полугруппе входных сигналов S.

Множество C всех автономных входных сигналов автомата $\mathbf{A}$ состоит из входных сигналов $a \in S$, под действием которых все состояния автомата переводятся в одно и то же состояние $a_1 \in X_1$ и отображаются в один и тот же выходной сигнал $a_2 \in X_2$. В работе [2] показано, что C является множеством правых нулей полугруппы S, которое определяется в полугруппе S формулой $Z(x) = (\forall y)(yx = x)$.

Далее, на множестве C определяется бинарное отношение ε_1, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата $\mathbf{A}$, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff a_1 = b_1$. В работе [2] показано, что ε_1 — эквивалентность на множестве C, которая определяется в полугруппе S формулой

$$E_1(x, y) = Z(x) \wedge Z(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \Rightarrow xz = yz),$$

где $LI(z) = (\forall u)(zu = u)$.

На множестве C определяется также бинарное отношение ε_2, которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов $a, b \in C$, при действии которых автоматом $\mathbf{A}$ выдаются одинаковые выходные сигналы, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff a_2 = b_2$. В работе [3] показано, что ε_2 — эквивалентность на множестве C, которая определяется в полугруппе S формулой

$$E_2(x, y) = Z(x) \wedge Z(y) \wedge (\forall\ z_1, ..., z_{p-1})(\bigwedge_{i=1}^{p-1} LI(z_i) \Rightarrow \mathrm{Eql}(x, y, xz_1, ..., xz_{p-1})),$$

где

$$\mathrm{Eql}(x_1, x_2, ..., x_{p+1}) = \bigwedge_{i=1}^{p+1} Z(x_i) \wedge$$
$$\wedge (\forall\ y_1, y_2, ..., y_{p+1}) \left(\bigwedge_{i=1}^{p+1} Z(y_i) \wedge \bigwedge_{i,j=1, i\neq j}^{p+1} \neg E_1(y_i, y_j) \Rightarrow (\exists\, z)(\bigwedge_{i=1}^{p+1} y_i z = x_i) \right).$$

Наконец, на множестве C^p определяется бинарное отношение η, которое состоит из таких упорядоченных пар (α, β) элементов $\alpha = (a^1, a^2, ..., a^p)$ и $\beta = (b^1, b^2, ..., b^p)$ с автономными входными сигналами $a^1, a^2, ..., a^p, b^1, b^2, ..., b^p \in C$, при действии которых для каждого $i = 1, 2$ состояния автомата $\mathbf{A}$ отображаются в ограниченное множество $\{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\}$ гиперграфа H_i, т. е. по определению $(\alpha, \beta) \in \eta \Leftrightarrow \{a_i^1, a_i^2, ..., a_i^p, b_i^1, b_i^2, ..., b_i^p\}$ — ограниченное множество в гиперграфе $H_i (i = 1, 2)$.

В работе [3] показано, что η определяется в полугруппе S формулой

$$N(x_1, x_2, ..., x_{2p}) = \bigwedge_{i=1}^{2p} Z(x_i) \wedge \bigwedge_{i_1, i_2, ..., i_{p+1}=1}^{2p} Eql(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{p+1}}).$$

Для значений $i = 1, 2$ рассмотрим формулы теории полугрупп

$$D_i(x_1, ..., x_p) = \bigwedge_{j=1}^{p} Z(x_j) \wedge \bigwedge_{j,k=1, j \neq k}^{p} \neg E_i(x_j, x_k).$$

Очевидно, что формула $D_i(x_1, ..., x_p)$ определяет на полугруппе S непустое множество $\widetilde{D_i} \subset C^p$, упорядоченных кортежей $(a^1, ..., a^p)$, состоящих из p автономных сигналов $a^1, ..., a^p$, у которых $a_i^j \neq a_i^k$ для всех $1 \leqslant j < k \leqslant p$. В работе [3] показано, что для каждого $i = 1, 2$ ограничение η_i отношения η на множестве $\widetilde{D_i}$ является эквивалентностью, которая определяется в полугруппе S формулой

$$\begin{gathered}\mathrm{Eq_i}(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_p) = D_i(x_1, x_2, ..., x_p) \wedge D_i(y_1, y_2, ..., y_p) \wedge \\ \wedge N(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, ..., y_p).\end{gathered}$$

При этом класс эквивалентности η_i, определяемый упорядоченным кортежем $(a^1, ..., a^p) \in \widetilde{D_i}$, состоит из таких упорядоченных кортежей $(b^1, ..., b^p) \in \widetilde{D_i}$, у которых все элементы b_i^j $(j = \overline{1, p})$ принадлежат единственному ребру p-гиперграфа H_i, которое определяется p различными вершинами $a_i^1, ..., a_i^p$.

Из вышеизложенного следует справедливость первых трех утверждений теоремы.

С целью доказательства четвертого утверждения рассмотрим для значений $i = 1, 2$ формулы теории полугрупп

$$\mathrm{Ins_i}(x, x_1, ..., x_p) = Z(x) \wedge D_i(x_1, ..., x_p) \wedge \mathrm{Edge_i}(x, x_1, x_2, ..., x_p),$$

где

$$\begin{gathered}\mathrm{Edge_i}(x_1, x_2, ..., x_{p+1}) = \bigwedge_{j=1}^{p+1} Z(x_j) \wedge \\ \wedge (\forall\ y_1, y_2, ..., y_{p+1}) \left(\bigwedge_{j=1}^{p+1} Z(y_j) \wedge \bigwedge_{j,l=1, j \neq l}^{p+1} \neg E_1(y_j, y_l) \Rightarrow (\exists z)(\bigwedge_{j=1}^{p+1} E_i(y_j z, x_j)) \right).\end{gathered}$$

Очевидно, что формула $\mathrm{Ins}_i(x, x_1, ..., x_p)$ определяет бинарное отношение $\widetilde{\mathrm{Ins}_i}$ между элементами множества $\widetilde{Z}$ и элементами множества $\widetilde{D_i}$, которое согласовано с эквивалентностями $\widetilde{E_i}$, $\widetilde{\mathrm{Eq}_i}$ по следующей формуле:

$$\begin{gathered}(x, x_1, ..., x_p) \in \widetilde{\mathrm{Ins}_i} \wedge x \equiv y(\widetilde{E_i}) \wedge (x_1, ..., x_p) \equiv (y_1, ..., y_p)(\widetilde{\mathrm{Eq}_i}) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (y, y_1, ..., y_p) \in \widetilde{\mathrm{Ins}_i}.\end{gathered}$$

Это доказывает справедливость четвертого утверждения теоремы.

Для доказательства пятого утверждения рассмотрим специальную конструкцию гиперграфического автомата из работы [4]. Из [4, лемма 1] следует, что канонические отношения универсального гиперграфического автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) для любого состояния (соответственно, выходного сигнала) x автомата $\mathbf{A}$ найдется такой автономный входной сигнал этого автомата, обозначаемый $\hat{x}$, при действии которого все состояния автомата переходят в состояние x (соответственно, отображаются в выходной сигнал x), т. е. выполняется равенство $\hat{x}_1 = x$ (соответственно, $\hat{x}_2 = x$);
2) для каждого $i = 1, 2$ отображение $\varphi_i : X_i \to C/\varepsilon_i$, определяемое для элементов $x \in X_i$ по формуле $\varphi_i(x) = \varepsilon_i(\hat{x})$, является биекцией X_i на фактор-множество C/ε_i;
3) для каждого $i = 1, 2$ отображение $\psi_i : L_i \to \widetilde{D_i}/\eta_i$, определяемое для элементов $l \in L_i$ по формуле $\psi_i(l) = \eta_i(\widehat{x^1}, \ldots, \widehat{x^p})$ для произвольных различных вершин $x^1, \ldots, x^p \in l$, является биекцией L_i на фактор-множество $\widetilde{D_i}/\eta_i$.

На основании этих свойств для автомата $\mathbf{A}$ введем следующие понятия:

1) для каждого $i = 1, 2$ определим двухсортную алгебраическую систему $\overline{H}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$ с базисными множествами $\overline{X}_i = C/\varepsilon_i$, $\overline{L}_i = \widetilde{D_i}/\eta_i$ и бинарным отношением $\overline{\rho}_i \subset \overline{X}_i \times \overline{L}_i$, которое для элементов $a, a^1, \ldots, a^p \in C$, удовлетворяющих условию $a_i^j \neq a_i^k$ для всех $1 \leqslant j < k \leqslant p$, задается по формуле: $(\varepsilon_i(a), \eta_i(a^1, \ldots, a^p)) \in \overline{\rho}_i \Longleftrightarrow$ множество $\{a_i, a_i^1, \ldots, a_i^p\}$ ограничено в H_i;
2) определим два отображения $\overline{\delta} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_1$, $\overline{\lambda} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_2$, которые для элементов $a \in C$, $s \in S$ задаются по формулам

$$\overline{\delta}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_1(a \cdot s), \quad \overline{\lambda}\,(\varepsilon_1(a), s) = \varepsilon_2(a \cdot s).$$

В теореме 2 [4] для универсального гиперграфического автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ над p-гиперграфами $H_1 = (X_1, L_1)$ и $H_2 = (X_2, L_2)$ доказана справедливость следующих утверждений:

1) для каждого $i = 1, 2$ гиперграф H_i изоморфен алгебраической системе $\overline{H}_i = \left(\overline{X}_i, \overline{L}_i, \overline{\rho}_i\right)$;
2) автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ изоморфен гиперграфическому автомату $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{H}_1, S, \overline{H}_2, \overline{\delta}, \overline{\lambda})$ с гиперграфом состояний $\overline{H}_1$, полугруппой входных сигналов $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$, гиперграфом выходных сигналов $\overline{H}_2$, функцией переходов $\overline{\delta} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_1$ и выходной функцией $\overline{\lambda} : \overline{X}_1 \times S \to \overline{X}_2$.

Покажем, что гиперграфический автомат $\overline{\mathbf{A}}$ изоморфен фактор-системе $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$ пятисортной алгебраической системы

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\left(X_1', \widetilde{D_1}, \widetilde{\mathrm{Ins}_1}\right), (S, \cdot)\,, \left(X_2', \widetilde{D_2}, \widetilde{\mathrm{Ins}_2}\right), f_1, f_2\right)$$

по конгруэнции $\widetilde{\theta} = (\widetilde{E_1}, \widetilde{\mathrm{Eq}_1}, \Delta_S, \widetilde{E_2}, \widetilde{\mathrm{Eq}_2})$, где $X_1' = X_2' = \widetilde{Z}$, «$\cdot$» — операция умножения полугруппы S и операции $f_i : X_1' \times S \to X_i'$ определяются по формулам $f_i(x, s) = x \cdot s \in X_i'$ $(i = 1, 2)$.

Из вышеизложенного следует, что для универсального гиперграфического автомата $\mathbf{A}$ выполняются равенства:

$$\widetilde{Z} = C, \quad \widetilde{E_i} = \varepsilon_i, \quad \overline{X}_i = \widetilde{Z}/\widetilde{E_i}, \quad \widetilde{\mathrm{Eq}_i} = \eta_i, \quad \overline{L}_i = \widetilde{D_i}/\widetilde{\mathrm{Eq}_i}, \quad \overline{\rho}_i = \widetilde{\mathrm{Ins}_i}/\widetilde{\theta},$$

где $\widetilde{\mathrm{Ins}}_i/\widetilde{\theta} = \{\left(\widetilde{E_i}(x), \widetilde{\mathrm{Eq}}_i(x^1, \ldots, x^p)\right) \in \overline{X}_i \times \overline{L}_i : (x, x^1, \ldots, x^p) \in \widetilde{\mathrm{Ins}}_i\}$ и $i = 1, 2$.

Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\overline{\mathbf{A}} = (\overline{H}_1, (S, \cdot), \overline{H}_2, \overline{\delta}, \overline{\lambda}) = \left(\left(\overline{X}_1, \overline{L}_1, \overline{\rho}_1\right), (S, \cdot), \left(\overline{X}_2, \overline{L}_2, \overline{\rho}_2\right), \overline{\delta}, \overline{\lambda}\right) =$$
$$= \left(\left(C/\varepsilon_1, \widetilde{D_1}/\eta_1, \widetilde{\mathrm{Ins}_1}/\widetilde{\theta}\right), (S, \cdot), \left(C/\varepsilon_2, \widetilde{D_2}/\eta_2, \widetilde{\mathrm{Ins}_2}/\widetilde{\theta}\right), \overline{\delta}, \overline{\lambda}\right) =$$
$$= \left(\left(\widetilde{Z}/\widetilde{E_1}, \widetilde{D_1}/\widetilde{Eq_1}, \widetilde{\mathrm{Ins}_1}/\widetilde{\theta}\right), (S, \cdot), \left(\widetilde{Z}/\widetilde{E_2}, \widetilde{D_2}/\widetilde{Eq_2}, \widetilde{\mathrm{Ins}_2}/\widetilde{\theta}\right), f_1/\widetilde{\theta}, f_2/\widetilde{\theta}\right) = \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta},$$

где $f_1/\widetilde{\theta}\left(\widetilde{E_1}(x), s\right) = \widetilde{E_1}(x \cdot s)$, $f_2/\widetilde{\theta}\left(\widetilde{E_1}(x), s\right) = \widetilde{E_2}(x \cdot s)$ для элементов $x \in C, s \in S$. Значит, с учетом теоремы 2 [4] получаем, что $\mathbf{A} \cong \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$ и выполняется последнее условие теоремы. Теорема доказана. □

Для описания свойств гиперграфического автомата $\mathbf{A} = (H_1, S, H_2, \delta, \lambda)$ над гиперграфами $H_1 = (X_1, L_1)$, $H_2 = (X_2, L_2)$ с помощью языка УИП будем рассматривать $\mathbf{A}$ в виде пятисортной алгебраической системы $\mathbf{A} = ((X_1, L_1, \in_1), (S, \cdot), (X_2, L_2, \in_2), \delta, \lambda)$ с пятью базисными множествами X_1, L_1, S, X_2, L_2, двумя бинарными отношениями $\in_i \subset X_i \times L_i$, $(i = 1, 2)$ принадлежности вершин гиперграфов H_i их ребрам и тремя бинарными операциями $\cdot : S \times S \to S$, $\delta : X_1 \times S \to X_1$, $\lambda : X_1 \times S \to X_2$. Элементарные свойства таких систем описываются с помощью языка УИП $\mathbf{L_A}$ сигнатуры $\Omega = \{\in_1, \in_2, \cdot, \delta, \lambda\}$, которая состоит из двух символов бинарных отношений $\in_1$, $\in_2$ принадлежности вершин гиперграфов H_1, H_2 их ребрам, символа «$\cdot$» бинарной операции полугруппы S и символов δ, λ бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата $\mathbf{A}$.

Алфавит такого языка состоит из:

1) счетного множества индивидуальных переменных первого сорта $x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots$ для обозначения вершин гиперграфа состояний автомата;

2) счетного множества индивидуальных переменных второго сорта $x^{(2)}, y^{(2)}, \ldots$ для обозначения ребер гиперграфа состояний автомата;

3) счетного множества индивидуальных переменных третьего сорта $x^{(3)}, y^{(3)}, \ldots$ для обозначения входных сигналов автомата;

4) счетного множества индивидуальных переменных четвертого сорта $x^{(4)}, y^{(4)}, \ldots$ для обозначения вершин гиперграфа выходных сигналов автомата;

5) счетного множества индивидуальных переменных пятого сорта $x^{(5)}, y^{(5)}, \ldots$ для обозначения ребер гиперграфа выходных сигналов автомата;

6) двухместного предикатного символа $\in_1$(соответственно, $\in_2$) для обозначения отношения принадлежности вершин гиперграфа состояний (соответственно, гиперграфа выходных сигналов) автомата его ребрам;

7) двухместного функционального символа «$\cdot$» для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автомата;

8) двухместных функциональных символов δ и λ для обозначения функции переходов и выходной функции автомата;

9) конечного множества логических и технических символов, таких как $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$, (,).

Для языка $\mathbf{L_A}$ термы трех сортов получаются обычным комбинированием символа «$\cdot$» с двумя термами третьего сорта и символов δ, λ с термами первого и третьего сорта, т. е. это выражения вида $x^{(1)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$, $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$, $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$, где $x^{(1)}$ и $t^{(1)}$ — переменная и терм первого сорта, $x^{(3)}$, $t^{(3)}$, $t_1^{(3)}$ — переменная и термы тертьего сорта, $x^{(4)}$ — переменная четвертого сорта. При этом получаются термы $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$, $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$ $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$ первого, третьего и четвертого сорта соответственно. Термами второго и пятого сортов являются индивидуальные переменные второго и пятого сортов, обозначающие ребра соответственно гиперграфа состояний и гиперграфа выходных сигналов автомата.

Атомарными формулами языка $\mathbf{L_A}$ являются выражения вида $t = t'$, где t, t' — термы одного и того же сорта, и выражения вида $t^1 \in_1 t^2$, $t^4 \in_2 t^5$, где t^1, t^2, t^4, t^5 — термы первого, второго, четвертого и пятого сорта соответственно. Формулы языка $\mathbf{L_A}$ определяются по индукции обычным образом [12].

Множество всех предложений языка $\mathbf{L_A}$, истинных на гиперграфическом автомате $\mathbf{A}$, обозначается символом $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ и называется элементарной теорией автомата $\mathbf{A}$. Автоматы $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ называются элементарно эквивалентными, если их элементарные теории $\mathrm{Th}(\mathbf{A}), \mathrm{Th}(\mathbf{A}')$ совпадают, т.е. $\mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}(\mathbf{A}')$. Это означает, что такие автоматы $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ не могут быть различимы с помощью свойств, выраженных формулами языка УИП $\mathbf{L_A}$.

С помощью теоремы 1 можно определить эффективную синтаксическую трансформацию формул языка элементарной теории гиперграфических автоматов в формулы элементарной теории полугрупп, которая прозволяет всесторонне исследовать взаимосвязь элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и их полугрупп входных сигналов.

Теорема 2. *Существует эффективная процедура построения для любого предложения Ψ сигнатуры языка УИП теории гиперграфических автоматов $\mathbf{L_A}$ такого предложения $\overline{\Psi}$ сигнатуры языка УИП теории полугрупп $\mathbf{L_S}$, что для любого универсального гиперграфического автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ над p-гиперграфами H_1, H_2 предложение Ψ в том и только том случае истинно на автомате $\mathbf{A}$, если предложение $\overline{\Psi}$ истинно на полугруппе входных сигналов $\mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ этого автомата $\mathbf{A}$.*

Доказательство. Доказательство теоремы основывается на следующей эффективной синтаксической трансформации формул языка УИП теории гиперграфических автоматов $\mathbf{L_A}$.

Для любого терма t сигнатуры языка $\mathbf{L_A}$ эффективно строится терм $\bar{t}$ сигнатуры языка теории полугрупп $\mathbf{L_S}$ по следующему правилу:

– если $t = x$ — индивидуальная переменная первого сорта (обозначающая вершину гиперграфа состояний автомата), индивидуальная переменная третьего сорта (обозначающая входной символ автомата) или индивидуальная переменная четвертого сорта (обозначающая вершину гиперграфа выходных сигналов автомата), то $\bar{t}$ есть тот же самый терм x, который рассматривается как индивидуальная переменная языка теории полугрупп;

– если $t = x$ — индивидуальная переменная второго сорта (обозначающая ребро гиперграфа состояний автомата) или индивидуальная переменная пятого сорта (обозначающая ребро гиперграфа выходных сигналов автомата), то $\bar{t}$ есть терм $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$, который рассматривается как p-элементный набор индивидуальных переменных языка $\mathbf{L_S}$;

– если $t = t_1 \cdot t_2$ для термов t_1, t_2 третьего сорта (обозначающих входные символы автомата), то $\bar{t}$ есть терм $\overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$;

– если $t = \delta(t_1, t_2)$ для терма t_1 первого сорта (обозначающего вершину гиперграфа состояний автомата) и терма t_2 третьего сорта (обозначающего входной символ автомата), то $\bar{t}$ есть терм $\overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$;

– если $t = \lambda(t_1, t_2)$ для терма t_1 первого сорта (обозначающего вершину гиперграфа состояний автомата) и терма t_2 третьего сорта (обозначающего входной символ автомата), то $\bar{t}$ есть терм $\overline{t_1} \cdot \overline{t_2}$.

Пусть теперь Ψ — формула языка $\mathbf{L_A}$ с бинарными предикатными символами $\in_1$, $\in_2$ и тремя бинарными функциональными символами $\cdot, \delta, \lambda$. Для такой формулы Ψ эффективно построим формулу $\overline{\Psi}$ языка $\mathbf{L_S}$ по следующему правилу:

– если Ψ есть атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 первого сорта (соответственно, четвертого сорта), то $\overline{\Psi}$ есть формула $\mathrm{E}_1(\overline{t_1}, \overline{t_2})$ (соответственно, $\mathrm{E}_2(\overline{t_1}, \overline{t_2})$);

– если Ψ есть атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 второго сорта (соответственно, пятого сорта), то $\overline{\Psi}$ есть формула $\mathrm{Eq}_1(\overline{t_1}, \overline{t_2})$ (соответственно, $\mathrm{Eq}_2(\overline{t_1}, \overline{t_2})$);

– если Ψ есть атомарная формула $t_1 = t_2$ для двух термов t_1, t_2 третьего сорта, то $\overline{\Psi}$ есть формула $\overline{t_1} = \overline{t_1}$;

– если Ψ есть атомарная формула $t_1 \in_1 t_2$ (соответственно, $t_1 \in_2 t_2$) для терма t_1 первого сорта и терма t_2 второго сорта (соответственно, для терма t_1 четвертого сорта и терма t_2 пятого сорта), то $\overline{\Psi}$ есть формула $\mathrm{Ins}_1(\overline{t_1}, \overline{t_2})$ (соответственно, $\mathrm{Ins}_2(\overline{t_1}, \overline{t_2})$) ;

– если Ψ есть формула $\Psi_1 \star \Psi_2$ (где $\star$ — один из символов $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$), то $\overline{\Psi}$ есть формула $\overline{\Psi}_1 \star \overline{\Psi}_2$;

– если Ψ есть формула $\neg\Phi$, то $\overline{\Psi}$ есть формула $\neg\overline{\Phi}$;

– если Ψ есть формула $(\exists\, x)\Phi(x)$ (соответственно, $(\forall\, x)\Phi(x)$) для индивидуальной переменной x первого или четвертого сорта, то $\overline{\Psi}$ есть формула

$$(\exists\, x)(Z(x)\ \wedge\ \overline{\Phi}(x)) \quad \big(\text{соответственно,}\ \ (\forall\ x)(Z(x) \Longrightarrow \overline{\Phi}(x))\big)\,;$$

– если Ψ есть формула $(\exists\, x)\Phi(x)$ (соответственно, $(\forall x)\Phi(x)$) для индивидуальной переменной x второго или пятого сорта, то $\overline{\Psi}$ есть формула

$$(\exists\, x_1, x_2, ..., x_p)(Z(x_1) \wedge\ Z(x_2) \wedge ... \wedge Z(x_p) \wedge\ \overline{\Phi}(\bar{x}))$$
$$(\text{соответственно,}\ \ (\forall x_1, x_2, ..., x_p)\left(Z(x_1) \wedge\ Z(x_2) \wedge ... \wedge Z(x_p) \Longrightarrow \overline{\Phi}(\bar{x})\ \right));$$

– если Ψ есть формула $(\exists\, x)\Phi(x)$ (соответственно, $(\forall\, x)\Phi(x)$) для индивидуальной переменной x третьего сорта, то $\overline{\Psi}$ есть формула

$$(\exists\, x)\overline{\Phi}(x) \quad (\text{соответственно,}\ \ (\forall\, x)\overline{\Phi}(x)\ ).$$

Рассмотрим фактор-систему $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$, определенную с помощью формул сигнатуры языка элементарной теории полугрупп в теореме 1. Для рассматриваемого автомата $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ и его полугруппы входных символов $S = \mathrm{Inp}(\mathbf{A})$ индукцией относительно порядка формулы Ψ обосновывается следующее свойство:

$$\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta} \models \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad S \models \overline{\Psi}.$$

С другой стороны, из теоремы 1 следует, что автомат $\mathbf{A} = \mathrm{Atm}(H_1, H_2)$ изоморфен фактор-системе $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$. Следовательно, изоморфные алгебраические системы $\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta}$ элементарно эквивалентны, т.е. для любой формулы Ψ языка $\mathbf{L_A}$ выполняется условие

$$\mathbf{A} \models \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\theta} \models \Psi.$$

В результате для любой формулы Ψ языка $\mathbf{L_A}$ получаем следующее условие:

$$\mathbf{A} \models \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Inp}(\mathbf{A}) \models \overline{\Psi}.$$

Теорема доказана. $\square$

Заключение

Таким образом, универсальный гиперграфический автомат над p-гиперграфами с точностью до изоморфизма представляется как алгебраическая система, построенная в полугруппе входных сигналов автомата с помощью канонических отношений автомата. При этом канонические отношения рассматриваемых автоматов определяются формулами элементарной теории полугрупп. С помощью такого представления универсальных гиперграфических автоматов определяется эффективная синтаксическая трансформация формул элементарной теории гиперграфических автоматов в формулы элементарной теории полугрупп, которая позволяет всесторонне исследовать взаимосвязь элементарных свойств универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и их полугрупп входных сигналов. С помощью полученных результатов можно проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и элементарных теорий классов полугрупп таких, как проблема элементарной эквивалентности таких автоматов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных гиперграфических автоматов над p-гиперграфами и пр.

Список литературы

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. Москва : Высшая школа, 1994. 192 с.
2. *Молчанов В. А., Хворостухина Е. В.* Об абстрактной определяемой универсальности гиперграфических автоматов полугруппами входных сигналов // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2 (70). С. 251–264. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-251-264
3. *Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A.* Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, № 2. P. 214–226. https://doi.org/10.1134/S1995080220020109
4. *Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A.* Universal hypergraphic automata representation by autonomous input symbols // Modeling and Analysis of Information Systems. 2018. Vol. 25, № 5 (77). P. 561–571 . https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-5-561-571
5. *Важенин Ю. М., Пинус А. Г.* Элементарная классификация и разрешимость теорий производных структур // Успехи математических наук. 2005. Т. 60, № 3. С. 3–40. https://doi.org/10.4213/rm1428
6. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Известия высших учебных заведений. Математика. 2002. № 5. С. 44–47. EDN: HQUCWH
7. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–748. EDN: HRTFFV
8. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности решеток подалгебр и групп автоморфизмов свободных алгебр // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 4. С. 865–869. EDN: IUFRIV
9. *Важенин Ю. М.* Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 3. С. 281–301.

10. *Важенин Ю. М.* Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1972. № 7. С. 3–11.
11. *Бунина Е. И., Михалев А. В.* Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 2. С. 135–224. EDN: HQLMNP
12. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Москва : Наука, 1980. 416 с.
13. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. Москва : Наука, 1970. 392 с.
14. *Lallement G.* Semigroups and Combinatorial Applications. New York : Wiley, 1979. 376 p.
15. *Вагнер В. В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
16. *Bretto A.* Hypergraph Theory. An Introduction. Cham : Springer, 2013. 119 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0
17. *Картеси Ф.* Введение в конечные геометрии. Москва : Наука, 1980. 320 с.

References

1. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic Structures in Automata and Databases Theory*. Singapore, River Edge, NJ, World Scientific, 1992. 296 p. (Russ. ed.: Moscow, Vysshaya shkola, 1994. 192 p.).
2. Molchanov V. A., Khvorostukhina E. V. On problem of abstract definability of universal hypergraphic automata by input symbol semigroup. *Chebyshevskii Sbornik*, 2019, vol. 20, iss. 2 (70), pp. 251–264 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-251-264
3. Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A. Abstract characterization of input symbol semigroups of universal hypergraphic automata. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, iss. 2, pp. 214–226. https://doi.org/10.1134/S1995080220020109
4. Khvorostukhina E. V., Molchanov V. A. Universal hypergraphic automata representation by autonomous input symbols. *Modeling and Analysis of Information Systems*, 2018, vol. 25, iss. 5 (77), pp. 561–571. https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-5-561-571
5. Pinus A. G., Vazhenin Yu. M. Elementary classification and decidability of theories of derived structures. *Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, iss. 3, pp. 395–432. https://dx.doi.org/10.1070/RM2005v060n03ABEH000847
6. Pinus A. G. On the elementary equivalence of derived structures of free lattices. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2002, vol. 46, iss. 5, pp. 42–45.
7. Pinus A. G. Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, iss. 6, pp. 408–417. https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48
8. Pinus A. G. Elementary equivalence for the lattices of subalgebras and automorphism groups of free algebras. *Siberian Mathematical Journal*, 2008, vol. 49, iss. 4, pp. 692–695. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0066-0, EDN: LLHUMD
9. Vazhenin Yu. M. Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets. *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, iss. 3, pp. 169–179. https://doi.org/10.1007/BF02218675
10. Vazhenin Yu. M. The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1972, iss. 7, pp. 3–11 (in Russian).
11. Bunina E. I., Mikhalev A. V. Elementary equivalence of endomorphism rings of Abelian p-groups. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 2006, vol. 137, iss. 6, pp. 5212–5274. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0296-2
12. Ershov Yu. L. *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Problems of Decidability and Constructive Models]. Moscow, Nauka, 1980. 416 p. (in Russian).

13. Mal'cev A. I. *Algebraic Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1973. 320 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65374-2 (Russ ed.: Moscow, Nauka, 1970. 392 p.).
14. Lallement G. *Semigroups and Combinatorial Applications*. New York, Wiley, 1979. 376 p.
15. Vagner V. V. The theory of relations and the algebra of partial mappings. *Teoriya polugrupp i eye prilozheniya* [Semigroup theory and its applications]. Saratov, Saratov State University Publ., 1965. Iss. 1, pp. 3–178 (in Russian).
16. Bretto A. *Hypergraph Theory. An Introduction*. Cham, Springer, 2013. 119 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00080-0
17. Kárteszi F. *Introduction to Finite Geometries*. Hungary, North Holland, 2014. 280 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1980. 320 p.).

Поступила в редакцию / Received 14.01.2022
Принята к публикации / Accepted 28.01.2022
Опубликована / Published 31.08.2022