Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 307–314
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 307–314
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-307-314, EDN: MXESPP

Научная статья
УДК 517.968.23

О решении невырожденной краевой задачи типа Карлемана для квазигармонических функций в круговых областях

К. М. Расулов, Т. И. Михалёва✉

Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4
Расулов Карим Магомедович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447, AuthorID: 531506
Михалёва Татьяна Игоревна, аспирант кафедры математического анализа, tat.timopheeva@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0698-3242, AuthorID: 771333

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача типа Карлемана для квазигармонических функций в произвольных односвязных областях, которая служит неформальной моделью дифференциальной задачи типа Карлемана для аналитических функций комплексного переменного. Представляется комплексно-аналитический метод решения рассматриваемой задачи в круговых областях, позволяющий устанавливать полную картину ее разрешимости и неустойчивость ее решений по отношению к малым изменениям носителя граничных условий.
Ключевые слова: квазигармоническая функция, дифференциальная краевая задача типа Карлемана, комплексно-аналитический метод, круговая область, неустойчивость решений
Для цитирования: *Расулов К. М., Михалёва Т. И.* О решении невырожденной краевой задачи типа Карлемана для квазигармонических функций в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 307–314. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-307-314, EDN: MXESPP
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On a solution of a nondegenerate boundary value problem of Carleman type for quasiharmonic functions in circular domains

K. M. Rasulov, T. I. Mikhalyova✉

Smolensk State University, 4 Przhevalskogo St., Smolensk 214000, Russia
Karim M. Rasulov, kahrimanr@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-2040-8447, AuthorID: 531506
Tatyana I. Mikhalyova, tat.timopheeva@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-0698-3242, AuthorID: 771333

Abstract. This paper considers a Carleman type boundary value problem for quasiharmonic functions. The boundary value problem is an informal model of a Carleman type differential

© Расулов К. М., Михалёва Т. И., 2022

problem for analytic functions of a complex variable.This paper presented a complex-analytical method for solving the problem under consideration in circular domains, which makes it possible to establish the instability of its solutions concerning small contour changes.

Keywords: quasiharmonic function, differential boundary value problem of Carleman type, complex-analytical method, circular domain, instability of solutions

For citation: Rasulov K. M., Mikhalyova T. I. On a solution of a nondegenerate boundary value problem of Carleman type for quasiharmonic functions in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 307–314 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-307-314, EDN: MXESPP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Постановка задачи

Пусть T^+ — произвольная односвязная область на конечной плоскости $\boldsymbol{C}$ комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром Ляпунова L, а $T^- = \overline{\boldsymbol{C}} \backslash (T^+ \cup L)$, где $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$.

Напомним [1, 2], что *квазигармоническими функциями рода* $n (n \in \boldsymbol{N})$ *в области* T^+ называются функции комплексного переменного, задаваемые формулой

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{z}{1 + z\overline{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{1}$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k} \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ — аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Известно (см., например, [3, 4]), что функции вида (1) являются регулярными в области T^+ решениями дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1 + z\overline{z})^2} W = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, n — некоторое фиксированное неотрицательное целое число.

Следуя [1,2], будем говорить, что квазигармоническая функция $W(z)$ рода $n (n \geqslant 1)$ принадлежит классу $\mathbf{Q}_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, если в представлении (1) аналитическая компонента $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. аналитическая функция $\varphi^+(z)$ непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно (здесь m — некоторое фиксированное неотрицательное целое число).

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача $\boldsymbol{GK}_n$. *Требуется найти все квазигармонические рода n функции $W(z)$, принадлежащие классу $\boldsymbol{Q}_n(T^+) \cap H^{(n)}(L)$ и удовлетворяющие на контуре L условию*

$$W^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{W^+(t)} + g(t), \tag{3}$$

где $W^+(t) = \lim\limits_{z \to t \in L} W(z)$, $\alpha(t)$ — прямой сдвиг контура, для которого выполняется условие Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{4}$$

а $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на контуре L функции, удовлетворяющие условию Гёльдера вместе со своими производными до порядка n включительно (т. е. $G(t)$, $g(t) \in H^{(n)}(L)$), причем $G(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \neq 0$ и $\alpha'(t) \in H(L)$.

Кроме того, всюду в дальнейшем будем считать, что функции $G(t)$, $g(t)$, $\alpha(t)$ удовлетворяют на контуре L следующим тождествам:

$$G[\alpha(t)]\overline{G(t)} = 1, G[\alpha(t)]\overline{g(t)} + g[\alpha(t)] = 0. \tag{5}$$

Сформулированную задачу $\boldsymbol{GK}_n$ будем называть *невырожденной задачей типа задачи Карлемана для квазигармонических функций рода n в области T^+*, при этом соответствующую ей *однородную задачу* ($g(t) \equiv 0$) назовем *задачей* $\boldsymbol{GK}_n^0$.

Сразу отметим, что в силу представления (1) краевое условие (3) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{\alpha(t)}}{1+\alpha(t)\overline{\alpha(t)}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+[\alpha(t)]}{dt^k} = G(t) \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{t}{1+t\overline{t}} \right)^{n-k} \overline{\frac{d^k \varphi^+(t)}{dt^k}} + g(t), \quad t \in L. \tag{6}$$

Но равенство (6) представляет собой краевое условие хорошо известной *дифференциальной краевой задачи типа Карлемана* относительно аналитической в области T^+ функции $\varphi^+(z)$ (см., например, [5, с. 332]). Следовательно, по сути, задача $\boldsymbol{GK}_n$ является *неформальной моделью* дифференциальной задачи типа Карлемана для аналитических функций комплексного переменного.

До сих пор в общем случае *дифференциальные краевые задачи* вида (6) в основном решаются *методом интегральных уравнений* (см., например, [5–7]). Однако метод интегральных уравнений не позволяет установить точные картины разрешимости и исследовать вопросы об устойчивости решений дифференциальных краевых задач.

В связи со сказанным выше в настоящее время *актуальной проблемой* в теории краевых задач комплексного анализа является отыскание *новых подходов* к решению дифференциальных краевых задач вида (6), которые были бы более «чувствительными», чем *метод интегральных уравнений*.

В последнее время математиками различных стран для исследования дифференциальных краевых задач широко используются так называемые *комплексно-аналитические подходы* (см., например, [4,8]), основанные на глубоких качественных аналитических свойствах рассматриваемых классов функций комплексного переменного и аналитической теории дифференциальных уравнений.

Основной целью настоящей статьи является построение конструктивного алгоритма комплексно-аналитического метода решения краевой задачи $\boldsymbol{GK}_n$ в круговых областях, а также установление существенной зависимости картины разрешимости задачи $\boldsymbol{GK}_n$ в круговых областях от величины радиуса рассматриваемой области. Ради краткости изложения далее ограничиваемся исследованием задачи $\boldsymbol{GK}_n$ в случае, когда $n = 2$ и областью T^+ служит произвольная круговая область вида $T_r^+ = \{z : |z| < r\}, r > 0$.

1. Комплексно-аналитический метод решения задачи $\boldsymbol{GK}_2$ в круговых областях

Пусть $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ и $L_r = \{t : |t| = r\}$ — граница круга T_r^+. В случае $n = 2$ представление (1) принимает вид

$$W(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6\overline{z}}{1+z\overline{z}}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^2\varphi^+(z), \quad z \in T_r^+, \tag{7}$$

где $\varphi^+(z)$ — голоморфная (аналитическая) в круге T_r^+ функция, принадлежащая классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$. Поэтому решения задачи $\boldsymbol{GK}_2$ будем искать в виде (7).

В силу (7) и с учетом того, что на окружности $L_r = \{t : |t| = r\}$ выполняется соотношение $\overline{t} = \frac{r^2}{t}$, в рассматриваемом случае граничное условие (3) можно представить так:

$$[\alpha(t)]^2\,\frac{d^2\varphi^+[\alpha(t)]}{dt^2} - \frac{6r^2\alpha(t)}{1+r^2}\frac{d\varphi^+[\alpha(t)]}{dt} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+[\alpha(t)] =$$
$$= \frac{t^2[\alpha(t)]^2 G(t)}{r^4}\left\{\overline{\left(t^2\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{6r^2t}{1+r^2}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+(t)\right)}\right\} +$$
$$+ [\alpha(t)]^2 g(t), \quad t \in L_r. \tag{8}$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ функцию

$$\Phi^+(z) = z^2\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6r^2z}{1+r^2}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+(z), \quad z \in L_r, \tag{9}$$

граничное условие (8) представим в виде

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\overline{\Phi^+(t)} + g_1(t), \quad t \in L_r, \tag{10}$$

где $G_1(t) = \frac{t^2[\alpha(t)]^2G(t)}{r^4}$, $g_1(t) = [\alpha(t)]^2 g(t)$.

Заметим, что равенство (10) является граничным условием классической задачи типа Карлемана относительно аналитической функции $\Phi^+(z)$ класса $A(T_r^+) \cap H(L_r)$ (см., например, [7, с. 172]).

Предположим, что задача типа Карлемана (10) разрешима и уже найдено ее общее решение $\Phi^+(z)$. При таком предположении (с учетом (9) и (7)) для полного решения искомой краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$ остается найти аналитическую компоненту $\varphi^+(z)$ искомой квазигармонической функции $W(z)$, решив в классе $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ следующее линейное дифференциальное уравнение Эйлера (см., например, [9, с. 136]):

$$z^2\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6r^2z}{1+r^2}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+(z) = \Phi^+(z), \quad z \in T_r^+, \tag{11}$$

где $\Phi^+(z)$ — общее решение задачи типа Карлемана (10).

Из проведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего основного результата.

Теорема 1. *Для разрешимости краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$ в классе квазигармонических функций 2-го рода в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ необходимо и достаточно,* *чтобы одновременно были разрешимы задача типа Карлемана (10) (в классе функций $A(T_r^+) \cap H(L_r)$) и дифференциальное уравнение Эйлера (11) (в классе функций $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$). При выполнении этих условий решение краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$ в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ сводится к последовательному решению задачи типа Карлемана (10) и линейного неоднородного дифференциального уравнения Эйлера (11), причем общее решение задачи $\boldsymbol{GK}_2$ можно задавать формулой*

$$W(z) = \frac{d^2\varphi_{о.н.}(z)}{dz^2} - \frac{6\overline{z}}{1+z\overline{z}}\frac{d\varphi_{о.н.}(z)}{dz} + 12\left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^2 \varphi_{о.н.}(z), z \in T_r^+, \tag{12}$$

где $\varphi_{о.н.}(z)$ — общее решение неоднородного уравнения Эйлера (11).

2. О картине разрешимости задачи $\boldsymbol{GK}_2$ в круговых областях

Остановимся теперь на исследовании картины разрешимости рассматриваемой задачи $\boldsymbol{GK}_2$. Из теоремы 1 следует, что условия разрешимости задачи $\boldsymbol{GK}_2$ складываются из условий разрешимости задачи типа Карлемана (10) и линейного дифференциального уравнения Эйлера (11). Но, как известно (см., например, [7, с. 188]), в свою очередь, картина разрешимости краевой задачи типа Карлемана (10) зависит от величины индекса $\chi_1 = \operatorname{Ind} G_1(t) = \frac{1}{2\pi}\{\operatorname{Arg} G_1(t)\}_{L_r} = \chi + 4$, где $\chi = \operatorname{Ind} G(t)$.

А именно, если индекс $\chi_1 \geqslant 0$, то задача типа Карлемана (10) безусловно разрешима, и ее общее решение задается формулой

$$\Phi^+(z) = z^{\frac{\chi_1}{2}} X_0^+(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\Psi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}d\tau + \sum_{j=0}^{\chi_1}\beta_j W_j(z)\right], \quad z \in T_r^+, \tag{13}$$

где $\Psi(t)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма вида

$$\Psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\left[\frac{\alpha\prime(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{(\tau\prime(\sigma))^2}{\tau - t}\right]\Psi(\tau)d\tau = \frac{g_1(t)}{[\alpha(t)]^{\frac{\chi_1}{2}} X_0^+[\alpha(t)]}; \tag{14}$$

здесь $X_0^+(z)$ — так называемая *фундаментальная функция* задачи типа Карлемана (10) (см., например, [7, с. 182]), а $\sum\limits_{j=0}^{\chi_1}\beta_j W_j(z)$ — общее решение соответствующей (10) *однородной задачи* типа Карлемана.

Если же индекс $\chi_1 < 0$, то задача типа Карлемана (10) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются $-\chi_1 - 1$ условий разрешимости вида

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\Psi[\alpha(\tau)]}{\tau}d\tau\right) = 0, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\Psi[\alpha(\tau)]}{\tau^j}d\tau\right) = 0,$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{\Psi[\alpha(\tau)]}{\tau^j}d\tau\right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., -\frac{\chi_1}{2} - 1, \tag{15}$$

причем при выполнении условий (15) краевая задача (10) будет иметь единственное решение, которое также задается формулой вида (13), где вместо $\sum\limits_{j=0}^{\chi_1}\beta_j W_j(z)$ нужно положить вполне определенную действительную постоянную.

Всюду в дальнейшем ради удобства индекс χ_1 задачи типа Карлемана (10) также будем называть *индексом исходной краевой задачи* $\boldsymbol{GK}_2$.

Таким образом, в случае когда индекс задачи $\boldsymbol{GK}_2$ $\chi_1 \geqslant 0$, то выражение функции $\Phi^+(z)$ в правой части дифференциального уравнения Эйлера (11) будет содержать ровно $\chi_1 + 1$ произвольных действительных постоянных $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\chi_1}$. Значит, общее решение $\varphi_{\text{о.н.}}(z)$ *линейного дифференциального уравнения второго порядка* (11) может содержать не более $\chi_1 + 5$ произвольных действительных постоянных. А, следовательно, общее решение исходной краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$, задаваемое формулой (12), в рассматриваемом случае также будет содержать не более $\chi_1 + 5$ произвольных действительных постоянных. Но поскольку при $\chi_1 < 0$ функция $\Phi^+(z)$ в правой части дифференциального уравнения Эйлера (11) не содержит произвольных постоянных, то в этом случае общее решение исходной краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$, задаваемое формулой (12), будет содержать не более четырех произвольных действительных постоянных.

Из приведенных выше рассуждений следует, что число m_{χ_1} линейно независимых (над полем $\boldsymbol{R}$) решений *однородной задачи* $\boldsymbol{GK}_2^0$ при любом значении индекса χ_1 не превосходит $\chi_1 + 5$, т. е.

$$m_{\chi_1} \leqslant \begin{cases} \chi_1 + 5, & \text{если } \chi_1 \geqslant 0 \\ 4, & \text{если } \chi_1 < 0. \end{cases} \tag{16}$$

3. О неустойчивости решений задачи $\boldsymbol{GK}_2^0$ в круговых областях по отношению к малым изменениям носителя краевых условий

Заметим, что общее решение $\varphi_{\text{о.н.}}(z)$ неоднородного линейного дифференциального уравнения (11) имеет следующую структуру:

$$\varphi_{\text{о.н.}}(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z), \tag{17}$$

где $\varphi_0(z)$ — общее решение соответствующего *однородного* линейного дифференциального уравнения вида

$$z^2 \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - \frac{6r^2 z}{1+r^2}\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{12r^4}{(1+r^2)^2}\varphi^+(z) = 0, z \in T_r^+, \tag{18}$$

а $\varphi_1(z)$ — какое-нибудь частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (11).

Далее покажем, что при различных значениях величины радиуса r рассматриваемого круга $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ однородное линейное дифференциальное уравнение Эйлера (18) будет иметь различное число линейно независимых (над полем $\boldsymbol{R}$) решений, принадлежащих классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$. Для этого заметим, что однородное дифференциальное уравнение (18) будет иметь ненулевые решения, принадлежащие классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, лишь при следующих трех значениях радиуса r: $r = 1$, $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

В самом деле, нетрудно проверить (см. также [9, с. 136]), что общее решение однородного дифференциального уравнения Эйлера (18) задается в виде

$$\varphi_0(z) = C_1 z^{\frac{1+7r^2-\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}} + C_2 z^{\frac{1+7r^2+\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}}, \tag{19}$$

где $C_1 = a_1 + ib_1$, $C_2 = a_2 + ib_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Так как функция $\omega_1(r) = \frac{1+7r^2-\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ и $r = 1$ (причем $\omega_1(\sqrt{2+\sqrt{3}}) = 2$ и $\omega_1(1) = 1$), то при $C_1 \neq 0 (C_2 = 0)$ функция вида (19) может принадлежать классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ только при $r = 1$ или $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Аналогично функция $\omega_2(r) = \frac{1+7r^2+\sqrt{1+14r^2+r^4}}{2(1+r^2)}$ принимает целые неотрицательные значения лишь при $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r = 1$ (причем $\omega_2(\sqrt{2-\sqrt{3}}) = 2; \omega_2(1) = 3$), а значит, при $C_2 \neq 0 (C_1 = 0)$ функция вида (19) может принадлежать классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$ лишь при $r = 1$ или $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Таким образом, если $r = 1$, то общее решение однородного дифференциального уравнения (18), принадлежащее классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, задается в следующем виде:

$$\varphi_0(z) = C_1 z + C_2 z^3, \tag{20}$$

где $C_1 = a_1 + ib_1$, $C_2 = a_2 + ib_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Если же $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ или $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, то общее решение дифференциального уравнения (18), принадлежащее классу $A(T_r^+) \cap H^{(2)}(L_r)$, можно задавать в виде

$$\varphi_0(z) = Cz^2, \tag{21}$$

где $C = a + ib$ — произвольная комплексная постоянная.

Поскольку при $\chi_1 \geqslant 0$ правая часть линейного дифференциального уравнения (11) линейно зависит от $\chi_1 + 1$ произвольных действительных постоянных, то некоторые из этих постоянных могут входить и в выражение функции $\varphi_1(z)$, которая является частным решением этого дифференциального уравнения. Следовательно, в силу формул (12) и (17) можно сделать следующий важный вывод: *при фиксированном значении индекса* $\chi_1 = \operatorname{Ind} G_1(t)$ *число* m_{χ_1} *произвольных действительных постоянных, линейно входящих в общее решение краевой задачи* $\boldsymbol{GK}_2$*, существенным образом зависит от величины радиуса* r *рассматриваемой круговой области* $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$, а именно справедлива следующая формула:

$$m_{\chi_1} \leqslant \begin{cases} \chi_1 + 1, & \text{если } r \neq 1,\ r \neq \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}, \\ \chi_1 + 5, & \text{если } r = 1, \\ \chi_1 + 3, & \text{если } r = \sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ или } r = \sqrt{2-\sqrt{3}}. \end{cases} \tag{22}$$

Как видно из формулы (22), при фиксированном значении индекса $\chi_1 = \operatorname{Ind} G_1(t)$ конкретная *однородная краевая задача* $\boldsymbol{GK}_2^0$ будет иметь наибольшее число линейно независимых (над полем $\boldsymbol{R}$) решений в случае $r = 1$, т. е. в случае, когда рассматриваемая область является *единичным кругом* $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$. Кроме того, из формулы (22) следует, что решения краевой задачи $\boldsymbol{GK}_2$, вообще говоря, *неустойчивы по отношению к малым изменениям носителя краевых условий* $L_r = \{t : |t| = r\}$. Здесь в случае $r = 1$, $r = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ и $r = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ возникает явление «резонанса», т. е. резкое изменение значения числа m_{χ_1}.

Список литературы

1. *Расулов К. М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 188 с.
2. *Rasulov K. M.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for queasiharmonic functions in a non-unit disk // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, iss. 1. P. 142–145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237, EDN: PKGXIK

3. *Bauer K. W.* Über eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2W_{z\overline{z}}\pm n(n+1)W=0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner Mathematische Schriften. 1964. № 23. S. 1–98.
4. *Bauer K. W., Ruscheweyh S.* Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1980. 253 p. https://doi.org/10.1007/BFb0103468
5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. Москва : Наука, 1970. 379 с.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Москва : Наука, 1977. 640 с.
7. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Москва : Наука, 1977. 448 с.
8. *Begehr H.* Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. Singapore : World Scientific Publishing, 1994. 273 p.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1958. 474 с.

References

1. Rasulov K. M. *Metod sopriazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* [Conjugation Method of Analytic Functions and Some of Its Applications]. Smolensk, SmolSU Publ., 2013. 188 p. (in Russian).
2. *Rasulov K. M.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary value problem for queasiharmonic functions in a non-unit disk. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, iss. 1, pp. 142—145. https://doi.org/10.1134/S1995080218010237
3. Bauer K. W. Über eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2W_{z\overline{z}}\pm n(n+1)W=0$ zugeordnete Funktionentheorie. *Bonner Mathematische Schriften*, 1964, Nr. 23, S. 1–98.
4. Bauer K. W., Ruscheweyh S. *Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980. 253 p. https://doi.org/10.1007/BFb0103468
5. Vekua N. P. *Sistemy singuliarnykh integral'nykh uravneniy* [Systems of Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1970. 379 p. (in Russian).
6. Gahov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
7. Litvinchuk G. S. *Kraevye zadachi i singuliarnye integral'nye uravneniya so sdvigom* [Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift]. Moscow, Nauka, 1977. 448 p (in Russian).
8. Begehr H. *Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Singapore, World Scientific Publishing, 1994. 273 p.
9. Coddington E. A., Levinson N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Companies, 1955. 429 p. (Russ. ed.: Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1958. 474 p.).

Поступила в редакцию / Received 22.03.2022
Принята к публикации / Accepted 19.04.2022
Опубликована / Published 31.08.2022