Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 322–331
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE

Научная статья
УДК 517.96;517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида

А. П. Хромов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, khromovap@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, AuthorID: 3428

Аннотация. Используя операцию интегрирования расходящегося ряда формального решения по методу разделения переменных, приводятся результаты по обобщенной смешанной задаче (однородной и неоднородной) для волнового уравнения. Ключевым моментом является нахождение суммы расходящегося ряда, соответствующего простейшей смешанной задаче с суммируемой начальной функцией. На базе этого результата находится решение обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения в предположении, что функция, характеризующая неоднородность, локально суммируема. В качестве приложения рассматривается смешанная задача с ненулевым потенциалом. В ней дифференциальное уравнение понимается чисто формально, но сама смешанная задача уже не является обобщенной: вместо формального решения по методу разделения переменных приходим к интегральному уравнению, которое решается методом последовательных подстановок. Это вносит существенное упрощение в рассуждения.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, волновое уравнение, смешанная задача

Для цитирования: *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE

Article

Divergent series and generalized mixed problem for a wave equation of the simplest type

A. P. Khromov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

August P. Khromov, khromovap@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-2454-8009, AuthorID: 3428

Abstract. With the use of the operation of integrating the divergent series of a formal solution in the separating variables method, there are obtained the results concerning a generalized mixed problem (homogeneous and non-homogeneous) for the wave equation. The key moment consists in finding the sum of the divergent series which corresponds to the simplest mixed problem with a summable initial function. This result helps to get the solution of the generalized mixed problem for a non-homogeneous equation under the assumption that non-homogeneity is characterized by a locally summable function. As an application, the mixed problem with a non-zero potential is considered, in which the differential equation is treated quite formally but the mixed problem itself is no longer a generalized one: instead of the formal solution of the separating variables method we get an integral equation which can be solved by the successive substitutions method. Thus we essentially simplify the arguments.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem

For citation: Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for a wave equation of the simplest type. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 3, pp. 322–331 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE

Введение

Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи.

Она впервые появилась в [1]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи, и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией. Ряд формального решения может быть и расходящимся. Расходящийся ряд рассматривается в понимании Л. Эйлера [2, с. 100–101], основоположника теории суммирования расходящихся рядов. В [1] удалось, следуя рекомендациям Л. Эйлера, так найти сумму расходящегося ряда, что в случае классического решения эта сумма является таким решением.

В настоящей статье основное внимание уделяется следующей обобщенной смешанной задаче простейшего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Ее удается решить, привлекая аксиомы о расходящихся рядах из [3, с. 19], используя следующее правило интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{4}$$

где $\int$ — определенный интеграл, и опираясь на известные результаты, относящиеся к почленному интегрированию тригонометрического ряда Фурье по синусам.

Важно, что теперь не требуется, в отличие от [1], привлечения классических решений.

Затем показывается, как полученный результат помогает дать решение и обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения.

Наконец, как приложение к вышеприведенным результатам рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом. Показывается, что эта задача приводится к интегральному уравнению, решение которого получается по методу последовательных подстановок.

Кратко содержание статьи представлено в [4].

1. Простейшая однородная обобщенная смешанная задача

Рассмотрим обобщенную смешанную задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x\cos n\pi t, \tag{5}$$

где $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Определение. *Классическим решением* задачи (1)–(3) называется функция $u(x,t)$, непрерывная вместе с производными $u'_x(x,t)$, $u'_t(x,t)$, причем, в свою очередь, $u'_x(x,t)$ ($u'_t(x,t)$) абсолютно непрерывна по x (по t), удовлетворяющая условиям (2), (3) и почти всюду по x и t уравнению (1).

Отсюда следует, что для классического решения необходимо считать, что $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Относительно классического решения справедлива

Теорема 1 ([5]). *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с условием, что $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ класса Q, то оно единственно и находится по формуле (5), в которой ряд справа при любом фиксированном $t > 0$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$.*

Здесь и в дальнейшем считаем, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$ есть функция класса Q, если $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1]\times[0,T]$.

Таким образом, у нас задача (1)–(3) и ряд (5) тесно связаны.

Расширим понятие этой связи. Ряд (5) имеет смысл для любой $\varphi(x) \in L[0,1]$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)–(3) и будем называть обобщенной смешанной задачей. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти сумму (расходящегося) ряда (5) [2,3].

Итак, рассмотрим ряд (5). Имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \tag{6}$$

где $\Sigma_\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi(x \pm t)$. Отсюда следует, что для нахождения суммы ряда (6) надо найти сумму тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т. е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\sin n\pi x. \tag{7}$$

Пусть сумма ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L[0,1]$ (у нас в запасе только функции из $L[0,1]$). Тогда в соответствии с правилом (4) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 [6, с. 320] ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$ и его сумма есть $\int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$, т. е.

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\xi), \sin n\pi\xi)\int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, получили, что $\int\limits_0^x g(\eta)\,d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)\,d\eta$. Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т. е. нашли сумму $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что сумма ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ есть $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось. В силу (6) получаем, что сумма $u(x,t)$ ряда (5) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]. \tag{9}$$

Таким образом, получена

Теорема 2. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *класса* Q*, определенная по формуле* (9).

2. Простейшая неоднородная смешанная задача

Рассмотрим следующую простейшую неоднородную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Так как $\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta$, то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\,d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{14}$$

Из (14) в силу правила (4) получим

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}(f(\xi,\tau),\sin n\pi\xi)\sin n\pi\eta\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f(\eta,\tau)\,d\eta, \qquad (15)$$

поскольку ряд в (15), как это следует из п. 1, имеет сумму $\frac{1}{2}\tilde f(\eta,\tau)$, где $\tilde f(\eta,\tau)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$ с отрезка $[0,1]$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Решение $u(x,t)$ обобщенной смешанной задачи* (10)–(12) *есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}\tilde f(\eta,\tau)\,d\eta. \qquad (16)$$

Отметим, что без привлечения операции интегрирования расходящегося ряда формула (16) приводится в [7].

То, что $u(x,t)$ есть функция класса Q, дается следующей леммой.

Лемма 1. *Имеет место оценка:*

$$\|u(x,t)\|_{L[Q_T]}\leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Доказательство. Из (16) имеем

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta.$$

Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $T\leqslant m$. Тогда в силу нечетности $\tilde f(\eta,\tau)$ по η имеем

$$\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant\int\limits_{-m}^{m+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=\int\limits_{-m}^{0}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta+\int\limits_0^{m+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=$$

$$=\int\limits_{-m}^{0}|\tilde f(-\eta,\tau)|\,d\eta+\int\limits_0^{m+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=\int\limits_0^{m}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta+\int\limits_0^{m+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{m+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=2\sum_{k=0}^{m}\int\limits_k^{k+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta.$$

Рассмотрим $\int\limits_k^{k+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta$. Пусть k — четно, т. е. $k=2v$. Тогда

$$\int\limits_k^{k+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=\int\limits_{2v}^{2v+1}|\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta=\int\limits_0^1|\tilde f(2v+\xi,\tau)|\,d\xi=\int\limits_0^1|f(\xi,\tau)|\,d\xi.$$

Пусть k нечетно, т. е. $k = 2v + 1$. Тогда

$$\int\limits_k^{k+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_{2v+1}^{2v+2} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_0^1 |\tilde{f}(2v+1+\xi,\tau)|\,d\xi = \int\limits_0^1 |\tilde{f}(1+\xi,\tau)|\,d\xi =$$
$$= \int\limits_0^1 |\tilde{f}(-1-\xi,\tau)|\,d\xi = \int\limits_0^1 |f(1-\xi,\tau)|\,d\xi = \int\limits_0^1 |f(\xi,\tau)|\,d\xi.$$

Таким образом, при всех k (четных и нечетных) получаем один и тот же результат

$$\int\limits_k^{k+1} |\tilde{f}(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_0^1 |f(\xi,\tau)|\,d\xi.$$

Отсюда

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau 2(m+1)\int\limits_0^1 |f(\eta,\tau)|d\eta = (m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Значит,

$$\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|dx\,dt \leqslant T(m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

□

3. Смешанная задача с ненулевым потенциалом

Сначала рассмотрим такую обобщенную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{17}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{19}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ есть (5), $u_1(x,t)$ есть ряд (13). Поэтому, исходя из п.п. 1, 2, получаем

Теорема 4. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение класса Q, определяемое по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{20}$$

Теперь приступаем к смешанной задаче с ненулевым потенциалом:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0, \tag{23}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ класса Q.

В этой задаче будем рассматривать $-q(x)u(x,t)$ как возмущение в задаче (17)–(19). Тогда по теореме 4 мы от задачи (21)–(23) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{24}$$

где $\widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Приступаем к решению уравнения (24).

То, что $\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, трактуется так: сначала нечетно находится $\tilde{\varphi}(x)$ при $x \in [-1,0]$, т. е. $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$ при $x \leqslant 0$; затем полученная $\tilde{\varphi}(x)$ на $[-1,1]$ 2-периодически продолжается на всю ось. Отсюда получаются

Лемма 2. *Функция $\tilde{\varphi}(x)$ определяется однозначно по $\varphi(x)$.*

Лемма 3. *Операция $\tilde{\varphi}(x)$ линейна, т. е.*

$$\widetilde{\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2}(x) = \alpha\tilde{\varphi}_1(x) + \beta\tilde{\varphi}_2(x).$$

Доказательство. Обе операции в формулировке леммы нечетны и 2-периодичны. Но на $[0,1]$ они обе есть $\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$. Поэтому из леммы 2 следует утверждение леммы 3. □

Введем оператор:

$$Bf = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{25}$$

где $f(x,t) \in C[Q_T]$.

Лемма 4. *Оператор B линейный ограниченный в $C[Q_T]$, причем*

$$\|Bf\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1 \cdot \|f(x,t)\|_{C[Q_T]},$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Доказательство. Линейность B следует из леммы 3. Докажем его ограниченность. Как и в лемме 1, имеем

$$|Bf| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant (m+1)\|q(x)f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)T\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]}.$$

□

Образуем ряд

$$A_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x,t),$$

где $a_n(x,t) = Ba_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ и $a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)]$.

Лемма 5 ([1, с. 220–221]). *Если m — наименьшее натуральное число, такое что $T \leqslant m$, то*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n \geqslant 1), \tag{26}$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$. Кроме того, $M_1 \leqslant C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Приведем необходимое для дальнейшего доказательство этой леммы.

Доказательство. Положим $f_n(x,t) = -q(x)a_n(x,t)$. Очевидно $f_n(x,t) \in L[Q_T]$, $a_n(x,t) \in C[Q_T]$ при $n \geqslant 1$. При $n = 1$ оценка (26) справедлива. Предположим, что она выполняется и при некотором n. Докажем, что она выполняется и для $n+1$. Имеем

$$|a_{n+1}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{-m}^{m+1} |\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2m+1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)||a_n(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \frac{2m+1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\eta)| M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\eta =$$

$$= M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!}.$$

Тем самым оценка (26) установлена.

Оценим M_1. Имеем

$$|a_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T d\tau \int_{-m}^{m+1} |\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta =$$

$$= \frac{2m+1}{2}\int_0^T d\tau \int_0^1 |f_0(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \frac{2m+1}{2}\int_0^1 |q(\eta)|\,d\eta \int_{-T}^{T+1} |\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2m+1}{2}\int_0^1 |q(\eta)|\,d\eta \int_{-m}^{m+1} |\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau = \frac{(2m+1)^2}{2}\|q\|_1\|\varphi\|_1.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для M_1. □

Таким образом, ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T.

Теорема 5. *Уравнение* (24) *имеет единственное решение* $u(x,t) = A(x,t)$, *где* $A(x,t) = a_0(x,t) + A_1(x,t)$, *получаемое по методу последовательных подстановок.*

Доказательство. Положим $v(x,t) = u(x,t) - a_0(x,t)$. Тогда из (24) получаем для $v(x,t)$ интегральное уравнение:

$$v(x,t) = a_1(x,t) + Bv. \tag{27}$$

Так как $a_1(x,t) \in C[Q_T]$, то уравнение (27) рассматриваем в $C[Q_T]$. По методу последовательных подстановок из (27) получаем ряд $A_1(x,t)$. Поскольку B линейный и ограниченный оператор в $C[Q_T]$ и $BA_1(x,t) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ есть решение (27). Докажем, что уравнение (27) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть еще другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z(x,t) = A_1(x,t) - w(x,t)$ есть решение уравнения $z(x,t) = Bz(x,t)$, а значит, и $z(x,t) = B^n z(x,t)$ при любом натуральном n. Заметим, что оценка (26) в лемме 5 остается верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из $C[Q_T]$. Возьмем в качестве такой функции функцию $z(x,t)$. Тогда из оценки (26) получаем такую оценку:

$$\|z(x,t)\|_{C[Q_T]} = \|B^{n-1} z(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant \|z(x,t)\|_{C[Q_T]} \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \|q\|_1 \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем $z(x,t) = 0$, и тем самым единственным решением уравнения (27) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнения (24) — ряд $A(x,t)$. $\square$

Для сравнения приведем следующие результаты из [1] и [5].

Теорема 6 ([5, теорема 6]). *Если функции* $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *абсолютно непрерывны и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, *то сумма ряда* $A(x,t)$ *представляет собой классическое решение задачи* (21)–(23) *при условии, что* $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ *класса* Q.

Теорема 7 ([1, теорема 5]). *Если* $\varphi(x) \in L[0,1]$, $\varphi_h(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 6, $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ *при* $h \to 0$, *то соответствующее* $\varphi_h(x)$ *классическое решение* $u_h(x,t)$ *задачи* (21)–(23) *сходится при* $h \to 0$ *по норме* $L[Q_T]$ *к* $A(x,t)$.

Утверждение теоремы следует из линейности $A(x,t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 5.

Таким образом, классическое решение задачи (21)–(23) и решение ее, приводимое в статье, выражаются одной и той же формулой: $u(x,t) = A(x,t)$, и $A(x,t)$ в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ играет роль обобщенного решения, понимаемого как предел классических.

Отметим еще, что ряд $A(x,t)$ в [1] получается иным приемом с более активным использованием обобщенной смешанной задачи.

Список литературы

1. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. С. 215–238. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238
2. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1949. 580 с.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1951. 504 с.
4. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. Вып. 21. Саратов : Саратовский университет [Издание], 2022. С. 319–324. URL: https://sgu.ru/node/184778 (дата обращения: 15.02.2022). EDN: JPPSUX

5. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. https://doi.org/10.1134/S0374064119050121
6. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1957. 552 с.
7. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2017. Вып. 19. С. 41–44. EDN: YWRJOO

References

1. Khromov A. P., Kornev V. V. Divergent series in the Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 215–238 (in Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238
2. Eiler L. *Differentsialnoe ischislenie* [Differential Calculus]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1949. 580 p. (in Russian).
3. Khardi G. *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1951. 504 p. (in Russian).
4. Khromov A. P. Divergent series and generalized mixed problem for wave equation. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*. Proceedings of the 21st International Saratov Winter School. Sarartov, Saratov State University Publ., 2022. Iss. 21, pp. 319–324 (in Russian). Available at: https://sgu.ru/node/184778 (accessed 15 February 2022). EDN: JPPSUX
5. Khromov A. P. Necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with an integrable potential. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 703–717. https://doi.org/10.1134/S0012266119050112
6. Natanson I. P. *Teoriia funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [The Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1957. 552 p. (in Russian).
7. Kornev V. V., Khromov A. P. Convergence of a formal solution by the Fourier method in a mixed problem for the simplest inhomogeneous wave equation. *Mathematics. Mechanics*. Saratov, Saratov State University Publ., 2017. Iss. 19, pp. 41–44 (in Russian). EDN: YWRJOO

Поступила в редакцию / Received 15.03.2022
Принята к публикации / Accepted 01.04.2022
Опубликована / Published 31.08.2022