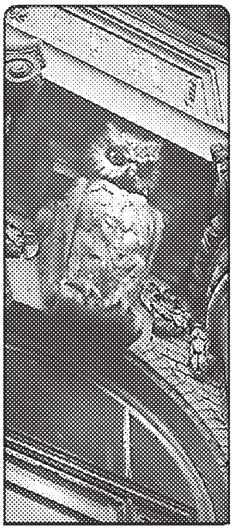

Научный отдел

МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 416–429
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 416–429
mmi.sgu.ru
https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429
EDN: TPUWZW

Научная статья
УДК 517.98

Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов

А. С. Кривошеев[1]✉, О. А. Кривошеева[2]

[1]Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Россия, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, д. 112
[2]Башкирский государственный университет, Россия, 450076, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32

Кривошеев Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, kriolesya2015@mail.ru, AuthorID: 4732, https://orcid.org/0000-0002-4845-8753
Кривошеева Олеся Александровна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, kriolesya2006@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-3748-6078, AuthorID: 589071

Аннотация. В работе рассматриваются весовые пространства интегрируемых L^{ω}_{p} $(p \geqslant 1)$ и непрерывных C^{ω} функций на вещественной прямой. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел λ_k и их кратностей n_k, $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ — система экспоненциальных мономов, построенная по последовательности Λ. Изучаются подпространства $W^p(\Lambda, \omega)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$, которые являются замыканиями системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L^{ω}_{p} и C^{ω} соответственно. При естественных ограничениях на Λ (ограниченность индекса конденсации S_Λ и $n_k/\lambda_k \leqslant c$, $k \geqslant 1$) и выпуклый вес ω получены условия, при которых каждая функция из этих подпространств продолжается до целой и представляется рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости. В отличие от известных ранее результатов по указанной задаче представления в работе не требуется, чтобы последовательность Λ имела плотность, и не накладывается условие отделимости, которое присутствует в этих результатах: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h$, $k \geqslant 1$ (вместо него используется условие равенства нулю специального индекса конденсации).

Ключевые слова: ряд экспоненциальных мономов, весовое пространство, аналитическое продолжение, индекс конденсации

Благодарности: Исследование О. А. Кривошеевой выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Для цитирования: *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.* Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 416–429. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429, EDN: TPUWZW

Article

Representation of functions on a line by a series of exponential monomials

A. S. Krivosheev[1]✉, **O. A. Krivosheeva**[2]

[1]Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Center, RAS, 112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

[2]Bashkir State University, 32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia

Alexander S. Krivosheev, kriolesya2015@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4845-8753, AuthorID: 4732

Olesya A. Krivosheeva, kriolesya2006@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-3748-6078, AuthorID: 589071

Abstract. In this work, we consider the weight spaces of integrable functions L_p^ω ($p \geqslant 1$) and continuous functions C^ω on the real line. Let $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ be an unbounded increasing sequence of positive numbers λ_k and their multiplicities n_k, $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ be a system of exponential monomials constructed from the sequence Λ. We study the subspaces $W^p(\Lambda, \omega)$ and $W^0(\Lambda, \omega)$, which are the closures of the linear span of the system $\mathcal{E}(\Lambda)$ in the spaces L_p^ω and C^ω, respectively. Under natural constraints on Λ (the finiteness of the condensation index S_Λ and $n_k/\lambda_k \leqslant c$, $k \geqslant 1$) and on the convex weight ω, conditions are obtained under which each function of these subspaces continues to an entire function and is represented by a series in the system $\mathcal{E}(\Lambda)$ that converges absolutely and uniformly on compact sets in the plane. In contrast to the previously known results for the specified representation problem, we do not require that the sequence Λ has a density, and we do not impose the separability condition: $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h$, $k \geqslant 1$ (instead, the condition of equality to zero of the special condensation index is used).

Keywords: series of exponential monomials, weight space, analytic continuation, condensation index

Acknowledgements: The work of O. A. Krivosheeva is supported in part by the Young Russian Mathematics award.

For citation: Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A. Representation of functions on a line by a series of exponential monomials. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 416–429 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-416-429, EDN: TPUWZW

Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных положительных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $n(t, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, t)$, и пусть

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} n(t,\Lambda)/t = \varlimsup_{n\to\infty} n/\mu_n$$

— верхняя плотность последовательности Λ, где $\{\mu_n\}$ — последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз. Положим еще

$$m(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} n_k/\lambda_k, \quad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} n_k/\lambda_k.$$

Отметим, что из определений величин $\overline{n}(\Lambda)$ и $m(\Lambda)$ легко следует неравенство $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda)$.

Пусть $\rho > 0$. Символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|$, $t \leqslant 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty. \tag{1}$$

При этих условиях $\omega(t)$, $t > 0$, — неубывающая функция. Подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < \infty, \tag{2}$$

обозначим $\Omega_{\Lambda,\rho}$. В работе рассматриваются весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geqslant 1$)

$$L_p^\omega = \left\{ f : \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega = \left\{ f : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < \infty \right\}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит пространству L_p^ω (C^ω) тогда и только тогда, когда верно (1).

Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ ($p \geqslant 1$) и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ соответственно в пространствах L_p^ω и C^ω.

В работе изучаются условия, при которых каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ ($W^0(\Lambda, \omega)$) продолжается до целой функции F, представимой во всей плоскости рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Подобные задачи рассматривались в работах [1, 2] при условиях $n_k = 1$ и

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} n(t,\Lambda)/r \leqslant 1/h.$$

Отметим результат из работы [3, теорема 2.1]. В ней доказывается, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ ($W^0(\Lambda,\omega_1)$) продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3), если выполнены следующие условия на Λ и ω. Последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d,0)$, который строится при помощи простой ($n_k = 1$) последовательности, удовлетворяющей условию (4). В частности, принадлежность Λ классу $U(d,0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d > 0$, верно (4) и $n_k \leqslant c(\lambda_k)^\alpha$, $k \geqslant 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, и выполнены еще два условия: $\omega(t) \geqslant t^2$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$, для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что $\omega(t+A) \geqslant \omega(t) + t$, $t \geqslant t(A)$.

В работе [4] указанная задача решается при существенно более слабых ограничениях, чем [1–3]. Доказано следующее. Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_\Lambda > -\infty$ (индекс конденсации S_Λ определяется в следующем параграфе), $m(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda,\omega)$ ($W^0(\Lambda,\omega_1)$) продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3). При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости. В данной статье развиваются результаты работы [4]. Получен аналогичный результат, но при условиях более слабых, чем в [4]. Условие $S_\Lambda > -\infty$ заменяется условием $S_{\Lambda,0} = 0$.

1. Мероморфная функция. Индекс конденсации

Пусть $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Рассмотрим функцию из книги [5], формула (9.5.10)

$$g_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

Она является аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, имеет нуль в каждой точке λ_k кратности n_k и не имеет других нулей. В силу леммы 1 из работы [4] верно неравенство

$$\ln|g_\Lambda(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + Ax, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad z = x+iy. \tag{5}$$

При условии отделимости точек λ_k друг от друга функция g_Λ имеет оценки снизу на окружностях $S(\lambda_k,\gamma_k)$ с центрами в точках λ_k. Условие отделимости обеспечивает индекс конденсации S_Λ последовательности Λ, введенный в работе [6]. Положим

$$q_\Lambda^m(z,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m,\delta\lambda_m), k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k}, \quad m \geqslant 1.$$

В случае, когда круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k \neq m$, полагаем $q_\Lambda^m(z,\delta) \equiv 1$. Индексом конденсации называется величина

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{\lambda_m}.$$

Введем вариацию индекса S_Λ. Положим

$$S_{\Lambda,0} = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\ln|q^m_\Lambda(\lambda_m,\delta)|}{\lambda_m\sigma_\Lambda(\lambda_m)}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{|z-\lambda_k|}{3\delta\lambda_k} \leqslant 1, \quad z,\lambda_k \in B(w,\delta|w|), \quad \delta\in(0,1/3), w\neq 0. \tag{6}$$

Следовательно, $S_{\Lambda,0}\leqslant 0$. Если $S_\Lambda > -\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_m)\to+\infty$, $m\to\infty$, то $S_{\Lambda,0}=0$.

Положим еще

$$q_\Lambda(z,w,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(w,\delta|w|)} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k}.$$

Лемма 1. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda)<+\infty$. Тогда существуют $a,b>0$ такие, что*

$$\sigma_\Lambda(t)\leqslant\sigma_\Lambda(ct)\leqslant bc+\sigma_\Lambda(t), \quad c>1, \tag{7}$$

$$\sigma_\Lambda(t)\leqslant a+b\ln t, \quad t\geqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. По условию $\overline{n}(\Lambda)<+\infty$. Тогда для некоторого $b>0$ имеем:

$$n(t,\Lambda)\leqslant br, \quad t>0, \quad n\leqslant b\mu_n, \quad n\geqslant 1, \tag{9}$$

где $\{\mu_n\}$ — последовательность из предыдущего параграфа. Имеем

$$\sigma_\Lambda(t)=\sum_{\lambda_k<t}\frac{n_k}{\lambda_k}\leqslant\sum_{\lambda_k<ct}\frac{n_k}{\lambda_k}=\sigma_\Lambda(ct)=\sum_{\lambda_k<t}\frac{n_k}{\lambda_k}+\sum_{t\leqslant\lambda_k<ct}\frac{n_k}{\lambda_k}=$$
$$=\sigma_\Lambda(t)+\sum_{t\leqslant\lambda_k<ct}\frac{n_k}{\lambda_k}\leqslant\sigma_\Lambda(t)+\frac{n(ct,\Lambda)}{t}\leqslant\sigma_\Lambda(t)+bc.$$

По формуле Эйлера

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}=\ln p+\beta+\beta(p), \quad \beta(p)\to 0, \quad p\to\infty,$$

где β — постоянная Эйлера. Следовательно, с учетом (9) для некоторого $a>0$ имеет место неравенство (8). □

Лемма 2. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ — ее кратное нулевое множество, $S_{\Lambda,0}=0$, $\sigma_{\lambda_k}\to+\infty$ при $k\to\infty$. Тогда существуют числа $\gamma_k>0$, $k\geqslant 1$, такие, что*

1) $\overline{\lim}_{k\to\infty}\gamma_k/\lambda_k=0$;

2) круги $B(\lambda_k,\gamma_k)$, $k\geqslant 1$, попарно не пересекаются;

3) для любого $\varepsilon>0$ существуют числа $\beta,\beta_1>0$ такие, что

$$\ln|f(z)|\geqslant-\beta_1-\beta\lambda_k-\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z\in S(\lambda_k,\gamma_k), \quad k\geqslant 1.$$

Доказательство. Воспользуемся схемами доказательств из лемм 3.1 и 3.3 в работе [7].

Выберем α_k, $k \geqslant 1$, такие, что $0 < \alpha_k \to 0$ и

$$\frac{\ln \alpha_k}{\sigma_\Lambda(\lambda_k)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Последнее возможно, так как $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Для каждого $k \geqslant 1$ символом τ_k обозначим минимальное расстояние от точки λ_k до точек λ_s, $s \neq k$. Положим

$$\gamma_k = 2^{-1} \min\{\alpha_k \lambda_k, \tau_k\}, \quad k \geqslant 1.$$

По построению круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются. Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство

$$\ln |q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geqslant -\varepsilon \lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{10}$$

Согласно определению имеем

$$q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta) = \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k} + q_\Lambda^k(z, \delta).$$

Покажем вначале, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$

$$\ln \left|\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right|^{n_k} \geqslant -\varepsilon \lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{11}$$

Предположим, что это неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{k(m)\}$ и $\{z_m\}$ такие, что $k(m) \to \infty$, $z_m \in S(\lambda_{k(m)}, \gamma_{k(m)})$ и

$$\ln \left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} < -\varepsilon \lambda_{k(m)} \sigma_\Lambda(\lambda_{k(m)}), \quad m \geqslant 1. \tag{12}$$

Пусть $\gamma_k = 2^{-1}\alpha_k\lambda_k$. Тогда

$$\ln \left|\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right|^{n_k} \geqslant n_k \ln \frac{\alpha_k}{6\delta}, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k).$$

Имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{\lambda_k} \leqslant m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda).$$

По условию f — целая функция экспоненциального типа. Следовательно, по теореме Линделефа [8, гл. I, §11, теорема 15] верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Кроме того, по условию $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Тогда в силу выбора чисел α_k

$$\frac{n_k}{\lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k)} \ln \frac{\alpha_k}{6\delta} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Таким образом, можно считать, что $\gamma_{k(m)} = 2^{-1}\tau_{k(m)} \leqslant 2^{-1}\alpha_{k(m)}\lambda_{k(m)}$, $m \geqslant 1$.

Согласно определению чисел τ_k найдем номера p_m такие, что $|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p_m}| = \tau_{k(m)}$, $m \geqslant 1$. По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Поэтому найдутся номер m_1 и $\delta_1 \in (0, 1/3)$ такие, что

$$\frac{\ln |q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p_m}, \delta_1)|}{\lambda_{p_m} \sigma_\Lambda(\lambda_{p_m})} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}, \quad m \geqslant m_1. \tag{13}$$

Поскольку $z_m \in S(\lambda_{k(m)}, \gamma_{k(m)})$, то

$$|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p_m}| = \tau_{k(m)} = 2\gamma_{k(m)} = 2|\lambda_{k(m)} - z_m|. \tag{14}$$

Так как $|\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}| = \tau_{k(m)} \leqslant \alpha_{k(m)}\lambda_{k(m)}$ и $\alpha_k \to 0$, то можно считать, что при $m \geqslant m_1$ верно включение $\lambda_{k(m)} \in B(\lambda_{p(m)}, \delta_1|\lambda_{p(m)}|)$ и $2m^{-1} < \delta_1$. Поэтому согласно (6) и (14)

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{(3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant \ln\left|\frac{\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}}{6m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant$$
$$\geqslant \ln\left|\frac{\lambda_{k(m)} - \lambda_{p(m)}}{3\delta_1\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant \ln|q_\Lambda^{p_m}(\lambda_{p(m)}), \delta_1)|, \quad m \geqslant m_1. \tag{15}$$

Кроме того, с учетом для некоторого номера $m_2 \geqslant m_1$ верна оценка

$$-\frac{\varepsilon}{2}\lambda_{p(m)}\sigma_\Lambda(\lambda_{p(m)}) \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad m \geqslant m_2.$$

Отсюда в силу (13) и (15) получаем

$$\ln\left|\frac{z_m - \lambda_{k(m)}}{(3m^{-1}\lambda_{k(m)}}\right|^{n_{k(m)}} \geqslant -\varepsilon\lambda_{k(m)}\sigma_\Lambda(\lambda_{k(m)}), \quad m \geqslant m_2.$$

Это противоречит (12). Таким образом, (11) верно. Покажем теперь, что для каждого $\varepsilon > 0$ существуют номер k_0 и число $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k), \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k). \tag{16}$$

По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Поэтому найдутся номер m_1 и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что

$$\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)|}{\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k)} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}, \quad k \geqslant k_1. \tag{17}$$

Пусть $z \in S(\lambda_k, \gamma_k)$. В силу определения чисел γ_k имеем

$$|z - \lambda_k| \leqslant |z - \lambda_m|, \quad m \geqslant 1.$$

Предположим, что $|z - \lambda_m| < 2^{-1}|\lambda_m - \lambda_k|$. Тогда

$$|\lambda_m - \lambda_k| \leqslant |z - \lambda_k| + |z - \lambda_m| \leqslant 2|z - \lambda_m| < |\lambda_m - \lambda_k|.$$

Получили противоречие. Следовательно,

$$|z - \lambda_m| \geqslant 2^{-1}|\lambda_m - \lambda_k|, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k, m \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (17) получаем

$$\ln|q_\Lambda^k(z, \delta)| \geqslant \ln\left(\prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k), m \neq k}\left(\frac{|\lambda_k - \lambda_m|}{6\delta\lambda_m}\right)^{n_m}\right) = \ln|q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| +$$
$$+ \ln\left(\prod_{\lambda_m \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k), m \neq k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_m}\right) \geqslant |q_\Lambda^k(\lambda_k, \delta)| - n((1+\delta)\lambda_k, \Lambda)\ln 2.$$

Поскольку $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, то это вместе с (17) дает нам (16). Из (16) и (11) получаем (10). Докажем неравенство из п. 3) леммы. Поскольку f — целая функция экспоненциального типа, то для некоторых $A, B > 0$ имеем

$$\ln|f(w)| \leqslant B + A|w|, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем k_0 и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что для любого $k \geqslant k_0$ верно неравенство (10). Пусть $\delta_0 \in (0, \delta)$. По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа [9, гл. I, §4, теорема 4.3] существуют $a > 0$ и неограниченно растущая последовательность положительных чисел $\{R_p\}$ такие, что $R_{p+1} \leqslant (1+\delta_0)R_p$ и

$$\ln|f(w)| \geqslant -a|w|, \quad |w| = R_p, \quad p \geqslant 1. \tag{19}$$

Пусть $k \geqslant k_0$, $\lambda_k > R_1$ и $z \in S(\lambda_k, \gamma_k)$. Выберем p такое, что $R_p < \lambda_k \leqslant R_{p+1}$. Так как

$$R_{p+1} - R_p \leqslant \delta_0 R_p \leqslant \delta_0 R_{p+1}, \quad p \geqslant 1,$$

то $\lambda_k \in B(R_{p+1}, \delta_0 R_{p+1})$. Рассмотрим функцию

$$h(w) = f(w)(q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0))^{-1}, \quad \delta_0 \in (0, 15^{-1}).$$

Она целая и не имеет нулей в круге $B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1})$. Так как в этом круге верно неравенство $|q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0)| \leqslant 1$, то

$$|h(w)| \geqslant |f(w)|, \quad w \in B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1}).$$

В частности, в силу (19) имеем

$$\ln|h(R_{p+1})| \geqslant -aR_{p+1}.$$

Из определения q_Λ следует неравенство

$$|q_\Lambda(w, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant 1, \quad w \in S(R_{p+1}, 15\delta_0 R_{p+1}).$$

Поэтому из предыдущих рассуждений с учетом (18) получаем

$$\ln|h(w)h^{-1}(R_{p+1})| \leqslant \ln|h(w)| + aR_{p+1} \leqslant \ln|f(w)| + aR_{p+1} \leqslant$$
$$\leqslant B + 2AR_{p+1} + aR_{p+1} = B + A_0 R_{p+1}, w \in S(R_{p+1}, 15\delta_0 R_{p+1}).$$

Тогда по лемме об оценке снизу аналитической функции, не имеющей нулей, [9, гл. I, §4, лемма 4.3] для некоторых $A_1, B_1 > 0$ (зависящих лишь от B и A_0) верна оценка

$$\ln|h(w)h^{-1}(R_{p+1})| \geqslant -B_1 - A_1 R_{p+1}, \quad w \in B(R_{p+1}, 2\delta_0 R_{p+1}). \tag{20}$$

Поскольку $\lambda_k \in B(R_{p+1}, \delta_0 R_{p+1})$ и $\gamma_k/\lambda_k \to 0$, то можно считать, что

$$z \in B(R_{p+1}, 2\delta_0 R_{p+1}), \quad k \geqslant k_0.$$

Тогда в силу (20) с учетом (19) имеем

$$\ln|f(z)| = \ln|h(z)| + \ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant -B_1 - A_2 R_{p+1} + \ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)|,$$

где $A_2 = A_1 + a$. Выберем $\delta_0 \in (0, 15^{-1})$ такое, что $3\delta_0 < \delta$ и $B(R_{p+1}, 3\delta_0 R_{p+1}) \subset \subset B(\lambda_k, \delta\lambda_k)$. Это можно сделать, так как $R_p < \lambda_k \leqslant R_{p+1} \leqslant (1+\delta_0)R_p$. Тогда с учетом (6), определения q_Λ и (10) имеем

$$\ln|q_\Lambda(z, R_{p+1}, 3\delta_0)| \geqslant \ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geqslant -\varepsilon\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем п. 3). □

Сейчас мы можем установить необходимые оценки снизу на функцию g_Λ.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, *и* $\overline{n}(\Lambda) < \infty$. *Тогда существуют числа* $\gamma_k > 0$, $k \geqslant 1$, *такие, что*

1) $\varliminf\limits_{k\to\infty} \gamma_k/\lambda_k = 0$*;*

2) круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$, $k \geqslant 1$, *попарно не пересекаются;*

3) для любого $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $B, B_1 > 0$ *такие, что*

$$\ln |g_\Lambda(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_1 - B\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Доказательство. Представим g_Λ в виде $g_\Lambda = f/h$, где

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)^{n_k}, \quad h(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right).$$

По условию $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$. Тогда согласно теореме Линделефа [8, гл. I, §11, теорема 15] f — целая функция экспоненциального типа. Ее нулевое множество Λ_0 является объединением $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $-\Lambda = \{-\lambda_k, n_k\}$. Точки λ_k не попадают в круги $B(-\lambda_k, \delta\lambda_k)$, $\delta \in (0,1)$. Тогда из определения индекса конденсации и условия леммы следует, что $S_{\Lambda_0,0} = S_{\Lambda,0} = 0$. Таким образом, функция f с нулевым множеством Λ_0 удовлетворяет условиям леммы 2.

Учитывая, что $\lambda_k \neq 0$ (т.е. $n(t,\Lambda) = 0$ для малых $t > 0$) и $n(t,\Lambda) \leqslant bt$, $t > 0$, имеем

$$\ln\left|\prod_{\lambda_k<2|z|}\left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\right| \leqslant \sum_{\lambda_k<2|z|} 2n_k \ln\left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) = \int\limits_0^{2|z|} \ln\left(1 + \frac{|z|}{t}\right) dn(t,\Lambda) =$$

$$= n(2|z|,\Lambda)\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + |z|\int\limits_0^{2|z|}\frac{n(r,\Lambda)dr}{r(t+|z|)} \leqslant 2b|z| + \int\limits_0^{2|z|} bdt \leqslant 4b|z|. \tag{21}$$

По лемме 3.1 из книги [9, гл. I],

$$\ln|(1+w)e^{-w}| \leqslant 2|w|^2, \quad |w| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\prod_{\lambda_k\geqslant 2|z|}\left(1+\frac{z}{\lambda_k}\right)^{2n_k}\exp\left(-\frac{2zn_k}{\lambda_k}\right)\right| \leqslant \sum_{\lambda_k\geqslant 2|z|} 2n_k\left(\frac{|z|}{\lambda_k}\right)^2 =$$

$$= 2\int\limits_{2|z|}^{\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^2 dn(t,\Lambda) \leqslant 4|z|^2\int\limits_{2|z|}^{\infty}\frac{n(t,\Lambda)dr}{t^3} \leqslant 4b|z|^2\int\limits_{2|z|}^{\infty}\frac{dt}{t^2} \leqslant 2b|z|.$$

Отсюда с учетом (21) и лемм 1, 2 получаем пункты 1)–3). □

2. Биортогональная система

Пусть $\rho > 0$, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Следуя [3, лемма 4.2], положим

$$u(z) = \frac{x+3\rho}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(2\sigma_\Lambda(|t|)}{(x+3\rho)^2+(y-t)^2}dt.$$

В силу (2) функция $u(z)$ определена в полуплоскости $C_{3\rho} = \{z : x = \mathrm{Re} z > -3\rho\}$. Она является положительной и гармонической в этой полуплоскости. Пусть $v(z)$ — гармоническая функция, сопряженная к $u(z)$. Тогда функция

$$h_{\omega,\rho}(z) = \exp(-2u(z) - 2iv(z))$$

является аналитической в полуплоскости $C_{3\rho}$ и не имеет там нулей. Согласно лемме 5 из работы [4] верно неравенство

$$\ln |h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant -\omega(2\sigma_\Lambda(|z|)), \quad z \in C_{3\rho}, \tag{22}$$

и существует $A_0 > 0$ такое, что

$$\ln |h_{\omega,\rho}(z)| \geqslant -A_0(x + 3\rho), \quad z \in C_{2\rho}, \quad |y| \leqslant 2^{-1}(x + 3\rho). \tag{23}$$

Пусть $\omega \in \Omega_\rho$. Символом ω^* обозначим выпуклую функцию, сопряженную к функции ω [10, гл. III], т. е.

$$\omega^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}}(xt - \omega(t)).$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(0) = 0$, то $\omega^*(x) \geqslant 0$ и $\omega^*(0) = 0$.

Лемма 4. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$ и $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда существуют аналитические в полуплоскости $C_{3\rho}$ функции $G_{\omega,k,j}$ и числа $C, C_1 > 0$, такие, что*

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant C\beta_k \frac{e^{\omega^*(x)}}{1 + y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1, \tag{24}$$

где $\ln \beta_k = -4^{-1}\lambda_k \sigma_\Lambda(\lambda_k) + C_1\lambda_k$, и имеют место равенства

$$G^{(j-1)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 1, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_k) = 0, \quad l = \overline{0, n_k - 1}, \quad l \neq j - 1, \quad k \geqslant 1,$$
$$G^{(l)}_{\omega,k,j}(\lambda_p) = 0, \quad l = \overline{0, n_p - 1}, \quad p \geqslant 1, \quad p \neq k.$$

Доказательство. Для построения функций $G_{k,j}$ воспользуемся схемой, используемой в работе [3, леммы 4.2, 4.4]. Пусть $\Lambda_1 = \{\lambda_k + 3\rho, n_k\}$. Положим

$$g(z) = g_{\Lambda_1}(z + 3\rho).$$

В силу (5)

$$\ln |g(z)| \leqslant 2(x + 3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(|z + 3\rho|) + A(x + 3\rho) \leqslant 2(x + 3\rho)\sigma_\Lambda(|z|) + A(x + 3\rho), \quad z \in C_{3\rho}.$$

Отсюда с учетом (8) получаем

$$\ln |g(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + 6\rho b \ln |z| + Ax + A_1, \quad z \in C_{3\rho}. \tag{25}$$

По условию $S_{\Lambda,0} = 0$. Тогда, как нетрудно заметить, имеет место равенство $S_{\Lambda_1,0} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу леммы 3 найдутся числа $B, B_1 > 0$ и γ_k, $k \geqslant 1$, такие, что $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, круги $B(\lambda_k, \gamma_k)$ попарно не пересекаются, и для каждого $k \geqslant 1$ верно неравенство

$$\ln |g_{\Lambda_1}(z)| \geqslant (2 - \varepsilon)(\lambda_k + 3\rho)\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k + 3\rho) - B_1 - B(\lambda_k + 3\rho), \quad z \in S(\lambda_k + 3\rho, \gamma_k).$$

Следовательно,

$$\ln|g(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k+3\rho) - B_1 - B(\lambda_k+3\rho), \quad z\in S(\lambda_k,\gamma_k), \quad k\geqslant 1. \tag{26}$$

В силу (22) и (25) имеем

$$\begin{gathered}\ln|g(z)| + \ln|h_{\omega,\rho}(z)| \leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) - \omega(2\sigma_\Lambda(|z|)) + 6\rho b\ln|z| + Ax + A_1 \leqslant \\ \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}}(xt-\omega(t)) + 6\rho\sigma_\Lambda(|z|) + A(x+3\rho) = \omega^*(x) + 6\rho b\ln|z| + Ax + A_1.\end{gathered} \tag{27}$$

Положим

$$G(z) = \frac{g(z)h_{\omega,\rho}(z)e^{-Az}}{(1+z+3\rho)^{[6\rho b]+3}},$$

где $[6\rho b]$ — целая часть числа $6\rho b$. Функция G обращается в нуль в точках λ_k с кратностью n_k. Поскольку круги $B(\lambda_k,\gamma_k)$ попарно не пересекаются, то для каждого $k\geqslant 1$ в окрестности замкнутого круга $\overline{B(\lambda_k,\gamma_k)}$ верно представление

$$\frac{1}{G(z)} = \sum_{j=1}^{n_k}\frac{d_{k,j}}{(z-\lambda_k)^j} + g_k(z),$$

где g_k — аналитическая функция и

$$d_{k,j} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S(\lambda_k,\gamma_k}\frac{(z-\lambda_k)^{j-1}}{G(z)}dz.$$

Положим

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{G(z)}{(j-1)!}\sum_{l=1}^{n_k+1-j}\frac{d_{k,j-1+l}}{(z-\lambda_k)^l}, \quad j=\overline{1,n_k}, \quad k\geqslant 1.$$

В лемме 4.4 работы [3] доказывается, что для функций $G_{k,j}$ выполнены равенства из утверждения данной леммы. Докажем (24). Имеем

$$\begin{gathered}|d_{k,j}| \leqslant (\gamma_k)^j d_k, \quad \frac{1}{d_k} = \min_{z\in S(\lambda_k,\gamma_k)}|G(z)|, \quad j=\overline{1,n_k}, \quad k\geqslant 1, \\ |G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant d_k\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!}\left|\frac{h_{\omega,\rho}(z)e^{-Az}}{(1+z+3\rho)^{[6\rho b]+3}}\right|\sum_{l=1}^{n_k+1-j}\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l}.\end{gathered} \tag{28}$$

Функции $g(z)/(z-\lambda_k)^l$, $l=\overline{1,n_k}$, $k\geqslant 1$, являются аналитическими в $C_{3\rho}$. Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant |g(z)|, \quad z\in C_{3\rho}\setminus B(\lambda_k,\gamma_k), \\ \frac{(\gamma_k)^l|g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant \max_{w\in S(\lambda_k,\gamma_k)}|g(w)|, \quad z\in B(\lambda_k,\gamma_k).\end{gathered}$$

Пусть $z\in B(\lambda_k,\gamma_k)$. Так как $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, то в силу (7), (8) и (25) имеем

$$\begin{gathered}\max_{w\in S(\lambda_k,\gamma_k)}\ln|g(w)| \leqslant 2(\lambda_k+\gamma_k)\sigma_\Lambda(\lambda_k+\gamma_k) + 6\rho b\ln(\lambda_k+\gamma_k) + A(\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant \\ \leqslant 2(\lambda_k-\gamma_k)\sigma_\Lambda(2|z|) + 2\gamma_k\sigma_\Lambda(\lambda_k+\gamma_k) + 6\rho b\ln(2|z|) + Ax + A(\lambda_k+\gamma_k) + A_1 \leqslant\end{gathered}$$

$$\leqslant 2x\sigma_\Lambda(|z|) + 6\rho b \ln|z| + Ax + \frac{1}{2}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + A_3\lambda_k + A_2, \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\frac{(\gamma_k)^l |g(z)|}{|z-\lambda_k|^l} \leqslant c_1\alpha_k|g(z)|, \quad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1,$$

где $c_1 > 0$ и $\ln\alpha_k = 2^{-1}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + A_3\lambda_k$. Отсюда с учетом (27) и (28) получаем

$$|G_{\omega,k,j}(z)| \leqslant c_2 n_k\alpha_k d_k \frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!}\frac{e^{\omega^*(x)}}{1+y^2}, \quad z \in C_{3\rho}, \quad k \geqslant 1. \tag{29}$$

Оценим теперь оставшиеся сомножители. Так как $m(\Lambda) \leqslant \overline{n}(\Lambda) < \infty$, то $n_k \leqslant b_0\lambda_k$, $k \geqslant 1$, где $b_0 > 0$. Учитывая, что $j! \geqslant j^j/3^j$ для всех $j \geqslant 1$, имеем

$$\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{(\lambda_k/3)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{j-1}{\lambda_k}\ln\frac{\lambda_k}{j-1} \leqslant \sup_{t>0}\frac{\ln t}{t} \leqslant 1, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\frac{(\gamma_k)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant \frac{(\lambda_k/3)^{j-1}}{(j-1)!} \leqslant e^{\lambda_k}, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Оценим, наконец, d_k. Так как $\gamma_k/|\lambda_k| \leqslant 1/4$, то все точки $z = x + iy$ окружностей $S(\lambda_k, \gamma_k)$, $k \geqslant k_0$, удовлетворяют неравенству $|y| \leqslant 2^{-1}(x + 3\rho)$. Кроме того,

$$-([6\rho b] + 3)\ln|1 + z + 3\rho| \geqslant -B_0\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k \geqslant k_0.$$

Положим $\varepsilon = 2^{-1}$. Тогда с учетом (26), (23) и (7) для некоторых $B_2, B_3 > 0$ имеем

$$\ln|G(z)| \geqslant (2-\varepsilon)\lambda_k\sigma_{\Lambda_1}(\lambda_k + 3\rho) - B_2 - B\lambda_k \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2-\varepsilon}{2}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_2 - B_3\lambda_k \geqslant \frac{3}{3}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) - B_2 - B_3\lambda_k, \quad z \in S(\lambda_k, \gamma_k), \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом,

$$\ln|d_k| \leqslant -\frac{3}{4}\lambda_k\sigma_\Lambda(\lambda_k) + B_2 + B_3\lambda_k, \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда с учетом (29) получаем (24). □

Положим

$$H_{\omega,k,j}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{\omega,k,j}(x+iy)e^{-(x+iy)t}dy, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1. \tag{30}$$

Доказательство леммы 5 дословно повторяет доказательство леммы 7 из работы [4].

Лемма 5. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$, $t > 0$, и $G_{\omega,k,j}$ — функции и β_k — числа из леммы 4, $j = \overline{1, n_k}$, $k \geqslant 1$. Тогда на $\mathbb{R}$ по формуле (30) определены функции $H_{\omega,k,j}$, они непрерывны и для некоторых чисел $D_1, D_2 > 0$ имеют место оценки*

$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_1\beta_k e^{-\omega(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$
$$|H_{\omega,k,j}(t)| \leqslant D_2\beta_k e^{-2\rho|t|}, \quad t < 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

Кроме того, верны равенства

$$G_{\omega,k,j}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,j}(t)e^{zt}dt, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1.$$

3. Представление рядами

Опираясь на лемму 5 и практически дословно повторяя доказательство теоремы 1 из работы [4], получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\rho > 0$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. *Тогда каждая функция* $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ *продолжается до целой функции* F, *для которой имеет место представление* (3), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$, $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$, $t > 0$, *и функции* $H_{\omega,k,j}$ *определены по формуле* (30). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Пусть $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$, где $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда $f \in W^1(\Lambda, \omega_0)$, где $\omega_0(t) = \omega_1(t) + |t|$, и $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho+1}$. Поэтому из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 0$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $S_{\Lambda,0} = 0$, $\sigma_\Lambda(\lambda_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, $\overline{n}(\Lambda) < \infty$, $\omega_1 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. *Тогда каждая функция* $f \in W^0(\Lambda, \omega_1)$ *продолжается до целой функции* F, *для которой имеет место представление* (3), *где*

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geqslant 1,$$

$\omega(t) = \omega_1(t)$, $t \leqslant 0$, $\omega(t) = \omega_1(t) + t^2$, $t > 0$, *и функции* $H_{\omega,k,j}$ *определены по формуле* (30). *При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

Выше отмечалось, что $S_{\Lambda,0} = 0$, если $S_\Lambda > -\infty$ и $\sigma_\Lambda(\lambda_m) \to +\infty$, $m \to \infty$. Следовательно, теоремы 1 и 2 из работы [4] являются частными случаями соответственно теорем 1 и 2. В работе [4] показано, что теорема 2.1 из работы [3] является частным случаем теорем 1 и 2 из работы [4], а значит, и теорем 1 и 2.

Список литературы

1. *Anderson J. M., Binmore K. G.* Closure theorems with applications to entire functions with gaps // Transactions of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 161. P. 381–400. https://doi.org/10.2307/1995948
2. *Deng G. T.* Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space // Journal of Approximation Theory. 2003. Vol. 125, iss. 1. P. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.004
3. *Zikkos E.* The closed span of some exponential system in weighted Banach spaces on the real line and a moment problem // Analysis Mathematica. 2018. Vol. 44, iss. 4. P. 605–630. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0311-0
4. *Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F.* The representation by series of exponential monomials of functions from weight subspaces on a line // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, iss. 6. P. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S1995080221060159
5. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions. New York : Academic Press, 1954. 276 p.
6. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136. https://doi.org/10.4213/im476

7. *Кривошеев А. С., Кривошеева О. А., Рафиков А. И.* Инвариантные подпространства в полуплоскости // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, вып. 3. С. 58–81. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-57
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. Москва : Гостехиздат, 1956. 632 с.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. Москва : Наука, 1983. 176 с.
10. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. New Jersey : Princeton University Press, 1970. 470 p.

References

1. Anderson J. M., Binmore K. G. Closure theorems with applications to entire functions with gaps. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1971, vol. 161, pp. 381–400. https://doi.org/10.2307/1995948
2. Deng G. T. Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space. *Journal of Approximation Theory*, 2003, vol. 125, iss. 1, pp. 1–9. https://doi.org/10.1016/j.jat.2003.09.004
3. Zikkos E. The Closed span of some exponential system in weighted Banach spaces on the real line and a moment problem. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, iss. 4, pp. 605–630. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0311-0
4. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F. The representation by series of exponential monomials of functions from weight subspaces on a line. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, iss. 6, pp. 1183–1200. https://doi.org/10.1134/S1995080221060159
5. Boas R. P. Jr. *Entire Functions*. New York, Academic Press, 1954. 276 p.
6. Krivosheev A. S. A fundamental principle for invariant subspaces in convex domains. *Izvestiya: Mathematics*, 2004, vol. 68, iss. 2, pp. 291–353. https://doi.org/10.1070/IM2004v068n02ABEH000476
7. Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Rafikov A. I. Invariant subspaces in half-plane. *Ufa Mathematical Journal*, 2021, vol. 13, iss. 3, pp. 57–79. https://doi.org/10.13108/2021-13-3-57
8. Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Providence, American Mathematical Society, 1964. 583 p. (Russ. ed.: Moscow, Gostekhizdat, 1956. 632 p.).
9. Leont'ev A. F. *Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Series of Exponentials]. Moscow, Nauka, 1983, 176 p. (in Russian).
10. Rockafellar R. T. *Convex Analysis*. New Jersey, Princeton University Press, 1970. 470 p.

Поступила в редакцию / Received 18.03.2022
Принята к публикации / Accepted 15.04.2022
Опубликована / Published 30.11.2022