



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 430–446

*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 430–446

[mmi.sgu.ru](http://mmi.sgu.ru)

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446>, EDN: UIUDUP

Научная статья

УДК 517.98

## Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде

К. Ю. Малышев

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ), Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

<sup>2</sup>Российский университет дружбы народов (РУДН), Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

**Малышев Ксаверий Юрьевич**, <sup>1</sup>ведущий программист; <sup>2</sup>аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, [kmalyshev08102@mail.ru](mailto:kmalyshev08102@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8823-9136>

**Аннотация.** Исследованы решения начально-краевых задач о возбуждении колебаний ограниченного отрезка точечным мгновенно действующим источником. Решения этих задач, называемые функциями Грина уравнения колебаний на отрезке, известны в виде бесконечных рядов Фурье или рядов по функциям Хевисайда. Метод Крылова ускорения сходимости рядов Фурье для некоторых вариантов граничных условий не просто ускоряет сходимость, а позволяет составить выражения для функций Грина в конечном виде. В настоящей работе даны конечные выражения функций Грина в виде элементарных функций вещественной переменной. Рассмотрено четыре различных постановки граничных условий, в том числе условия периодичности.

**Ключевые слова:** уравнение колебаний на отрезке, функция Грина, представление в конечном виде, граничные условия, метод А. Н. Крылова

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН. Автор благодарит проф. М. Д. Малых (РУДН) за постоянное внимание к работе, проф. А. Н. Боголюбова (МГУ, физический факультет), проф. Л. А. Севастьянова (РУДН), М. В. Алексеева (НИУ ВШЭ) за ценные обсуждения.

**Для цитирования:** *Малышев К. Ю.* Представление функций Грина волнового уравнения на отрезке в конечном виде // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 430–446. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446>, EDN: UIUDUP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Representation of Green's functions of the wave equation on a segment in finite terms

K. Yu. Malyshev

Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics (SINP MSU), 1(2) Leninskie gory, GSP-1, Moscow 119991, Russia

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russia

**Ksaverii Yu. Malyshev**, [kmalyshev08102@mail.ru](mailto:kmalyshev08102@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0001-8823-9136>



**Abstract.** Solutions of initial-boundary value problems on the excitation of oscillations of a finite segment by an instantaneous point source are investigated. Solutions to these problems, called Green's functions of the equation of oscillations on a segment, are known in the form of infinite Fourier series or series in terms of Heaviside functions. A. N. Krylov's method of accelerating the convergence of Fourier series for several types of boundary conditions not only accelerates the convergence, but allows one to compose expressions for Green's functions in finite terms. In this paper, finite expressions of Green's functions are given in the form of elementary functions of a real variable. Four different formulations of boundary conditions are considered, including the periodicity conditions.

**Keywords:** equation of oscillations on a segment, Green's function, representation in finite terms, boundary conditions, A. N. Krylov's method

**Acknowledgements:** This work was supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program. The author thanks Prof. M. D. Malykh (RUDN), for constant attention to the work, Prof. A. N. Bogolyubov (Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University), Prof. L. A. Sevastyanov (RUDN), M. V. Alekseev (HSE) for valuable discussions.

**For citation:** Malyshev K. Yu. Representation of Green's functions of the wave equation on a segment in finite terms. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 430–446 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-430-446>, EDN: UIUDUP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Решения начально-краевых задач математической физики традиционно выражаются бесконечными рядами по собственным функциям [1–3]. Например, колебания струны описываются начально-краевой задачей для однородного волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

на отрезке конечной длины, здесь и далее  $c$  — скорость распространения возмущений. Решение этой задачи представляется в виде тригонометрического ряда по методу Фурье [3]. Однако в [4] представлено обобщение формулы Даламбера на случай отрезка конечной длины и дано решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения (1) в конечном виде для случая кусочно-гладких начальных условий. При этом в [4, 5] рассмотрено несколько вариантов однородных граничных условий.

Метод Даламбера как способ решения начальной задачи на бесконечной прямой появился почти одновременно с методом Фурье [6]. Более того, в XVIII–XIX вв. метод Даламбера иногда применялся и к конечному отрезку. Такой путь решения ведёт к функциям, которые часто нельзя представить в виде единого выражения на всей области изменения аргументов [7]. В те времена кусочно заданные функции не принимались за функции, допустимые в анализе [8, с. 26–28], а решения в виде выражений, заданных кусочно, казались менее достойными внимания, чем единые выражения в виде бесконечных рядов.

Вопрос о том, являются ли элементарными конечные выражения, доставляемые формулами Даламбера [5], выходит далеко за рамки того раздела компьютерной алгебры, который исследует разрешимость в элементарных функциях. Дело в том, что фундаментом для разработки алгоритмов интегрирования в элементарных функциях [9, 10] стала теория, созданная в 1830-х гг. Лиувиллем [11]. Здесь элементар-



ные функции трактовались как аналитические функции комплексной переменной. При этом, например, функции  $|x|$ ,  $\operatorname{sgn} x$  не считались элементарными, а функция  $\arcsin(\sin x)$  считалась равной  $x$ . Однако в современной литературе [12, с. 142–143] прочно утвердилось более широкое представление об элементарных функциях. Здесь элементарные функции рассматриваются над полем вещественных чисел и понимаются как функции, допускающие выражение при помощи конечного числа арифметических действий и основных элементарных операций (вычисления логарифма, экспоненты и т.п.). Современные системы компьютерной алгебры (далее CAS) умеют работать с такого рода элементарными выражениями, например, график функции  $\arcsin(\sin x)$  не совпадает с графиком  $x$ . Поэтому отыскание элементарных в современном смысле выражений для решения начально-краевой задачи для волнового уравнения (1) имеет очевидное практическое значение.

**Замечание 1.** При вычислении интегралов можно заметить некоторое разночтение трактовок понятия элементарной функции. Например, система Sage (v. 9.3)<sup>1</sup> рисует график функции  $\arcsin(\sin x)$  верно, но при этом полагает, что

$$\int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) dx = \frac{\pi^2}{2},$$

хотя площадь под кривой равна  $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2}$ .

В рамках метода Фурье вопрос об элементарном представлении вновь возникает при попытке ускорить сходимость рядов Фурье. В первой половине прошлого века А. Н. Крылов разработал приём усиления сходимости рядов Фурье [13, 14]. Ниже используется версия метода Крылова, изложенная в монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [15, с. 98–100, ср. 14]. Пусть имеется ряд Фурье вида

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right) \sin nz.$$

Пусть функция  $A$  равна нулю при нулевом значении аргумента и является достаточно гладкой. Тогда её можно представить в виде Тейлоровского разложения с остаточным членом в форме Пеано:

$$A\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Подставив это разложение в ряд Фурье  $F$ , получим сумму конечного числа рядов Фурье со скоростью сходимости ниже, чем  $n^{-k}$ , и ряда Фурье  $f_k$ , сходимость которого не медленнее, чем  $n^{-k}$ :

$$F = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2} + \dots + f_k.$$

Аддитивно выделенные ряды Фурье вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^{2m+1}}$$

<sup>1</sup>Sage. The Sage Developers, SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.4), 2016. URL: <https://www.sagemath.org> (дата обращения: 10.05.2022).



могут быть просуммированы в конечном виде кусочно-полиномиальных функций для  $m = 0$  и для каждого  $m \in \mathbb{N}$  [16, с. 578, 5.4.5, формула 5]. Как отметил сам А. Н. Крылов в предисловии к монографии [13], этот способ «часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции». Согласно [13, с. 227], указанная техника может применяться и в случаях, когда корни из собственных значений не являются натуральными числами, в настоящей работе встречается простейший такой случай, когда вместо  $n$  имеется  $n + \frac{1}{2}$ , см. п. 3.2.

Мы применили метод Крылова к рядам Фурье, описывающим функции Грина начально-краевых задач для волнового уравнения с четырьмя вариантами граничных условий, и обнаружили, что всякий раз вместо бесконечного ряда получается элементарное выражение. Это и составляет основной результат настоящей статьи.

Напомним, что решение неоднородной начально-краевой задачи для волнового уравнения может быть представлено в интегральной форме [17, с. 260], ядром которого служит функция Грина [3, с. 66, 314]. В некоторых случаях для функции Грина были получены выражения в виде бесконечной суммы функций Хевисайда [18, с. 208]. Выражение в виде ряда функций Хевисайда получается методом отражения начального условия и последующим применением формулы Даламбера (см. п. 3.2.). Без отсылки к теории функций Грина ядро такого представления было описано в виде кусочно-линейных периодических функций для случая задачи Дирихле в [19] и [20]. Квадратурные выражения из работы [19], связанные с кусочно-гладкими начальными условиями, могут быть выражены аналитически по формуле Даламбера для отрезка из [4, 5]. Вопрос о суммировании ряда Фурье для функции Грина в случае условий Дирихле рассматривался в [21].

## 1. Функция Грина

По определению функция Грина [3, 22] является формальным решением начально-краевой задачи о возбуждении колебаний струны конечной длины  $l$  точечным мгновенно действующим источником [17]:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > \tau, 0 \leq \tau < +\infty, \\ g|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial t}|_{t=\tau} = \delta(x - s), \\ P[g]|_{x=0} = 0, \quad Q[g]|_{x=l} = 0, \quad \tau \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $P, Q$  — операторы граничных условий,  $\delta$  — дельта-функция Дирака [23], описывающая точечный источник, который расположен в точке  $s \in (0, l)$  и действует в момент времени  $\tau \geq 0$ . Значения  $s$  и  $\tau$  являются параметрами.

Ниже будут рассмотрены случаи, когда операторы  $P$  и  $Q$  задают условия Дирихле (закреплённые концы,  $g|_{x=0} = g|_{x=l} = 0$ ) или Неймана (свободные концы,  $g'|_{x=0} = g'|_{x=l} = 0$ ). Аналогичное построение выполнено для случаев, когда один конец закреплён, а другой — свободен, и также для постановки периодических граничных условий  $g(0) = g(l), g'(0) = g'(l)$  [3, 24]. Краевые условия упругого закрепления концов изучаться не будут.

Чтобы выписать ряд Фурье для функции Грина, определим функции  $v_n(x)$  и числа  $\lambda_n$  — ортонормированные в  $L_2[0, l]$  собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_n}{dx^2} + \lambda_n v_n = 0, & 0 < x < l, \\ P[v_n]|_{x=0} = 0, \quad Q[v_n]|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (3)$$



Если операторы  $P$  и  $Q$  задают одновременно условия Дирихле, или же один из них соответствует условию Дирихле, а второй — условию Неймана, то формальное решение задачи (2) имеет вид ряда Фурье по собственным функциям задачи (3) [22]:

$$g(x, t; s, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} c(t - \tau))}{\sqrt{\lambda_n} c} v_n(s) v_n(x). \quad (4)$$

Если операторы  $P$  и  $Q$  одновременно задают граничные условия второго рода или же отвечают условиям периодичности  $u(0) = u(l), u'(0) = u'(l)$ , то задача (3) имеет нулевое собственное значение, которому соответствует собственная функция, равная константе. При этом формальное выражение в виде ряда (4) сохраняет силу, но начинается с линейного по времени слагаемого.

**Замечание 2.** Если предположить, что решение задачи (2) существует, то оно с необходимостью имеет своим рядом Фурье выражение (4). Вопрос существования решения задачи (2) в каком-либо подходящем обобщённом смысле выходит за рамки настоящей статьи.

## 2. Базовые тригонометрические ряды

Прежде чем обратиться к суммированию рядов Фурье для функций Грина, рассмотрим ряды, которые будут играть роль базовых конструкций в дальнейшем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)z}{2n+1}, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

**Лемма 1.** Ряд (5) сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве множества  $\mathbb{R}$ , не содержащем точек вида  $z = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Равномерная сходимость ряда (5) на указанном классе множеств доказывается по признаку Абеля, например в [25, с. 19].  $\square$

**Лемма 2.** Ряд (6) сходится равномерно на каждом замкнутом подмножестве множества  $\mathbb{R}$ , не содержащем точек вида  $z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Исследование ряда (6) полностью аналогично рассмотрению ряда (5).  $\square$

**Замечание 3.** Сходимость не является абсолютной, за исключением точек, кратных  $\pi$  [26, с. 16], поэтому результаты суммирования зависят от порядка следования слагаемых [27]. Далее всюду предполагается стандартное упорядочивание слагаемых.

**Лемма 3.** Имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \right), \quad z \in \mathbb{R}, \quad z \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

**Доказательство.** Формула (7), отнесённая к одному периоду  $z \in (0, 2\pi)$ , доказана в [15, с. 106]. На всю прямую  $\mathbb{R}$  равенство (7) распространяется с помощью формул приведения.  $\square$



**Замечание 4.** Функция  $\arctan(\operatorname{ctg} \frac{z}{2})$  является кусочно-линейной  $2\pi$ -периодической функцией, её выражение на промежутке  $(0, 2\pi)$

$$\operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \right) = \frac{\pi - z}{2}. \tag{8}$$

Если доопределить её в точках разрыва средним арифметическим предельных значений слева и справа (ср. с теоремой Дирихле [28, с. 438]), то формула (7) будет справедлива при всех вещественных  $z$ .

Будем далее использовать лемму 2, учитывая это замечание.

**Лемма 4.** *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n + 1)z}{2n + 1} = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \sin z, \quad z \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где  $\operatorname{sgn}(t) = \frac{\sqrt{t^2}}{t}$  — функция, принимающая значения 1 или  $-1$  всюду, кроме  $t = 0$ , где она равна 0.

**Доказательство.** Формула (9), отнесённая к одному периоду  $z \in [0, 2\pi]$ , доказана в [15, с. 97] как следствие (7). На всю прямую  $\mathbb{R}$  выражение (9) распространяется с помощью формул приведения.  $\square$

Выражения соответствующих функций, рассматриваемых на периоде, приведены в собрании рядов [29], в справочнике [30] и многих других источниках. Самый распространённый метод получения формулы (7) — суммирование комплексной геометрической прогрессии [15, 31, 32]. В учебнике [28, с. 447] дано суммирование этих рядов без применения комплексных чисел путём почленного интегрирования конечной суммы

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nz = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Выражения (7) и (9) нетрудно «угадать», выполняя построение графиков частичных сумм рядов в системах компьютерной алгебры [33]. Разложив угаданные выражения для сумм в ряды Фурье, можно получить ещё одно обоснование формул (7), (9). Этот метод описан в [34].

**Замечание 5.** Ряд, аналогичный (5), являлся контрпримером Абеля к «теореме» о непрерывности предела последовательности непрерывных функций [35]. Эти ряды рассматривались в трудах Н. И. Лобачевского, который одним из первых занялся вопросом обоснования их сходимости («исчезания», как тогда говорили) [36, с. 31–81]. В работе [37] дан обзор исследований ряда (5), в том числе его частичных сумм, проведённых в XX в., и их приложений к общим тригонометрическим рядам. Из недавних работ укажем [38].

### 3. Суммирование рядов для функций Грина

Рассмотрим примеры суммирования рядов для функций Грина уравнения колебаний, приняв следующую договорённость об обозначениях. Для сокращения объёма формул во всех нижеследующих примерах функций Грина, кроме случая граничных условий периодичности, будем полагать длину отрезка  $l = \pi$ . Для случая условий периодичности удобно брать  $l = 2\pi$ . Введём обозначение  $T = c(t - \tau)$ . Будем далее всюду полагать  $c = 1$ .



### 3.1. Граничные условия Дирихле

В качестве первого примера возьмём граничные условия первого рода на обоих концах отрезка («условия закреплённых концов»):

$$g_{11}(0) = g_{11}(\pi) = 0, \quad \tau \leq t < +\infty.$$

Функция Грина волнового уравнения на отрезке с данными граничными условиями представляется в виде ряда

$$g_{11}(x, t; s, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nT \sin ns \sin nx, \quad (10)$$

выписанного, например, в [3].

**Теорема 1.** Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями Дирихле выражается элементарной функцией

$$g_{11} = \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T-x+s}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T+x-s}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T-x-s}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{x+s+T}{2} \right) \right), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < s < \pi, \quad T \in [0, +\infty). \quad (11)$$

**Доказательство.** Если преобразовать произведение трёх синусов в сумму четырёх синусов, то получается сумма четырёх рядов из леммы 3. Применение этой леммы немедленно даёт доказываемую формулу.  $\square$

**Замечание 6.** Вне точек разрыва функции Грина при помощи функций целой и дробной части числа вместо (11) можно записать:

$$g_{11} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{x-s+T}{2\pi} \right] + \left[ \frac{-x+s+T}{2\pi} \right] - \left[ \frac{-x-s+T}{2\pi} \right] - \left[ \frac{x+s+T}{2\pi} \right] \right) = \\ = -\frac{1}{2} \left( \left\{ \frac{x-s+T}{2\pi} \right\} + \left\{ \frac{-x+s+T}{2\pi} \right\} - \left\{ \frac{-x-s+T}{2\pi} \right\} - \left\{ \frac{x+s+T}{2\pi} \right\} \right).$$

Здесь  $[z]$  — целая часть числа  $z$  («антье» или floor),  $\{z\}$  — дробная часть числа  $z$  [39, с. 87–91].

### 3.2. Смешанная постановка граничных условий

Рассмотрим случай, когда граничные условия в (2) имеют вид

$$g_{12}|_{x=0} = \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad \tau \leq t < +\infty. \quad (12)$$

Формальный ряд Фурье (4) для функции Грина по соответствующим собственным функциям отрезка:

$$g_{12} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) s \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) T. \quad (13)$$



**Теорема 2.** Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями первого и второго родов представляется в виде элементарной функции следующего вида:

$$g_{12} = \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \sin \frac{x-s+T}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \sin \frac{-x+s+T}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \sin \frac{x+s-T}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sgn} \sin \frac{-x-s-T}{2} \quad (14)$$

при  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 < s < \pi$ ,  $T \in [0, +\infty)$ .

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения сводится к тригонометрическим преобразованиям и ссылке на лемму 4.  $\square$

**Замечание 7.** Вне точек разрыва функции Грина с помощью функции «целая часть вещественного числа» вместо (14) можем записать

$$g_{12} = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{T-x+s}{4\pi} \right] + \left[ \frac{T+x-s}{4\pi} \right] - \left[ \frac{T-x-s}{4\pi} \right] - \left[ \frac{T+x+s}{4\pi} \right] - \left[ \frac{T-x+s-2\pi}{4\pi} \right] - \left[ \frac{T+x-s-2\pi}{4\pi} \right] + \left[ \frac{T-x-s-2\pi}{4\pi} \right] + \left[ \frac{T+x+s-2\pi}{4\pi} \right] \right). \quad (15)$$

**Замечание 8.** Начально-краевая задача (2) с граничными условиями (12) рассматривается в [18, с. 208] как пример применения метода Даламбера для получения выражения для функции Грина. Получается бесконечный ряд следующего вида:

$$g_{12} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\sigma(x+T-s+2n\pi) - \sigma(x+T+s+2n\pi) - \sigma(x-T-s+2n\pi) + \sigma(x-T+s+2n\pi)). \quad (16)$$

Здесь  $\sigma(z)$  — функция Хевисайда, равная 1 при  $z \geq 0$  и 0 при  $z < 0$ . Эта формула имеет вид бесконечного ряда. Нетрудно заметить, что для всякого набора значений  $x$ ,  $s$ ,  $T$  не более четырёх слагаемых ряда (16) дают ненулевой вклад в выражение для функции Грина. Количество и номера этих членов зависят от  $x$ ,  $s$  и  $T$ .

### 3.3. Граничные условия Неймана

Рассмотрим случай, когда оба оператора граничных условий задают условия Неймана (или «условия 2-го рода», или «условия свободных концов»):

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad \tau \leq t < +\infty.$$

Эта постановка задачи может описывать колебания газа в открытой трубе, продольные колебания жёсткого стержня со свободными концами [22]. Данную постановку краевых условий можно встретить при знакомстве с теорией нерелятивистских струн [24, гл. 4]. В доступной нам литературе исследование суммы ряда Фурье для соответствующей функции Грина не проводилось.





В данном случае возникает нулевое собственное значение в задаче Штурма – Лиувилля, которому отвечает собственная функция, равная константе. Формальный ряд Фурье для функции Грина начинается с линейного по времени слагаемого:

$$g_{22}(x, t; s, \tau) = \frac{t - \tau}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nT \cos nx \cos ns. \quad (17)$$

**Теорема 3.** Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения с граничными условиями Неймана представляется в виде элементарной функции следующего вида:

$$g_{22} = \frac{t - \tau}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T - x + s}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T + x - s}{2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T - x - s}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{T + x + s}{2} \right) \right), \quad (18) \\ 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < s < \pi, \quad T \in [0, +\infty).$$

**Доказательство.** Обоснование этого факта тождественно предыдущим случаям. □

**Замечание 9.** Вне точек разрыва функции Грина можно преобразовать выражение (18) к виду

$$g_{22} = \frac{t - \tau}{\pi} - \frac{1}{2} \left( \left\{ \frac{T - x + s}{2\pi} \right\} + \left\{ \frac{T + x - s}{2\pi} \right\} - \left\{ \frac{-T + x + s}{2\pi} \right\} - \left\{ \frac{-T - x - s}{2\pi} \right\} \right) = \\ = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{T - x + s}{2\pi} \right] + \left[ \frac{T + x - s}{2\pi} \right] - \left[ \frac{-T + x + s}{2\pi} \right] - \left[ \frac{-T - x - s}{2\pi} \right] \right). \quad (19)$$

### 3.4. Условия периодичности

Условия периодичности или циклические граничные условия — дополнительные условия к волновым уравнениям, часто встречающиеся в теоретической и математической физике (см., например, [24, гл. 4, 7, 13; 40]).

Задача Штурма – Лиувилля имеет вид [3, с. 76–77]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_n}{dx^2} + \lambda_n v_n = 0, & 0 < x < 2\pi; \\ v_n|_{x=0} = v_n|_{x=2\pi}, v_n'|_{x=0} = v_n'|_{x=2\pi}. \end{cases} \quad (20)$$

Данная задача имеет нулевое собственное значение, которому отвечает нормированная собственная функция, равная константе  $\sqrt{2\pi}$ . Остальные собственные значения суть квадраты натуральных чисел,  $\lambda_n = n^2$ , и каждому из них отвечают две линейно независимые нормированные собственные функции:

$$v_n^1 = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad v_n^2 = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Разложение дельта-функции в начальном условии в ряд Фурье имеет вид [22, с. 289; 40, с. 11; 41, с. 519–520]:

$$\delta(x - s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin ns \sin nx + \cos ns \cos nx) =$$



$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - s). \tag{21}$$

Поэтому ряд Фурье для функции Грина волнового оператора на отрезке начинается с линейного по времени слагаемого и записывается в виде

$$g_{\text{P}}(x, t; s, \tau) = \frac{t - \tau}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(x - s) \sin k(t - \tau)}{k}. \tag{22}$$

**Теорема 4.** Ряд Фурье для функции Грина волнового уравнения на отрезке с граничными условиями периодичности приводится к элементарной функции следующего вида:

$$\begin{aligned} g_{\text{P}} &= \frac{t - \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{x - s + t - \tau}{2} \right) - \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{x - s - t + \tau}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{t - \tau + x - s}{2\pi} \right] - \left[ \frac{-t + \tau + x - s}{2\pi} \right] \right) = \\ &= \frac{t - \tau}{2\pi} - \frac{1}{2} \left( \left\{ \frac{t - \tau + x - s}{2\pi} \right\} - \left\{ \frac{-t + \tau + x - s}{2\pi} \right\} \right), \tag{23} \\ &0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 < s < 2\pi, \quad t \geq \tau, \quad 0 \leq \tau < +\infty. \end{aligned}$$

Последние два выражения справедливы вне точек разрыва функции Грина, первое — всюду.

**Доказательство.** Доказательство аналогично приведённым выше рассуждениям о других функциях Грина.  $\square$

**Замечание 10.** Формула для суммы бесконечного ряда из (22), рассматриваемого на ограниченном множестве  $\{x, s, T : 0 < x - s < \pi, 0 < T < \pi\}$ , в виде кусочно-линейной функции есть в [16, п. 5.4.15, с. 588, № 3].

#### 4. Визуализация функций Грина

Замкнутые выражения позволяют легко визуализировать функции Грина. При этом удаётся описать единообразно все многократные отражения и переотражения импульса от концов отрезка для рассмотренных вариантов граничных условий, особенно эффектно это наблюдать при помощи функций анимации, встроенных в современные CAS [33].

Как видно из найденных формул, функции Грина для всех четырёх рассмотренных краевых задач — кусочно-постоянные функции  $x$  для каждого фиксированного момента  $t$ . Отмеченное явление было указано в книге [22, с. 105] для условий Дирихле при достаточно малых значениях  $t$ . Для значений  $t$ , при которых существенно влияние концов, поведение функции Грина зависит от граничных условий.

В случае условий Дирихле мгновенный профиль функции Грина как функции  $x$  представляет собой столбик, высота которого может скачком менять знак, а ширина меняется непрерывно. Модуль высоты равен  $\frac{1}{2c}$  при единичной амплитуде начальной дельта-функции. Отражение от концов отрезка происходит без изменения знака функции Грина  $g_{11}$ . Скачок знака возникает в моменты, когда отклик струны возвращается в точку, где располагался точечный источник в начальный момент времени, и при проходе точки, которая симметрична начальному положению источника относительно



середины отрезка. За наименьший период, равный  $\frac{2l}{c}$ , происходит две смены знака высоты столбика.

В случае, когда один из концов закреплён, а второй свободен (условие Неймана), для достаточно малых значений  $t$  функция Грина  $g_{12}$  снова имеет вид прямоугольного столбика. Отражение от свободного конца сопровождается скачкообразным увеличением высоты графика в два раза. При этом график приобретает форму двух смежных столбиков переменной ширины.

На рис. 1 приведён пример сравнения графиков суммы первых 200 слагаемых ряда Фурье и замкнутого выражения для функции Грина. Выбран момент времени сразу после отражения импульса от «свободного» конца. При этом «удвоенный» сигнал

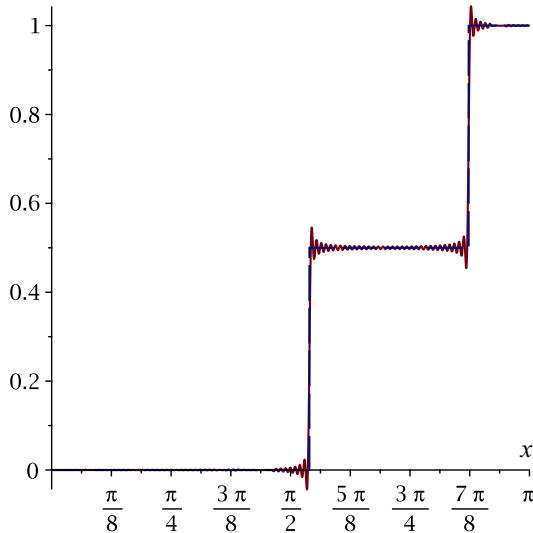


Рис. 1. Графики суммы 200 слагаемых ряда Фурье (13) и символьного выражения (14). Правый конец свободен, левый закреплён. Функция Грина  $g_{12}(x, s, t, \tau)$  при  $s = \frac{5\pi}{6}$ ,  $t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$ ,  $\tau = 0$

Fig. 1. Graphs of the sum of 200 terms of the Fourier series (13) and the symbolic expression (14). The right end is free, the left one is fixed. Green's function  $g_{12}(x, s, t, \tau)$  for  $s = \frac{5\pi}{6}$ ,  $t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$ ,  $\tau = 0$

сопровождается скачкообразным увеличением высоты столбика на  $\frac{1}{2c}$ . Функция Грина  $g_{22}$  на каждом периоде изменения бесконечной суммы Фурье кусочно-постоянна, вне точек разрыва принимает не более чем три значения. Сама функция Грина не является периодической: каждый период два из трёх возможных значений, принимаемых этой функцией, увеличиваются на  $\frac{1}{2c}$ . Функция Грина условий Неймана со временем превосходит по величине любое наперёд заданное число, в отличие от функций Грина  $g_{11}$  и  $g_{12}$ , что связано с наличием нулевого собственного значения соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Сравнение эволюции функций Грина, связанных условиями Дирихле и Неймана, представлено на рис. 2. Отметим, что на начальном этапе распространения импульса вдоль отрезка эволюция функции Грина  $g_{22}$  тождественна эволюции функции  $g_{12}$ , как видно из сравнения рис. 1 и 2, а, но в целом поведение этих функций существенно различно.

при проходе точки, симметричной начальному положению источника относительно середины отрезка, отражается без изменения знака и движется до свободного конца, отражение от которого имеет вид скачкообразного обнуления функции Грина. После этого график приобретает форму одиночного прямоугольника постоянной ширины, движущегося к закреплённому концу, от которого отражается с последующим линейным сокращением ширины. Ширина прямоугольника обращается в нуль при проходе точки начального положения источника, после чего скачком изменяется знак высоты столбика. Дальнейшая эволюция происходит аналогично описанному с изменением знака функции Грина. Интересно отметить, что существуют промежутки времени, на которых функции Грина  $g_{11}$  и  $g_{12}$  точно совпадают, и их эволюция определяется только начальным положением точечного источника.

В случае краевых условий Неймана отражение импульса от концов отрезка

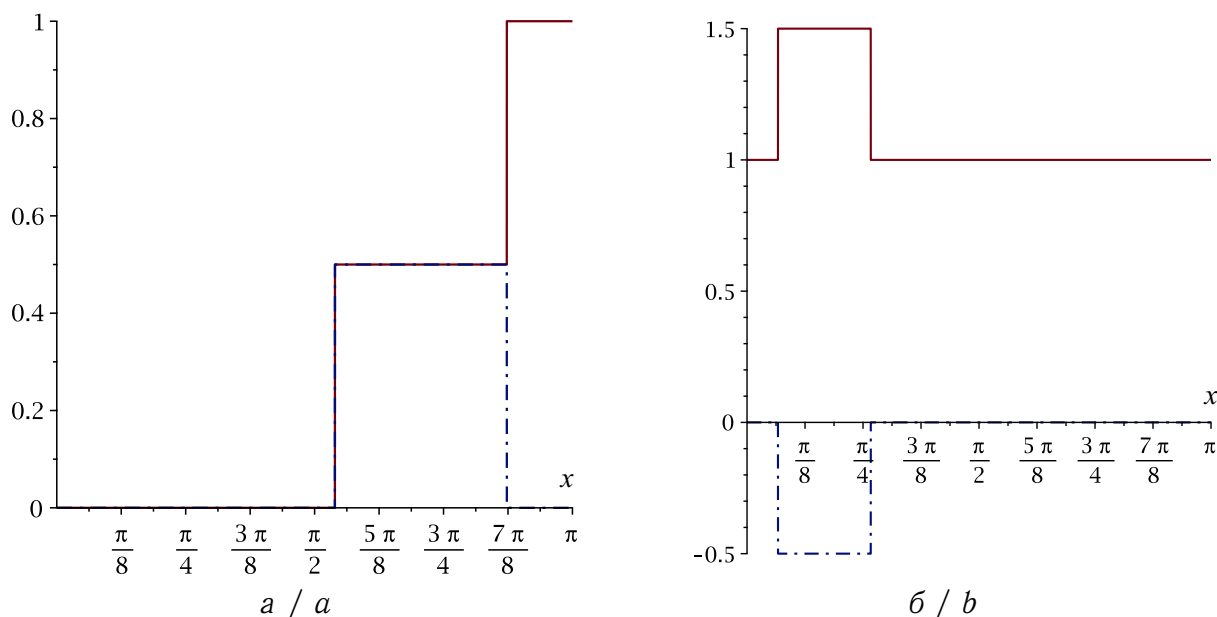
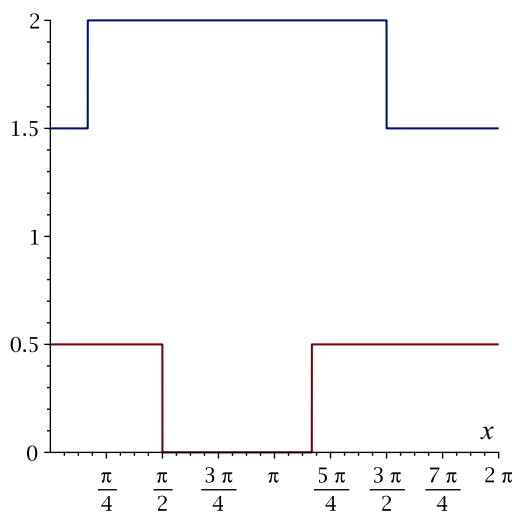


Рис. 2. Функции Грина  $g_{11}(x, s, t, \tau)$  (штрих-пунктирная ломаная), (11), и  $g_{22}(x, s, t, \tau)$  (сплошная ломаная), (18). Параметры: а)  $s = \frac{5\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$ ; б)  $s = \frac{5\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{5\pi}{6} + \frac{5.6\pi}{6}$   
 Fig. 2. Green's functions  $g_{11}(x, s, t, \tau)$  (dashed polyline), (11), and  $g_{22}(x, s, t, \tau)$  (solid polyline), (18). Parameters: а)  $s = \frac{5\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{10}$ ; б)  $s = \frac{5\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{5\pi}{6} + \frac{5.6\pi}{6}$

Условия периодичности также приводят к нулевому собственному значению, и функция Грина волнового оператора может превосходить любое наперёд заданное положительное число. Скачок величины данной функции наступает при прохождении импульсом начального положения источника  $s$  и при прохождении «диаметрально-противоположной» точки  $(s + \pi$  или  $s - \pi)$ , где происходит взаимодействие импульса с самим собой. Прохождение импульсом концов отрезка не сопровождается отражением, но импульс с изменённым направлением движения выходит из противоположного конца отрезка. При этом график функции Грина имеет вид двух столбиков с постоянной высотой и изменяющейся шириной (рис. 3). В случае условий периодичности график функции Грина скачкообразно смещается с течением времени вдоль оси ординат, хотя в каждый момент времени функция Грина на отрезке  $[0, l]$  принимает не более чем два значения (см. рис. 3) вне точек разрыва.



Функции Грина разрывны и представляются медленно сходящимися рядами Фурье. Поэтому в данных примерах ярко выражено явление Гиббса, если для построения графиков используются не найденные выше замкнутые выражения, а частичные суммы рядов Фурье. Явление

Рис. 3. Функция Грина  $g_P(x, s, t, \tau)$ , (23). Параметры:  $s = \frac{11\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{4\pi}{6}$  (нижняя кривая),  $t = \frac{4\pi}{6} + 3\pi$  (верхняя кривая)  
 Fig. 3. Green's function  $g_P(x, s, t, \tau)$ , (23). Parameters:  $s = \frac{11\pi}{6}, \tau = 0, t = \frac{4\pi}{6}$  (lower curve),  $t = \frac{4\pi}{6} + 3\pi$  (upper curve)



Гиббса в данном случае наблюдается как для пространственных, так и для временных параметров функции Грина  $g(x, s, t - \tau)$ . Полученные выражения в конечном виде свободны от этого эффекта, хотя и представляют разрывные функции.

На представленных рисунках хорошо видно, что функция Грина является кусочно-постоянной функцией, следовательно, её следует рассматривать как обобщенное решение уравнения колебаний по аналогии с тем, как это делается для бесконечной прямой [23, с. 222, 226].

## Заключение

Поводя итог, можно утверждать, что применение метода А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье для функций Грина начально-краевой задачи для уравнения колебаний позволило получить для этих функций выражения в конечном виде. Эти выражения являются элементарными кусочно-постоянными функциями. Рассмотрено четыре разных постановки краевых условий, каждая из которых приводит к индивидуальным особенностям поведения решения. Для каждой функции Грина выписаны представления в конечном виде: при помощи тригонометрических и обратных тригонометрических функций, при помощи операции взятия целой части, при помощи операции взятия дробной части. Все формулы верифицированы путём сравнения с графиками частичных сумм рядов Фурье.

Найденные выражения весьма удобны для дальнейшего исследования и применения в системах компьютерной алгебры. Однако они не являются аналитическими функциями и лежат вне теории разрешимости в элементарных функциях, восходящей к Лиувиллю. Это позволяет смотреть на метод Крылова как на часть некоторой общей теории решения в конечном виде краевых задач математической физики, которую ещё предстоит создать.

Построение графиков выполнялось в CAS Maple<sup>2</sup>.

### Список литературы

1. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики : в 2 т. Москва ; Ленинград : ГТТИ, 1933. Т. 1. 525 с.
2. Strutt J. W. The Theory of Sound : in 2 vols. New York : Dover Publications, 1945. Vol. 1. 520 p.
3. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов А. В. Лекции по математической физике. Москва : Наука, 2004. 416 с.
4. Доля П. Г. Периодическое продолжение функций и решение уравнения колебаний струны в системах символьной математики // Вестник Харьковского национального университета. Серия: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. 2006. № 733. С. 106–116.
5. Dolya P. G. Solution to the homogeneous boundary value problems of free vibrations of a finite string // Журнал математической физики, анализа, геометрии. 2008. Т. 4, № 2. С. 237–251.
6. Ларин А. А. Зарождение математической физики и теории колебаний континуальных систем в «Споре о струне» // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». История науки и техники. 2008. № 8. С. 89–97.
7. Гаврилов В. С., Денисова Н. А. Метод характеристик для одномерного волнового

<sup>2</sup>Symbolic and numeric computing environment Maple, 2019. URL: <https://www.maplesoft.com> (дата обращения: 10.05.2022).



- уравнения. Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2014. 72 с.
8. Маркушевич А. И. Элементы теории аналитических функций. Москва : Учпедгиз, 1944. 545 с.
  9. Bronstein M. Symbolic Integration I. Transcendental Functions. Second Edition. Springer, 2005. 325 p.
  10. Павлов Д. И. Символьное интегрирование // Компьютерные инструменты в образовании. 2010. № 2. С. 38–43. EDN: MQIBUR
  11. Liouville J. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1835. Bd. 13, Hf. 2. S. 93–118. <https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.93>
  12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. Москва : Физматлит, 2005. 648 с.
  13. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
  14. Хромов А. П., Бурлуцкая М. Ш. Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 171–198. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-171-198>
  15. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950. 696 с.
  16. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды : в 3 т. Москва : Физматлит, 2002. Т. 1. 632 с.
  17. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. Москва : Физматлит, 2001. 576 с.
  18. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. Москва : Наука, 1972. 688 с.
  19. Ласый П. Г., Мелешко И. Н. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводниках с помощью полилогарифмов // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340>
  20. Ласый П. Г., Мелешко И. Н. Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2019. Т. 2, № 5. С. 413–421. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421>
  21. Кадырова В. Д., Насыров Ф. С., Сучкова Д. А. Вероятностное представление решений волновых уравнений и функция Грина // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 129–135. EDN: ZWSQOT
  22. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 2004. 798 с.
  23. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1981. 512 с.
  24. Цвибах Б. Начальный курс теории струн. Москва : Эдиториал УРСС, 2011. 784 с.
  25. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. Москва : Физматлит, 2002. 464 с.
  26. Бутузов В. Ф. Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды. Москва : Физический факультет МГУ, 2015. 40 с.
  27. Никишин Е. М. Перестановки функциональных рядов // Математический сборник. 1971. Т. 85 (127), № 2 (6). С. 272–285.



28. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва : Наука, 1966. 656 с.
29. Jolley L. V. *W* Summation of Series. New York : Dover Publications, inc., 1961. 278 p.
30. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва : Наука, 1963. 1110 с.
31. Гринберг Г. А. Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений. Москва : Изд-во АН СССР, 1948. 730 с.
32. Боголюбов А. Н., Левашова Н. Т., Могилевский И. Е., Мухартова Ю. В., Шапкина Н. Е. Функция Грина оператора Лапласа. Москва : Физический факультет МГУ, 2018. 188 с.
33. Малашинок Г. И. Система компьютерной алгебры MATHPARTNER // Программирование. 2017. Т. 43, № 2. С. 63–71.
34. Васильев С. А., Еднерал В. Ф., Малых М. Д., Севастьянов Л. А. Математический анализ. Ряды с MS Mathematics. Москва : Изд-во РУДН, 2016. 119 с.
35. Тихомиров В. М. Абель и его великая теорема // Квант. 2003. № 1. С. 11–15.
36. Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений : в 5 т. Т. 5. Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1951. 500 с.
37. Пак И. Н. О суммах тригонометрических рядов // Успехи математических наук. 1980. Т. 35, вып. 2 (212). С. 91–144.
38. Telyakovskii S. A. On the properties of blocks of terms of the series  $\sum \frac{1}{k} \sin kx$  // Ukrainian Mathematical Journal. 2012. Vol. 64, № 5. P. 816–822. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0680-7>
39. Кнут Д., Грэхем Р., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. Москва : Мир, 1998. 703 с.
40. Колоколов В. В., Лебедев И. В. Избранные главы математической физики. Москва : ИТФ им. Ландау, 2018. 53 с.
41. Зорич В. А. Математический анализ : в 2 ч. Ч. 2. Москва : МЦНМО, 2019. 676 с.

### References

1. Kurant R., Gilbert D. *Metody matematicheskoy fiziki* [Methods of Mathematical Physics]. Vol. 1. Moscow, Leningrad, GTTI, 1933. 525 p. (in Russian).
2. Strutt J. W. *The Theory of Sound*. Vol. 1. New York, Dover Publications, 1945. 520 p.
3. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov A. V. *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures on Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 416 p. (in Russian).
4. Dolya P. G. Periodic continuation of functions and solution of the equation of string vibrations in systems of symbolic mathematics. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Seriya: Matematicheskoye modelirovaniye. Informatsionnyye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya* [Bulletin of Kharkov National University. Series: Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems], 2006, iss. 733, pp. 106–116 (in Russian).
5. Dolya P. G. Solution to the homogeneous boundary value problems of free vibrations of a finite string. *Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii* [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry], 2008, vol. 4, iss. 2, pp. 237–251.
6. Larin A. A. The origin of mathematical physics and the theory of oscillations of continuum systems in the “Dispute about the string”. *Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta “Khar'kovskiy politekhnicheskii institut”. Istoriya nauki i tekhniki* [Bulletin of the National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute”. History of Science and Technology], 2008, iss. 8, pp. 89–97 (in Russian).
7. Gavrilov V. S., Denisova N. A. *Metod kharakteristik dlya odnomernogo volnovogo uravneniya* [Method of Characteristics for One-Dimensional Wave Equation]. Nizhny



- Novgorod, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2014. 72 p. (in Russian).
8. Markushevich A. I. *Elementy teorii analiticheskikh funktsiy* [Elements of the Theory of Analytic Functions]. Moscow, Uchpedgiz, 1944. 545 p. (in Russian).
  9. Bronstein M. *Symbolic Integration I. Transcendental Functions*. Second Edition. Springer, 2005. 325 p.
  10. Pavlov D. I. Symbolic integration. *Komp'yuternyye instrumenty v obrazovanii* [Computer Tools in Education], 2010, iss. 2, pp. 38–43 (in Russian). EDN: [MQIBUR](#)
  11. Liouville J. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1835, vol. 13, iss. 2, pp. 93–118 (in German). <https://doi.org/10.1515/crll.1835.13.93>
  12. Il'in V. A., Poznyak È. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis]. Pt. 1. Moscow, Fizmatlit, 2005. 648 p. (in Russian).
  13. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
  14. Khromov A. P., Burlutskaya M. S. Classical solution by the Fourier method of mixed problems with minimum requirements on the initial data. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 171–198 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-171-198>
  15. Kantorovich L. V., Krylov V. I. *Priblizhonnnye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 696 p. (in Russian).
  16. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Vol. 1. Moscow, Fizmatlit, 2002. 632 p. (in Russian).
  17. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Handbook of Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).
  18. Budak B. M., Samarskiy A. A., Tikhonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike* [Collection of Problems in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972. 688 p. (in Russian).
  19. Lasy P. G., Meleshko I. N. Approximate solution of one problem on electrical oscillations in wires with the use of polylogarithms. *ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2017, vol. 60, iss. 4, pp. 334–340 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340>
  20. Lasy P. G., Meleshko I. N. Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *ENERGETIKA. Proceedings of CIS higher education institutions and power engineering associations*, 2019, vol. 62, iss. 5, pp. 413–421 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421>
  21. Kadyrova V. D., Nasyrov F. S., Suchkova D. A. A probability representation of solutions of wave equations, and the function of Greene. *Vestnik USATU*, 2017, vol. 21, iss. 4 (78), pp. 129–135 (in Russian). EDN: [ZWSQOT](#)
  22. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 798 p. (in Russian).
  23. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1981. 512 p. (in Russian).
  24. Zwibach B. *Nachal'nyy kurs teorii strun* [An Introductory Course in String Theory]. Moscow, Editorial URSS, 2011. 784 p. (in Russian).
  25. Il'in V. A., Poznyak È. G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Fundamentals of Mathematical Analysis]. Pt. 2. Moscow, Fizmatlit, 2002. 464 p. (in Russian).
  26. Butuzov V. F. *Chisl'ovyye ryady. Funktsional'nye posledovatel'nosti i ryady* [Number





- Series. Functional Sequences and Series]. Moscow, Faculty of Physics, Moscow State University, 2015. 40 p. (in Russian).
27. Nikišhin E. M. Rearrangements of function series. *Sbornik: Mathematics*, 1971, vol. 14, iss. 2, pp. 267–280. <http://dx.doi.org/10.1070/SM1971v014n02ABEH002617>
  28. Fikhtengolts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Nauka, 1966. 656 p. (in Russian).
  29. Jolley L. B. W. *Summation of Series*. New York, Dover Publications, inc, 1961. 278 p.
  30. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series and Products]. Moscow, Nauka, 1963. 1110 p. (in Russian).
  31. Grinberg G. A. *Izbrannyye voprosy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy* [Selected Questions of the Theory of Electrical and Magnetic Phenomena]. Moscow, AN USSR Publ., 1948. 730 p. (in Russian).
  32. Bogolyubov A. N., Levashova N. T., Mogilevsky I. E., Mukhartova Yu. V., Shapkina N. E. *Funktsiia Grina operatora Laplasya* [Green's Function of the Laplace Operator]. Moscow, Faculty of Physics, Moscow State University, 2018. 188 p. (in Russian).
  33. Malaschonok G. I. MathPartner computer algebra. *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 43, iss. 2, pp. 112–118. <https://doi.org/10.1134/S0361768817020086>
  34. Vasiliev S. A., Edneral V. F., Malykh M. D., Sevastyanov L. A. *Matematicheskii analiz. Riady s MS Mathematics* [Mathematical Analysis. Series with MS Mathematics]. Moscow, RUDN University Publ., 2016. 119 p. (in Russian).
  35. Tikhomirov V. M. Abel and his great theorem. *Kvant*, 2003, iss. 1, pp. 11–15 (in Russian).
  36. Lobachevsky N. I. *Polnoe sobranie sochinenii* [Complete Works]. Vol. 5. Moscow, Leningrad, GITTL, 1951. 500 p. (in Russian).
  37. Pak I. N. On the sums of trigonometric series. *Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, iss. 2, pp. 105–168. <http://dx.doi.org/10.1070/RM1980v035n02ABEH001631>
  38. Telyakovskii S. A. On the properties of blocks of terms of the series  $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ . *Ukrainian Mathematical Journal*, 2012, vol. 64, iss. 5, pp. 816–822. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0680-7>
  39. Knut D., Graham R., Patashnik O. *Konkretnaia matematika. Matematicheskie osnovy informatiki* [Concrete Mathematics. Mathematical Foundations of Informatics], Moscow, Mir, 1998. 703 p. (in Russian).
  40. Kolokolov V. V., Lebedev I. V. *Izbrannyye glavy matematicheskoi fiziki* [Selected Chapters of Mathematical Physics]. Moscow, ITF im. Landau Publ., 2018. 53 p. (in Russian).
  41. Zorich V. A. *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis]. Pt. 2. Moscow, MTsNMO, 2019. 676 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 17.06.2022

Принята к публикации / Accepted 05.08.2022

Опубликована / Published 30.11.2022