Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 447–457
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 447–457
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ

Научная статья
УДК 517.5

# Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье

**Б. В. Симонов[1], И. Э. Симонова[1✉], В. А. Иванюк[2]**

[1]Волгоградский государственный технический университет, Россия, 400005, г. Волгоград, пр. В. И. Ленина, д. 28

[2]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Россия, 125993, г. Москва, пр. Ленинградский, д. 49

**Симонов Борис Витальевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, simonov-b2002@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-8956, AuthorID: 8629

**Симонова Ирина Эдуардовна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, dvr@vstu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4001-7478, AuthorID: 619095

**Иванюк Вера Алексеевна**, кандидат экономических наук, доцент департамента анализа данных и машинного обучения, ivaver6@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6402-3832, AuthorID: 329957

**Аннотация.** Хорошо известна проблема оценивания модулей гладкости функций из $L_q$ в терминах модулей гладкости из $L_p$. Начальным этапом оценивания модулей гладкости стало изучение свойств функций из классов Липшица и получение соответствующих вложений в работах Титчмарша, Харди, Литтлвуда, Никольского. П. Л. Ульянов для модулей непрерывности функций одной переменной доказал неравенство, позже названное его именем — «неравенство Ульянова». Из этого неравенства, как следствие, получается классическое вложение Харди – Литтлвуда для пространств Липшица. Неравенство Ульянова точно в шкале классов $H_p^\omega$. В. И. Коляда показал, что это неравенство может быть усилено. Его усилением является неравенство Коляды. Оно находит применение при исследовании некоторых максимальных функций, измеряющих локальную гладкость. Неравенство Коляды точно в том смысле, что существует функция с любым заданным порядком модуля непрерывности в $L_q$, для которой эту оценку ни при одном значении $\delta$ улучшить нельзя. Неравенство Коляды было распространено на модули гладкости высших (натуральных) порядков Ю. В. Нетрусовым и М. Л. Гольдманом. У. Требельз распространил неравенство Коляды на модули гладкости положительного порядка. В настоящей статье изучаются частные модули гладкости функций двух переменных. Получены неравенства, распространяющие неравенство Коляды на частные модули гладкости в смешанной норме для функций с лакунарными коэффициентами Фурье. Построены функции, для которых неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье имеют разные порядки, как функции $\delta$. Тем самым показано, что полученные оценки точны в определенном смысле. В статье также доказаны некоторые специфические свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой.

**Ключевые слова:** частный модуль гладкости, лакунарные коэффициенты Фурье, смешанная норма, неравенство Ульянова, неравенство Коляды

**Для цитирования:** *Симонов Б. В., Симонова И. Э., Иванюк В. А.* Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 447–457. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ


Article

# Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients

**B. V. Simonov**[1], **I. E. Simonova**[1✉], **V. A. Ivanyuk**[2]

[1]Volgograd State Technical University, 28 Lenin Ave., Volgograd 400005, Russia
[2]Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prospekt, Moscow 125993, Russia

**Boris V. Simonov**, simonov-b2002@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0003-1922-8956, AuthorID: 8629
**Irina E. Simonova**, dvr@vstu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4001-7478, AuthorID: 619095
**Vera A. Ivanyuk**, ivaver6@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6402-3832, AuthorID: 329957

**Abstract.** The problem of estimating the moduli of smoothness of functions from $L_q$ in terms of moduli of smoothness from $L_p$ is well known. The initial stage in estimating the moduli of smoothness was the study of properties of functions from Lipschitz classes and obtaining the corresponding embeddings in the works of Titchmarsh, Hardy, Littlewood, and Nikolsky. P. L. Ulyanov for the moduli of continuity of functions of one variable proved an inequality later named after him — "Ulyanov's inequality". From this inequality, as a corollary, we obtain the classical Hardy – Littlewood embedding for Lipschitz spaces. Ulyanov's inequality is exact in the class scale $H_p^\omega$. Kolyada showed that this inequality could be strengthened. Its strengthening is Kolyada inequality. It finds application in the study of certain maximal functions which measure local smoothness. Kolyada inequality is exact in the sense that there exists a function with any given order of the modulus of continuity in $L_p$ for which this estimate cannot be improved for any value of $\delta$. Kolyada inequality was extended to the moduli of smoothness of higher orders (natural) by Yu. V. Netrusov and M. L. Goldman. W. Trebels extended Kolyada inequality to moduli of smoothness of positive order. In this article, we study the partial moduli of the smoothness of functions of two variables. Inequalities are obtained that extend Kolyada inequality to partial moduli of smoothness in the mixed norm for functions with lacunar Fourier coefficients. Functions are constructed for which Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients has different orders as functions of $\delta$. Thus, it is shown that the obtained estimates are sharp in a certain sense. Some special properties of partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier series in each variable are also proved.
**Keywords:** partial modulus of smoothness, lacunary Fourier coefficients, mixed norm, Ulyanov's inequality, Kolyada inequality
**For citation:** Simonov B. V., Simonova I. E., Ivanyuk V. A. Kolyada inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 447–457 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-447-457, EDN: XVDVNQ

## Введение

Общие соотношения между модулями непрерывности в разных метриках были получены в работах П. Л. Ульянова [1, 2]:

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \delta\in(0,1), \quad 1<p<q<\infty.$$

Обобщения этого неравенства называются *неравенствами типа Ульянова*.

Неравенство Ульянова было усилено В. И. Колядой [3]:

$$\delta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\int\limits_\delta^1 \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}\omega_1(f,t)_q\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int\limits_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\omega_1(f,t)_p\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$
$$\delta\in(0,1), \quad 1<p<q<\infty.$$

Данное неравенство Коляды было распространено на модули гладкости более высоких порядков в работах [4–6]. В настоящей работе получено аналогичное неравенство для частных модулей гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой. Частные модули гладкости и их свойства изучались ранее в ряде работ (см., например, [7, гл. X, XI]).

Обозначим через

– $L_{p_1p_2}$, $1<p_i<\infty$, $i=1,2$ — множество измеримых функций двух переменных $f(x_1,x_2)$, $2\pi$ — периодических по каждой переменной, для которых
$$\|f\|_{p_1p_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x_1,x_2)|^{p_1}dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dx_2\right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty;$$
– $L^{(0)}_{p_1p_2}$ — множество функций $f\in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех $x_1$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех $x_2$;
– $S_{m_1,\infty}(f)$, $S_{\infty,m_2}(f)$, $S_{m_1,m_2}(f)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т. е. $S_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2)D_{m_1}(t_1)dt_1$, $S_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2)D_{m_2}(t_2)dt_2$, $S_{m_1,m_2}(f) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)D_{m_1}(t_1)D_{m_2}(t_2)\,dt_1\,dt_2$ $(m_i=0,1,2,\ldots,\ i=1,2)$, где $D_m(t) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$ $(m=0,1,2\ldots)$ — ядро Дирихле;
– $f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)$ порядка $\rho_1(\rho_1\geqslant 0)$ по переменной $x_1$ и порядка $\rho_2(\rho_2\geqslant 0)$ по переменной $x_2$ [8, с. 238];
– $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f\in L_{p_1p_2}$ по переменной $x_1$, т. е. $E_{m_1\infty}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{m_1\infty}}\|f-T_{m_1\infty}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{m_1\infty}(x_1,x_2)\in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем $m_1$, по переменной $x_1$;

– $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2}$ — частное наилучшее приближение функции $f \in L_{p_1p_2}$ по переменной $x_2$,, т. е. $E_{\infty m_2}(f)_{p_1p_2} = \inf\limits_{T_{\infty m_2}} \|f - T_{\infty m_2}\|_{p_1p_2}$, где функции $T_{\infty m_2}(x_1, x_2) \in L_{p_1p_2}$ и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше, чем $m_2$, по переменной $x_2$.

Для функции $f \in L_{p_1p_2}$ определим разности с шагом $h_1$ и $h_2$ положительных порядков $\alpha_1$ и $\alpha_2$ соответственно, по переменным $x_1$ и $x_2$, следующим образом:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2),$$

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$.

Далее, обозначим через

– $\omega_{\alpha_1,0}(f, \delta_1)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка $\alpha_1$ по переменной $x_1$, т. е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f, \delta_1)_{p_1p_2} = \sup_{|h_1| \leqslant \delta_1} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)\|_{p_1p_2};$$

– $\omega_{0,\alpha_2}(f, \delta_2)_{p_1p_2}$ — частный модуль гладкости положительного порядка $\alpha_2$ по переменной $x_2$, т. е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f, \delta_2)_{p_1p_2} = \sup_{|h_2| \leqslant \delta_2} \|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная $C$, не зависящая от $f, \delta_1$ и $\delta_2$, и такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leqslant CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \ll G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \ll F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \asymp \asymp G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Скажем, что $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$, если $f \in L_{p_1p_2}^{(0)}$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{\mu_2=0}^{\infty} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2} \varphi_1(2^{\mu_1}x_1)\varphi_2(2^{\mu_2}x_2),$$

где $\varphi_i(t) = \cos t$ или $\varphi_i(t) = \sin t$, $i = 1, 2$.

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. *Тогда*

*I. При* $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left( \int_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f, t_1)_{q_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left( \int_{0}^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f, t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}. \tag{1}$$

*II. При* $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta_2} \left( \int_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)} \omega_{0,\alpha_2}^{p_2}(f, t_2)_{p_1q_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left( \int_{0}^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2} \omega_{0,\alpha_2}^{q_2}(f, t_2)_{p_1p_2} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}. \tag{2}$$

*Причем в соотношениях* (1) *и* (2) *знак* $\ll$ *нельзя заменить на* $\asymp$.

Неравенство (2) является двойственным по отношению к первому. В дальнейшем формулы для двойственных результатов не приводятся ни в леммах, ни в заключении.

## 1. Вспомогательные утверждения

**Лемма 1.** *Пусть* $f \in L^{(0)}_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. *Тогда:*
*1)* $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f, \frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2}$;
*2)* $\omega_{0,\alpha_2}\Big(f, \frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}$.

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 9.2.1 из [7, с. 215]. □

**Лемма 2** ( [10]). *Пусть* $a_k \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $0 < p < \infty$. *Тогда:*
*1) если* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \ll a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\Big)^p \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k^p$;
*2) если* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ll a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n\Big)^p \asymp \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k^p$.

**Лемма 3** ([9, с. 43]). *Пусть* $a_k \geqslant 0$, $0 < \alpha < \beta < \infty$. *Тогда*

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta}\Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

**Лемма 4** ([10]). *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\|f\|_{p_1p_2} \asymp \Big(\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем следующие обозначения:

$$C_1(f,\delta_1) = \Big(\int_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1}\omega^{q_1}_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{q_1}}, \quad C_2(f,\delta_2) = \Big(\int_0^{\delta_2} t_2^{-q_2\theta_2}\omega^{q_2}_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{q_2}},$$

$$D_1(f,\delta_1) = \delta_1^{\alpha_1-\theta_1}\Big(\int_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)}\omega^{p_1}_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{q_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

$$D_2(f,\delta_2) = \delta_2^{\alpha_2-\theta_2}\Big(\int_{\delta_2}^{1} t_2^{-p_2(\alpha_2-\theta_2)}\omega^{p_2}_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1q_2}\frac{dt_2}{t_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}}.$$

**Лемма 5.** *Пусть* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$, $\alpha_1 > \theta_1$, $n_1 = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда:*
*1)* $C_1(f, 2^{-n_1}) \asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=0}^{n_1} a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum\limits_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \equiv$
$\equiv c_{11} + c_{12}$;
*2)* $D_1(f, 2^{-n_1}) \asymp 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}} + \Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{1}{2}} \equiv$
$\equiv d_{11} + d_{12}$.

*В случае, когда* $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, $\alpha_2 > \theta_2$, $n_2 = 0, 1, 2, \ldots$, *верны оценки для* $C_2(f, 2^{-n_2})$ *и* $D_2(f, 2^{-n_2})$, *двойственные к оценкам* $C_1(f, 2^{-n_1})$ *и* $D_1(f, 2^{-n_1})$.

**Доказательство.** Докажем утверждение 1). Представляя интеграл в формуле для $C_1(f,2^{-n_1})$ через сумму и используя конструктивную характеристику частного модуля гладкости (лемма 1), получаем

$$C_1(f,2^{-n_1})\asymp\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}2^{-\nu_1\alpha_1q_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\nu_1},\infty}(f)\big\|^{q_1}_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{q_1}}+$$
$$+\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}\big\|f-S_{2^{\nu_1},\infty}(f)\big\|^{q_1}_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Применяя лемму 4, имеем

$$C_1(f,2^{-n_1})\asymp\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}2^{-\nu_1\alpha_1q_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{\nu_1}a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}+$$
$$+\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=\nu_1}^{\infty}a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Применяя оценку из леммы 2, получим

$$C_1(f,2^{-n_1})\asymp\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}2^{-\nu_1\alpha_1q_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1}a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}+$$
$$+\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}2^{-\nu_1\alpha_1q_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1}^{\nu_1}a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}+$$
$$+\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=\nu_1}^{\infty}a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}\asymp$$
$$\asymp 2^{n_1(\theta_1-\alpha_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=0}^{n_1}a^2_{\mu_1,\mu_2}2^{2\mu_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}2^{\nu_1q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Доказательство утверждения 2) проводится аналогично. □

Лемма 6 использоваться при доказательстве теоремы не будет, но в ней приведены специфические свойства частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье в пространствах Лебега со смешанной нормой, представляющие отдельный интерес.

**Лемма 6.** *Пусть* $f\in\Lambda_{p_1p_2}$, $1<p_i<\infty$, $\beta_i>\alpha_i>0$, $n_i=0,1,2\ldots$, $\delta_i\in(0,\frac{1}{2})$, $i=1,2$. *Тогда:*

*1)* $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\Big(\sum\limits_{k_1=0}^{n_1}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}a^2_{k_1k_2}2^{2k_1\alpha_1}\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum\limits_{k_1=n_1+1}^{\infty}\sum\limits_{k_2=0}^{\infty}a^2_{k_1k_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

*2)* $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\frac{1}{2^{\alpha_1n_1}}\Big(\sum\limits_{\mu_1=0}^{n_1}2^{2\alpha_1\mu_1}E^2_{2^{\mu_1}-1\infty}(f)_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

*3)* $\omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{n_1}}\Big)_{p_1p_2}\asymp\Big(\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}2^{-2\alpha_1\mu_1}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\|^2_{p_1p_2}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

*4)* $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}\Big(\int\limits_{\delta_1}^{1}\big[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\big]^2\frac{dt_1}{t_1}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

*Верны и неравенства для* $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$, *являющиеся двойственными по отношению к* $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$.

**Доказательство.** Сначала докажем утверждение 1). Применяя лемму 1, имеем

$$I = \omega_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2} + \|f - S_{2^{n_1}\infty}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Применяя лемму 4, получаем требуемую оценку

$$I \asymp \frac{1}{2^{n_1\alpha_1}}\left(\sum_{\mu_1=0}^{n_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1\mu_2}2^{2\nu_1\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство утверждения 2) проводится аналогично.

Докажем утверждение 3). Применяя лемму 4 и 1) из леммы 6, имеем

$$A^2 \equiv \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\left\|S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\mu_1}\infty}(f)\right\|^2_{p_1p_2} \asymp \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\sum_{\nu_1=1}^{\mu_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2\alpha_1n_1}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} + \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{-2\alpha_1\mu_1}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\mu_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2\alpha_1n_1}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{2\alpha_1\nu_1}a^2_{\nu_1\nu_2} + \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1\nu_2} \asymp \omega^2_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{n_1}}\right)_{p_1p_2},$$

что и доказывает 3).

Докажем утверждение 4). Для данного числа $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ найдется целое неотрицательное число $m_1$ такое, что $\frac{1}{2^{m_1+1}} \leqslant \delta_1 < \frac{1}{2^{m_1}}$. Применяя свойства частного модуля гладкости, имеем

$$B^2 = \delta_1^{2\alpha_1}\int\limits_{\delta_1}^{1}\left[t_1^{-\alpha_1}\omega_{\beta_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\right]^2\frac{dt_1}{t_1} \asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\mu_1=0}^{m_1} 2^{2\mu_1\alpha_1}\omega^2_{\beta_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{\mu_1}}\right)_{p_1p_2}.$$

Применяя формулу 2) из леммы 6, получаем

$$B^2 \asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\mu_1=0}^{m_1} 2^{2\mu_1\alpha_1}2^{-2\mu_1\beta_1}\sum_{\nu_1=0}^{\mu_1} 2^{2\nu_1\beta_1}E^2_{2^{\nu_1-1}\infty}(f)_{p_1p_2} \asymp$$

$$\asymp 2^{-2m_1\alpha_1}\sum_{\nu_1=0}^{m_1} 2^{2\nu_1\alpha_1}E^2_{2^{\nu_1-1}\infty}(f)_{p_1p_2} \asymp \omega^2_{\alpha_1,0}\left(f, \frac{1}{2^{m_1}}\right)_{p_1p_2}.$$

Используя свойства частного модуля гладкости, получаем $B \asymp \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$. Тем самым 4) доказано. □

## 2. Доказательство теоремы

Докажем сначала I. Для каждого $\delta_1 \in (0,1)$ существует натуральное число $n_1$ такое, что $2^{-n_1} \leqslant \delta_1 < 2^{-n_1+1}$. Поэтому

$$A_1 = D_1(f,\delta_1) \ll D_1(f, 2^{-n_1}), \quad B_1 = C_1(f,\delta_1) \gg C_1(f, 2^{-n_1}).$$

Применяя оценки из леммы 5, получим, что $A_1 \ll d_{11} + d_{12}$, $B_1 \gg c_{11} + c_{12}$. Покажем, что $d_{1i} \ll c_{1i}$, $i = 1, 2$.

1. Рассмотрим

$$d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 p_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.$$

1.1. Пусть $p_1 \geqslant 2$. Тогда в соответствии с леммой 3, с учетом того, что $1=\alpha\leqslant\beta=\frac{p_1}{2}$, имеем

$$d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\Big(2^{\nu_1 2(\alpha_1-\theta_1)}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\Big)^{\frac{2}{p_1}}\Big)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2(\alpha_1-\theta_1)}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac12} \leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2\alpha_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac12} = c_{11}.$$

Итак, $d_{11} \ll c_{11}$ при $p_1 \geqslant 2$.

1.2. Пусть $1<p_1<2$. Оценим $d_{11} = 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\Big(\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}\cdot 2^{-\nu_1 p_1\theta_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}$.

Пусть $A_{\nu_1} = 2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{p_1}{2}}$, $B_{\nu_1} = 2^{-\nu_1 p_1\theta_1}$, $p=\frac{p_1}{2}$, $\frac1p+\frac1q=1$. Применяя неравенство Гельдера к сумме $\sum\limits_{\nu_1=0}^{n_1} A_{\nu_1}B_{\nu_1}$, получим

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1} A_{\nu_1}B_{\nu_1} \leqslant \Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} A^p_{\nu_1}\Big)^{\frac1p}\Big(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} B^q_{\nu_1}\Big)^{\frac1q}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{11} \leqslant 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\left\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\left(2^{\nu_1 p_1\alpha_1}\left(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\right)^{\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{2}{p_1}}\right\}^{\frac{p_1}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\left(2^{-\nu_1 p_1\theta_1}\right)^{\frac{\frac{2}{p_1}}{\frac{2}{p_1}-1}}\right\}^{1-\frac{p_1}{2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \ll 2^{-n_1(\alpha_1-\theta_1)}\left(\sum_{\nu_1=0}^{n_1} 2^{\nu_1 2\alpha_1}\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2}\right)^{\frac12} = c_{11}.$$

Итак, $d_{11} \ll c_{11}$ при $1<p_1<2$. Тем самым $d_{11}\ll c_{11}$ при $1<p_1<\infty$.

2. Рассмотрим $d_{12} = \Big(\sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty}\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac12}$.

2.1. Пусть $1<q_1\leqslant 2$. Тогда, применяя лемму 3, с учетом того, что $\frac{2}{q_1}=\alpha\leqslant\beta=1$, имеем

$$d_{12} = \Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty}\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac12} \leqslant \Big(\sum_{\mu_1=n_1}^{\infty}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{\mu_1=n_1}^{\infty} 2^{\mu_1 q_1\theta_1}\Big(\sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}\Big)^{\frac{q_1}{2}}\Big)^{\frac{1}{q_1}} = c_{12},$$

т. е. $d_{12}\ll c_{12}$ при $1<q_1\leqslant 2$.

2.2. Пусть $q_1 > 2$. Оценим $d_{12} = \Big( \sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} 2^{2\mu_1\theta_1} \sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2} \cdot 2^{-2\mu_1\theta_1} \Big)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть $A_{\mu_1} = 2^{2\mu_1\theta_1} \sum\limits_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2}$, $B_{\mu_1} = 2^{-2\mu_1\theta_1}$, $p = \frac{q_1}{2}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Применяя неравенство Гельдера к сумме $\sum\limits_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A_{\mu_1} B_{\mu_1}$, получим

$$\sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A_{\mu_1} B_{\mu_1} \leqslant \Big( \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} A^p_{\mu_1} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big( \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} B^q_{\mu_1} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{12} \leqslant \Big( \Big\{ \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} \Big\{ 2^{2\mu_1\theta_1} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\mu_1,\mu_2} \Big\}^{\frac{q_1}{2}} \Big\}^{\frac{2}{q_1}} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \Big\{ \sum_{\mu_1=n_1+1}^{\infty} \Big\{ 2^{-2\mu_1\theta_1} \Big\}^{\frac{\frac{q_1}{2}}{\frac{q_1}{2}-1}} \Big\}^{1-\frac{2}{q_1}} \Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$
$$\ll \Big( \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} 2^{\nu_1 q_1 \theta_1} \Big( \sum_{\mu_2=0}^{\infty} a^2_{\nu_1,\mu_2} \Big)^{\frac{q_1}{2}} \Big)^{\frac{1}{q_1}} = c_{12}.$$

Тем самым $d_{12} \ll c_{12}$ при $q_1 > 2$. Следовательно, $d_{12} \ll c_{12}$ при $1 < q_1 < \infty$.

Неравенство (1) доказано.

Покажем, что в соотношении (1) знак $\ll$ нельзя заменить на знак $\asymp$. Для этого построим функцию $f_1(x_1, x_2) \in \Lambda_{p_1p_2}$ такую, что левые и правые части неравенства (1) имеют разные порядки, как функции $\delta_1$. Возьмем функцию

$$f_1(x_1, x_2) \sim \sum_{m_1=0}^{\infty} a_{m_1} \cos 2^{m_1} x_1 \sin x_2,$$

где $a_{m_1} = \frac{(m_1+1)^{\beta_1}}{2^{\alpha_1 m_1}}$, $\beta_1 > -\frac{1}{2}$, $\alpha_1 > \theta_1$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_1 < q_1 < \infty$.

Применяя леммы 4 и 5, получим, что

$$f_1 \in L_{p_1p_2}, \quad \omega_{\alpha_1,0}(f_1, 2^{-n_1})_{p_1p_2} \asymp \frac{(n_1+1)^{\beta_1+\frac{1}{2}}}{2^{\alpha_1 n_1}} \asymp \omega_{\alpha_1,0}(f_1, 2^{-n_1})_{q_1p_2}.$$

Но тогда для $\delta_1 \in (0, 1)$

$$\omega_{\alpha_1,0}(f_1, \delta_1)_{p_1p_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1} \left( \ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\beta_1+\frac{1}{2}} \asymp \omega_{\alpha_1,0}(f_1, \delta_1)_{q_1p_2}.$$

Теперь легко проверить, что

$$D_1(f_1, \delta_1) \asymp \delta_1^{\alpha_1-\theta_1}, \quad C_1(f_1, \delta_1) \asymp \delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left( \ln \frac{2}{\delta_1} \right)^{\beta_1+\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, левые и правые части неравенства (1) для функции $f_1(x_1, x_2)$ имеют разные порядки, как функции $\delta_1$.

Доказательство II проводится аналогично доказательству I.

Теорема доказана.

## Заключение

В работе рассмотрены функции двух переменных с лакунарными коэффициентами Фурье. Для таких функций получены оценки, распространяющие неравенство Коляды для частных модулей на двумерный случай в пространствах со смешанной нормой.

Кроме того, из оценок, приведенных в теореме, вытекают неравенства типа неравенства Ульянова. А именно пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$ выполняется неравенство

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2} \ll \left( \int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, верны оценки для $\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1q_2}$, двойственные к оценкам для $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2}$.

При дополнительных ограничениях на параметры из теоремы следуют неравенства, уточняющие неравенства типа Ульянова. А именно пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $1 < p_1 \leqslant 2$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$ выполняется неравенство

$$\omega_{\alpha_1-\theta_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2} \ll \left( \int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1\theta_1} \omega_{\alpha_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty, \theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}, 1 < p_1 < \infty$, верны оценки для $\omega_{0,\alpha_2-\theta_2}(f,\delta_2)_{p_1q_2}$, двойственные к оценкам $\omega_{\alpha_1-\theta_1,0}(f,\delta_1)_{q_1p_2}$.

Из теоремы можно получить следующие оценки для частных модулей гладкости производной функции через частные модули гладкости самой функции.

Пусть $f \in \Lambda_{p_1p_2}$, $\alpha_i > \theta_i$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда при $1 < p_1 < q_1 < \infty$, $\theta_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $1 < p_2 < \infty$, $\rho_1 > 0$

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta_1} \left( \int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p_1(\alpha_1-\theta_1)} \omega_{\alpha_1,0}^{p_1}(f^{(\rho_1,0)},t_1)_{q_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \ll \left( \int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q_1(\rho_1+\theta_1)} \omega_{\alpha_1+\rho_1,0}^{q_1}(f,t_1)_{p_1p_2} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

В случае, когда $1 < p_2 < q_2 < \infty$, $\theta_2 = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $1 < p_1 < \infty$, $\rho_2 > 0$, верны интегральные оценки для $\omega_{0,\alpha_2}\left(f^{(0,\rho_2)},t_2\right)_{p_1q_2}$, двойственные к интегральным оценкам для $\omega_{\alpha_1,0}\left(f^{(\rho_1,0)},t_1\right)_{q_1p_2}$.

### Список литературы


1. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций $H_p^{\omega}$ // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32, вып. 3. С. 649–686.
2. *Ульянов П. Л.* Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Математический сборник. 1970. Т. 81 (123), вып. 1. С. 104–131.
3. *Коляда В. И.* О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды Математического института Академии наук СССР. 1988. Т. 181. С. 117–136.
4. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств $H_p^{\omega,k}$ и $H_p^{s,\omega,k}$ // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1987. Т. 159. С. 83–102.
5. *Гольдман М. Л.* Критерий вложений разных метрик для изотропных пространств Бесова с произвольными модулями непрерывности // Труды Математического института РАН. 1992. Т. 201. С. 186–218.

6. *Trebels W.* Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces // Archiv der Mathematik. 2010. Vol. 94. P. 155–164. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0078-4
7. *Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю.* Дробные модули гладкости. Москва : МАКС-Пресс, 2016. 337 с.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва : Наука, 1975. 480 с.
9. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1948. 456 с.
10. *Потапов М. К., Симонов Б. В.* Свойства смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2014. Вып. 1. С. 6–17.


## References


1. Ul'janov P. L. The imbedding of certain classes $H_p^\omega$. *Izvestiya: Mathematics*, 1968, vol. 2, iss. 3, pp. 601–637. https://doi.org/10.1070/IM1968v002n03ABEH000650
2. Ul'yanov P. L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, iss. 1, pp. 103–126. https://doi.org/10.1070/SM1970v010n01ABEH001589
3. Kolyada V. I. On relations between the moduli of continuity in various metrics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1989, vol. 181, pp. 127–148.
4. Netrusov Yu. V. Imbedding theorems for the spaces $H_p^{\omega,k}$ and $H_p^{s,\omega,k}$. *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, 1987, vol. 159, pp. 83–102 (in Russian).
5. Gol'dman M. L. A criterion of imbedding for different metrics for isotropic Besov spaces with general moduli of continuity. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1994, vol. 201, iss. 2, pp. 155–181.
6. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces. *Archiv der Mathematik*, 2010, vol. 94, pp. 155–164. https://doi.org/10.1007/s00013-009-0078-4
7. Potapov M. K., Simonov B. V., Tikhonov S. Yu. *Drobnye moduli gladkosti* [Fractional Moduli of Smoothness]. Moscow, MAKS-Press, 2016. 337 p. (in Russian).
8. Besov O. V., Ilin V. P., Nikol'skii S. M. *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*. New York, Toronto, London, Halsted Press, 1978. 345 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1975. 480 p.).
9. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. London, Cambridge University Press, 1934. 336 p. (Russ. ed.: Moscow, IL, 1948. 456 p.).
10. Potapov M. K., Simonov B. V. Properties of mixed moduli of smoothness of functions with lacunary Fourier coefficients. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2014, vol. 69, pp. 5–15. https://doi.org/https://doi.org/10.3103/S0027132214010021


Поступила в редакцию / Received 28.03.2022
Принята к публикации / Accepted 12.05.2022
Опубликована / Published 30.11.2022