Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 458–467
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 458–467
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

Научная статья
УДК 519.713.2

О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов

Р. А. Фарахутдинов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Фарахутдинов Ренат Абуханович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, renatfara@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2877-8557, AuthorID: 1078801

Аннотация. Теория автоматов является одним из разделов математической кибернетики, в котором изучаются устройства преобразования информации, используемые во многих прикладных задачах. В данной работе мы изучаем автоматы без выходных сигналов и называем их полуавтоматами. В зависимости от исследуемых задач рассматриваются полуавтоматы, у которых множества состояний наделены дополнительной математической структурой, согласованной с функцией переходов полуавтомата. Мы исследуем полуавтоматы над графами (так называемые графовые полуавтоматы), множество состояний которых наделено математической структурой графа. Универсальный графовый полуавтомат $\mathrm{Atm(G)}$ — это универсально притягивающий объект в категории полуавтоматов, у которых множество состояний наделено структурой графа G, сохраняющейся функцией переходов полуавтомата. Полугруппа входных сигналов такого полуавтомата имеет вид $S(G) = \mathrm{End\ G}$. Она может рассматриваться как производная алгебраическая система математического объекта $\mathrm{Atm(G)}$, которая содержит полезную информацию об исходном объекте. Свойства такой полугруппы взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры полуавтомата, это означает, что универсальные графовые полуавтоматы можно изучать путем исследования их полугрупп входных сигналов. Для таких полугрупп представляет интерес проблема конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов: при каких условиях на множестве состояний X полуавтомата $A = (X, S, \delta)$ возможно задать бинарное отношение ρ, такое, что для графа $G = (X, \rho)$ будет выполняться равенство $A = \mathrm{Atm(G)}$. В данной работе эта проблема решается для графовых полуавтоматов над рефлексивными квазибесконтурными графами.

Ключевые слова: полуавтомат, полугруппа эндоморфизмов, конкретная характеризация, граф

Для цитирования: *Фарахутдинов Р. А.* О конкретной характеризации универсальных графовых полуавтоматов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 4. С. 458–467. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

Article

On a concrete characterization problem of universal graphic semiautomata

R. A. Farakhutdinov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Renat A. Farakhutdinov, renatfara@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-2877-8557, AuthorID: 1078801

Abstract. Automata theory is one of the branches of mathematical cybernetics, that studies information transducers that arise in many applied problems. The major objective of automata theory is to develop methods by which one can describe and analyze the dynamic behavior of discrete systems. In this paper, we consider automata without output signals (called semiautomata). Depending on study tasks, semiautomata are considered, for which the set of states is equipped with additional mathematical structure preserved by the transition function of semiautomata. We investigate semiautomata over graphs and call them graphic semiautomata. For graphs G a universal graphic semiautomaton $\mathrm{Atm(G)}$ is the universally attracted object in the category of graphic semiautomata, for which the set of states is equipped with the structure of the graph G. The input signal semigroup of the universal graphic semiautomaton is $S(G) = \mathrm{End\ G}$. It may be considered as a derived algebraic system of the mathematical object $\mathrm{Atm(G)}$. It is common knowledge that properties of the semigroup are closely interconnected with properties of the algebraic structure of the semiautomaton. This suggests that universal graphic semiautomata may be researched using their input signal semigroups. In this article, we investigate the concrete characterization problem of graphic semiautomata over quasi-acyclic reflexive graphs. The main result of our study states necessary and sufficient conditions for a semiautomaton to be a universal graphic semiautomaton over quasi-acyclic reflexive graphs.

Keywords: semiautomaton, endomorphism semigroup, concrete characterization, graph

For citation: Farakhutdinov R. A. On a concrete characterization problem of universal graphic semiautomata. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, iss. 4, pp. 458–467 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-458-467, EDN: PKWNTS

Введение

Одним из перспективных направлений современной алгебры является изучение математических объектов с помощью исследования производных алгебраических систем, связанных с этими объектами. В качестве исходных математических объектов рассматриваются различные алгебраические системы, а в качестве производных алгебраических систем — группы автоморфизмов, полугруппы эндоморфизмов, решетки подсистем алгебраических систем и др. Основной вопрос состоит в том, насколько точно производная алгебраическая система определяет исходный математический объект, после чего проводятся конкретная и абстрактная характеризации производной алгебраической системы, что в конечном счете позволяет изучить взаимосвязь свойств исходного математического объекта с производной системой. Такие исследования для групп автоморфизмов алгебраических систем, полугрупп эндоморфизмов графов, колец эндоморфизмов модулей и других производных алгебраических систем успешно провели Б. И. Плоткин [1], А. Г. Пинус [2, 3], Ю. М. Важенин [4, 5], Л. М. Глускин [6, 7], А. В. Михалев [8] и другие алгебраисты. Актуальность проблемы характеризации математических объектов с помощью их эндоморфизмов и автоморфизмов обозначил С. Улам в известной работе [9].

К обобщенной теории Галуа относятся и исследования автоматов в категориях [10], т. е. автоматов, множества состояний и выходных сигналов которых наделены математическими структурами из категории $\mathbf{K}$, а функции переходов и выходов являются морфизмами этой категории. В данной работе рассматриваются автоматы без выходных сигналов в категории графов, которые принято называть полуавтоматами [11], над рефлексивными квазибесконтурными графами, это так называемые графовые полуавтоматы. Для таких полуавтоматов решается следующая проблема конкретной характеризации: при каких условиях полуавтомат A с множеством состояний X и полугруппой входных сигналов S является универсальным графовым полуавтоматом, т. е. на множестве состояний X полуавтомата A можно так задать бинарное отношение ρ, что для графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $A = \mathrm{Atm\ G}$.

Результат данной работы докладывался на международных научных конференциях «Мальцевские чтения 2020» [12] и «Ломоносов-2020» [13].

1. Подготовительный этап

В работе используется общепринятая терминология теории полугрупп из [14], теории графов из [15] и теории автоматов из [10].

Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф. Для графа $G = (X, \rho)$ дугу $(x, y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y, x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если все его собственные дуги не содержатся ни в каком контуре. Примером квазибесконтурных графов являются бесконтурные графы, графы квазипорядка и многие другие. Квазибесконтурный граф будем называть тривиальным, если у него нет собственных дуг, и нетривиальным — в противном случае.

Полуавтомат $A = (X, S, *)$ называется полугрупповым, если на множестве его входных сигналов S определена ассоциативная бинарная операция $\cdot$, согласованная с функцией переходов $*$ по правилу: $x*(s_1 \cdot s_2) = (x*s_1)*s_2$ для любых $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$. Полугрупповой полуавтомат $A = (X, S, *)$ называется графовым, если множество его состояний X наделено такой структурой графа $G = (X, \rho)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x * s$ $(x \in X)$ является эндоморфизмом графа G. Такой полуавтомат символически обозначается через $A = (G, S, *)$.

Графовый полуавтомат $A = (G, \mathrm{End\,G}, *)$, где $x * \varphi = \varphi(x)$ для $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{End\,G}$, является универсальным притягивающим объектом в категории графовых полуавтоматов [10] и называется универсальным графовым полуавтоматом над графом G. Такой полуавтомат обозначается $\mathrm{Atm(G)}$.

Пусть $A = (X, S, *)$ — полуавтомат с множеством состояний X и полугруппой входных сигналов S. Определим на множестве X канонические предикаты $\Pi(x, y, u, v)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ следующим образом:

$$\Pi(x, y, u, v) = (\exists\ s \in S)(x * s = u \wedge y * s = v \wedge (\forall z \in X)(z * s = u \vee z * s = v)),$$
$$Q(x, y) = \Pi(x, y, x, y) \wedge \neg\Pi(x, y, y, x), \quad R(x, y) = (\forall\ u, v \in X,\ u \neq v)\ \Pi(u, v, x, y).$$

Обозначим $Z(x, y) = Q(x, y) \vee R(x, y)$.

Лемма 1. *Пусть $G = (X, \rho)$ — рефлексивный граф и $(x, y) \in \rho$. Тогда отображение f, определенное для элементов $u \in X$ по формуле*

$$f(u) = \begin{cases} y, & \textit{если существует маршрут из } y \textit{ в } u, \\ x, & \textit{в противном случае,} \end{cases}$$

является эндоморфизмом графа $G = (X, \rho)$.

Доказательство. Пусть $(s, t) \in \rho$. Если существует путь из вершины y в вершину s, то ввиду наличия дуги $s \to t$ будет существовать путь из y в t. По определению отображения f это означает, что $f(s) = f(t) = y$. Поскольку ρ — рефлексивное бинарное отношение, то $(y, y) \in \rho$, т. е. $(f(s), f(t)) \in \rho$.

Если не существует пути из y в s, тогда по определению f получаем, что $f(s) = x$ и $f(t) \in \{x, y\}$. Ввиду рефлексивности отношения ρ имеем $(x, x) \in \rho$, а также $(x, y) \in \rho$ по условию, т. е. $(f(s), f(t)) \in \rho$.

Значит, условие $(s, t) \in \rho$ влечет $(f(s), f(t)) \in \rho$, следовательно, $f \in \mathrm{End}\ \mathrm{G}$. □

Лемма 2. *Для любого универсального графового полуавтомата* $\mathrm{Atm(G)} = (\mathrm{G}, \mathrm{End}\ \mathrm{G}, *)$ *над рефлексивным графом $G = (X, \rho)$ канонические предикаты $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) предикат $Q(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда в графе G вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре;

2) если для дуги $(x, y) \in \rho$ предикат $Q(x, y)$ истинен, то для любых $u, v \in X$ предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен тогда и только тогда, когда $(u, v) \in \rho$;

3) если $\rho \neq \Delta_X$, то предикат $R(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$.

Доказательство. Пусть $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ — канонические предикаты универсального графового полуавтомата $\mathrm{Atm(G)} = (\mathrm{G}, \mathrm{End}\ \mathrm{G}, *)$ над рефлексивным графом $G = (X, \rho)$.

Докажем утверждение 1). Предположим, что предикат $Q(x, y)$ истинен, т. е. по определению канонического предиката $Q(x, y)$ справедливы утверждения:

а) для некоторого входного сигнала $f \in \mathrm{End}\ \mathrm{G}$ полуавтомата A выполняется

$$f(X) = \{x, y\}, \quad f(x) = x, \quad f(y) = y;$$

б) не существует такого эндоморфизма g графа G, для которого выполняется

$$g(X) = \{x, y\}, \quad g(x) = y, \quad g(y) = x.$$

Ясно, что $x \neq y$, поскольку в противном случае в силу рефлексивности отношения ρ получили бы противоречие утверждению б). Докажем, что вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре. Ясно, что для вершин x, y должно выполняться одно из трех несовместных условий:

i) либо вершины x и y не смежны;

ii) либо вершины x и y соединяются дугой, лежащей в некотором контуре;

iii) либо вершины x и y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре.

Если бы вершины x, y были не смежны, тогда из утверждения а) следует, что любая вершина из $f^{-1}(x)$ не смежна с любой вершиной из $f^{-1}(y)$, и, следовательно, отображение

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} x, & \text{если } f(z) = y, \\ y, & \text{если } f(z) = x \end{cases} \qquad (1)$$

является эндоморфизмом графа G, что противоречит утверждению б).

Если бы вершины x, y соединялись дугой, лежащей в некотором контуре $x \to y \to \to x_1 \to x_2 \to \ldots x_{k-1} \to x_k = x$, то из утверждения а) следует, что $f(x) = x$, $f(y) = y$ и найдется такой наименьший номер k, для которого $f(x_{k-1}) = y$, $f(x_k) = x$. Тогда из условия $(x_{i-1}, x_i) \in \rho$, $1 \leqslant i \leqslant k$ для эндоморфизма f выполняется $(f(x_{i-1}), f(x_i)) \in \rho$, $(y, x) \in \rho$, и, следовательно, отображение (1) является эндоморфизмом графа G, что противоречит утверждению б).

Следовательно, для вершин x, y в графе G возможен только случай 3), т. е. x и y в графе G соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре.

Обратно, пусть дуга $x \to y$ не лежит ни в каком контуре графа G. Рассмотрим преобразование $f : X \to X$, определяемое для элементов $v \in X$ по правилу

$$f(v) = \begin{cases} y, & \text{если существует маршрут из } y \text{ в } v, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме 1 отображение f — эндоморфизм графа G. При этом утверждение а) выполняется. Осталось заметить, что в этом случае утверждение б) также должно выполняться, поскольку в противном случае для некоторого эндоморфизма g графа G получим $g(x) = y$, $g(y) = x$, $(y, x) \in \rho$, и дуга $x \to y$ лежит в контуре $x \to y \to x$, чего быть не может.

Докажем утверждение 2). Пусть $(x, y) \in \rho$ — произвольная дуга графа $G = (X, \rho)$, и пусть предикаты $Q(x, y)$ и $\Pi(x, y, u, v)$ истинны. Из истинности предиката $\Pi(x, y, u, v)$ следует, что найдется входной сигнал $f \in \mathrm{End}\ \mathrm{G}$ полуавтомата A, для которого выполняется $x * f = u$, $y * f = v$. Поскольку эндоморфизм f графа G сохраняет отношение смежности, то $(u, v) \in \rho$.

Обратно, пусть $(u, v) \in \rho$. Рассмотрим преобразование $f : X \to X$, определяемое для элементов $w \in X$ по правилу

$$f(w) = \begin{cases} v, & \text{если существует маршрут из } y \text{ в } w, \\ u, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По лемме 1 преобразование f является эндоморфизмом графа G, для которого в полуавтомате A предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен.

Докажем утверждение 3). Пусть $\rho \neq \Delta_X$. Очевидно, что для любой пары $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$ все отображения $f : X \to \{x, y\}$ являются эндоморфизмами графа G и, значит, предикат $R(x, y)$ истинен в полуавтомате A.

С другой стороны, если предикат $R(x, y)$ истинен, то для любых различных вершин $u, v \in X$ и некоторого входного сигнала $f \in \mathrm{End}\ \mathrm{G}$ полуавтомата A верно, что $u * f = x$ и $v * f = y$. Так как $\rho \neq \Delta_X$, то найдется дуга $(u, v) \in \rho \setminus \Delta_X$, и, следовательно, по определению канонического предиката $R(x, y)$ для некоторых входных сигналов $f_1, f_2 \in \mathrm{End}\ \mathrm{G}$ полуавтомата A выполняются равенства $u * f_1 = x$, $v * f_1 = y$, $v * f_2 = x$ и $u * f_2 = y$. Тогда по определению эндоморфизма графа $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$, т. е. вершины x и y соединяются встречными дугами в графе G. $\square$

2. Основной результат

Пусть $A = (X, S, *)$ — произвольный полугрупповой полуавтомат. Полугруппу S входных сигналов полуавтомата A будем называть Z-замкнутой, если для любого преобразования f множества X из условия, что для любого истинного предиката $Z(x, y)$ существует такой входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$, следует, что для некоторого $t \in S$ выполняется $x * t = f(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 1. *Пусть $A = (X, S, *)$, $|X| > 1$ — полуавтомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда A в том и только том случае будет универсальным графовым полуавтоматом* $\mathrm{Atm(G)}$ *для некоторого квазибесконтурного рефлексивного графа $G = (X, \rho)$, если полугруппа входных сигналов S является Z-замкнутой полугруппой с каноническими предикатами $Q(x, y)$ и $R(x, y)$, удовлетворяющими следующим условиям:*

$$(\forall x \in X)\, R(x, x), \tag{2}$$

$$Q(x, y) \wedge Q(u, v) \Longrightarrow (\Pi(x, y, u, v) \Longleftrightarrow \neg\Pi(x, y, v, u))\,, \tag{3}$$

$$Q(x, y) \wedge \Pi(x, y, u, v) \Longrightarrow (\Pi(x, y, v, u) \wedge R(u, v) \quad \vee \quad \neg\Pi(x, y, v, u) \wedge Q(u, v))\,. \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A = (G, \mathrm{End\ G}, *)$ — универсальный графовый полуавтомат над квазибесконтурным рефлексивным графом $G = (X, \rho)$. Полугруппой входных сигналов такого автомата является полугруппа эндоморфизмов End G. Покажем, что канонические предикаты $Q(x, y)$, $R(x, y)$ полугруппы $S = \mathrm{End\ G}$ удовлетворяют условиям (2)–(4) и полугруппа S является Z-замкнутой.

Рассмотрим произвольную вершину $u \in X$. В силу рефлексивности графа G постоянное преобразование $c_u : X \to \{u\}$ является эндоморфизмом этого графа и, значит, $c_u \in S$. Следовательно, условие (2) выполняется.

Если граф G не имеет собственных дуг, тогда бинарное отношение ρ симметрично, и по утверждению 1) леммы 2 имеем, что предикат $Q(x, y)$ тождественно ложен. Если $\rho = \Delta_X$, тогда каждое преобразование множества X является эндоморфизмом графа G, и полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы. Если $\rho \neq \Delta_X$, тогда по утверждению 3) леммы 2 имеем, что $\rho \cap \rho^{-1} = \rho$. Очевидно, что S удовлетворяет условиям (3), (4). Докажем, что полугруппа S Z-замкнута. Пусть f — преобразование множества X такое, что для любого истинного предиката $R(x, y)$ найдется элемент $s \in S$, что $f(x) = x * s$, $f(y) = y * s$. Тогда $(x, y) \in \rho$ и эндоморфизм s графа удовлетворяет условию $(x * s, y * s) \in \rho$. Отсюда следует, что $(f(x), f(y)) \in \rho$ и f — эндоморфизм графа G, т. е. $f \in S$.

Предположим, что существует собственная дуга $(x, y) \in \rho \setminus \rho^{-1}$. Так как граф G квазибесконтурный, то дуга (x, y) не лежит ни в каком контуре. Значит, по лемме 2 предикат $Q(x, y)$ истинен.

Пусть предикаты $Q(x, y)$, $Q(u, v)$ истинны. По утверждению 1) леммы 2 это означает, что вершины x, y соединяются дугой, не лежащей ни в одном контуре, и вершины u, v тоже соединяются дугой, не лежащей ни в одном контуре. Очевидно, что дуги, соединяющие вершины x, y и u, v, являются собственными дугами графа. Поскольку $S = \mathrm{End\ G}$, то по утверждению 2) леммы 2 либо предикат $\Pi(x, y, u, v)$ истинен и предикат $\Pi(x, y, v, u)$ ложен, либо предикат $\Pi(x, y, v, u)$ истинен и предикат $\Pi(x, y, u, v)$ ложен. Значит, условие (3) выполняется.

Если предикаты $Q(x, y)$, $\Pi(x, y, u, v)$ истинны, тогда по пункту 1) леммы 2 вершины x, y соединяются дугой, не лежащей ни в каком контуре графа G. Пусть для определенности $(x, y) \in \rho$ — дуга, не лежащая ни в каком контуре графа G. Тогда по утверждению 2) леммы 2 $(u, v) \in \rho$.

Если, кроме того, предикат $\Pi(x, y, v, u)$ истинен, то $(v, u) \in \rho$ и по утверждению 3) леммы 2 предикат $R(u, v)$ истинен. Если же предикат $\Pi(x, y, v, u)$ ложен, то в силу утверждения 2) леммы 2 $(v, u) \notin \rho$. Так как собственная дуга $(u, v) \in \rho$ по условию теоремы не лежит ни в каком контуре, то по утверждению 1) леммы 2 предикат $Q(u, v)$ истинен. Значит, условие (4) выполняется.

Докажем, что полугруппа S является Z-замкнутой. Пусть f — преобразование множества X такое, что для любого истинного предиката $Z(x,y)$ существует входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$. Рассмотрим дугу $(x,y) \in \rho$. Имеем, что либо $(x,y) \in \rho \cap \rho^{-1}$, либо (x,y) — собственная дуга графа G. Тогда по лемме 2 $(x,y) \in R$ или $(x,y) \in Q$. Следовательно, найдется входной сигнал $s \in S$ такой, что $f(x) = x * s$ и $f(y) = y * s$ и $(f(x), f(y)) = (x * s, y * s) \in \rho$. Значит, f — эндоморфизм графа G и полугруппа $S = \mathrm{End\ G}$ Z-замкнута.

Достаточность. Пусть $G = (X, \rho)$, $|X| > 1$ — граф, $A = (G, S, *)$ — графовый полуавтомат без равнодействующих входных сигналов, удовлетворяющий условиям теоремы. Предположим, что канонический предикат $Q(x,y)$ тождественно ложен. Обозначим $M = \{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y)$ истинен$\}$. Тогда канонический предикат $R(x,y)$ Z-замкнутой полугруппы S удовлетворяет условию $M \neq \Delta_X$. Действительно, если $M = \Delta_X$, то ввиду условия (2) любое преобразование множества X принадлежит Z-замкнутой полугруппе S и $M = X \times X$, что невозможно при $|X| > 1$. Тогда $G = (X, M)$ — рефлексивный симметричный граф такой, что для любого $f \in S$ из истинности предиката $R(x,y)$ следует истинность предиката $R(f(x), f(y))$. Это означает, что $S \subset \mathrm{End\ G}$. С другой стороны, если $f \in \mathrm{End\ G}$ и предикат $R(x,y)$ истинен, тогда по определению канонического предиката $R(x,y)$ найдется входной сигнал $s \in S$ такой, что $x*s = f(x)$, $y*s = f(y)$. Поскольку полугруппа S Z-замкнута, то условие $f \in S$ выполняется. Значит, $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$, и получаем, что $S = \mathrm{End\ G}$.

Пусть канонический предикат $Q(x,y)$ полуавтомата A не тождественно ложен, тогда найдется $(x_0, y_0) \in X \times X$, что предикат $Q(x_0, y_0)$ истинен. Определим на множестве X отношение ρ следующим образом:

$$\rho = \{(x_0 * s, y_0 * s) \mid s \in S\}.$$

Очевидно, что по условию (2) теоремы отношение ρ рефлексивно.

Докажем, что для графа $G = (X, \rho)$ выполняется равенство $S = \mathrm{End\ G}$. Для проверки включения $S \subset \mathrm{End\ G}$ покажем, что любое преобразование $t \in S$ является эндоморфизмом графа G. Пусть $(x,y) \in \rho$ для некоторых $x, y \in X$. По определению ρ это означает, что для некоторого $s \in S$ выполняется $x_0 * s = x$, $y_0 * s = y$. Тогда для преобразования $s \cdot t \in S$ получаем, что $x * t = (x_0 * s) * t = x_0 * (s \cdot t)$, $y * t = (y_0 * s) * t = y_0 * (s \cdot t)$ и $(x * t, y * t) \in \rho$ по определению отношения ρ, т. е. $t \in \mathrm{End\ G}$.

Для проверки включения $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$ покажем, что любой эндоморфизм f графа G принадлежит полугруппе S. По определению эндоморфизма графа выполняется условие

$$(\forall x, y \in X)\,((x,y) \in \rho \Longrightarrow (f(x), f(y)) \in \rho)\,.$$

Поскольку полугруппа S является Z-замкнутой, то для доказательства $f \in S$ достаточно проверить, что для любых $x, y \in X$, для которых предикат $Z(x,y)$ истинен, найдется входной сигнал $s \in S$, что ограничение $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$.

Рассмотрим произвольную пару $(x,y) \in X \times X$, для которой предикат $Z(x,y)$ истинен. Если $x = y$, тогда $f(x) = f(y)$ и по условию (2) теоремы существует входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$. Пусть $x \neq y$. По определению графа G из истинности предиката $R(x,y)$ следует, что $(x,y) \in \rho \cap \rho^{-1}$, и по определению эндоморфизма f получаем, что $(f(x), f(y)) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Отсюда следует, что предикаты $\Pi(x_0, y_0, f(x), f(y))$, $\Pi(x_0, y_0, f(y), f(x))$ истинны и по условию (4) теоремы предикат $R(f(x), f(y))$ истинен. Следовательно, найдется входной сигнал $s \in S$, что $x * s = f(x)$ и $y * s = f(y)$.

Пусть предикат $Q(x, y)$ истинен. По условию (3) теоремы либо предикат $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ истинен и предикат $\Pi(x_0, y_0, y, x)$ ложен, либо предикат $\Pi(x_0, y_0, y, x)$ истинен и предикат $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ ложен. Пусть для определенности выполняются условия, что предикат $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ истинен и предикат $\Pi(x_0, y_0, y, x)$ ложен. Из истинности $\Pi(x_0, y_0, x, y)$ следует, что найдется $s \in S$, что $x_0 * s = x$ и $y_0 * s = y$. Тогда по определению отношения ρ имеем, что $(x, y) \in \rho \setminus \rho^{-1}$ и эндоморфизм f графа G удовлетворяет условию $(f(x), f(y)) \in \rho$. По определению отношения ρ это означает, что $f(x) = x_0 * t$, $f(y) = y_0 * t$ для некоторого $t \in S$. Так как предикат $Q(x_0, y_0)$ истинен и $f(x) = x_0 * t$, $f(y) = y_0 * t$, то по условию (4) либо предикаты $\Pi(x_0, y_0, f(y), f(x))$, $R(f(x), f(y))$ истинны, либо предикат $\Pi(x_0, y_0, f(y), f(x))$ ложен и предикат $Q(f(x), f(y))$ истинен. В первом случае по определению канонического предиката $R(x, y)$ найдется $r \in S$ такой, что выполняется условие $x * r = f(x)$ и $y * r = f(y)$.

Во втором случае в силу истинности предикатов $Q(f(x), f(y))$ и $Q(x, y)$ по условию (3) теоремы имеем, что либо $\Pi(x, y, f(x), f(y))$ истинен и $\Pi(x, y, f(y), f(x)$ ложен, либо $\Pi(x, y, f(y), f(x)$ истинен и $\Pi(x, y, f(x), f(y)$ ложен. Если предикат $\Pi(x, y, f(y), f(x)$ истинен, то $x * p = f(y)$ и $y * p = f(x)$ для некоторого $p \in S$, и ввиду того, что $x_0 * s = x$ и $y_0 * s = y$ для $s \in S$, получаем, что $x_0 * (s \cdot p) = f(y)$ и $y_0 * (s \cdot p) = f(x)$, а это противоречит тому, что предикат $\Pi(x_0, y_0, f(y), f(x))$ ложен. Таким образом, истинен предикат $\Pi(x, y, f(x), f(y))$, и, следовательно, $x * r = f(x)$, $y * r = f(y)$ для некоторого $r \in S$.

Таким образом, в любом случае имеем, что $x * s = f(x)$, $y * s = f(y)$ для некоторого входного сигнала s из S. Так как полугруппа S Z-замкнута, то выполняется условие $f \in S$. Следовательно, $\mathrm{End\ G} \subset \mathrm{S}$ и $S = \mathrm{End\ G}$.

Поскольку полугруппа $S = \mathrm{End\ G}$, то по утверждению 1) леммы 2 предикат $Q(x, y)$ истинен тогда и только тогда, когда вершины x, y в графе G соединены дугой, не лежащей ни в одном контуре. Так как по построению графа G для всех его собственных дуг $(x, y) \in \rho$ предикат $Q(x, y)$ истинен, то $G = (X, \rho)$ — рефлексивный квазибесконтурный граф. $\square$

Доказанная теорема дает эффективный инструмент для изучения логико-алгебраических свойств графовых полуавтоматов, так как канонические предикаты $\Pi(x, y, u, v)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ графового полуавтомата могут быть эффективно трансформированы в предикаты полугрупповой сигнатуры. В частности, такой подход позволяет исследовать проблемы абстрактной характеризации графовых полуавтоматов и относительной элементарной определимости [16] классов таких полуавтоматов в классе полугрупп, а также дает возможность проанализировать взаимосвязь различных проблем разрешимости элементарных теорий классов графовых полуавтоматов и элементарных теорий классов полугрупп.

Список литературы

1. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва : Наука, 1966. 604 с.
2. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–748. EDN: HRTFFV
3. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных решеток // Известия высших учебных заведений. Математика. 2002. № 5. С. 44–47. EDN: HQUCWH

4. *Важенин Ю. М.* Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 3. С. 281–301.
5. *Важенин Ю. М.* Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Известия высших учебных заведений. Математика. 1972. № 7. С. 3–11.
6. *Глускин Л. М.* Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1959. Т. 23, вып. 6. С. 841–870.
7. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи математических наук. 1961. Т. 16, вып. 5 (101). С. 157–162.
8. *Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А.* Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра. Топология. Геометрия. Москва : ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 183–254.
9. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. Москва : Наука, 1964. 168 с.
10. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. Москва : Высшая школа, 1994. 191 с.
11. *Лидл Р., Пильц Г.* Прикладная абстрактная алгебра : пер. с англ. Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 1996. 744 с.
12. Мальцевские чтения : тезисы докладов Международной конференции. Новосибирск, 2020. URL: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf (дата обращения: 15.01.2022).
13. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» [Электронный ресурс] / отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.). Москва : МАКС Пресс, 2020. URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm (дата обращения: 15.01.2022).
14. *Боголомов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. Москва : Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
15. *Харари Ф.* Теория графов. Москва : Мир, 1973. 300 с.
16. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Москва : Наука. Физматлит, 1980. 416 с.

References

1. Plotkin B. I. *Gruppy avtomorfizmov algebraicheskikh sistem* [Groups of Automorphisms of Algebraic Systems]. Moscow, Nauka, 1966. 604 p. (in Russian).
2. Pinus A. G. Elementary equivalence of derived structures of free semigroups, unars, and groups. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, iss 6, pp. 408–417. https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48, EDN: GQLIGM
3. Pinus A. G. On the elementary equivalence of derived structures of free lattices. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2002, vol. 46, iss. 5, pp. 42–45.
4. Vazhenin Yu. M. Elementary properties of semigroups of transformations of ordered sets. *Algebra and Logic*, 1970, vol. 9, iss. 3, pp. 169–179. https://doi.org/10.1007/BF02218675
5. Vazhenin Yu. M. The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1972, iss. 7, pp. 3–11 (in Russian).
6. Gluskin L. M. Semigroups and endomorphism rings of linear spaces. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1959, vol. 23, iss. 6, pp. 841–870 (in Russian).
7. Gluskin L. M. Semi-groups of isotone transformations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1961, vol. 16, iss. 5 (101), pp. 157–162 (in Russian).
8. Markov V. T., Mikhalev A. V., Skornyakov L. A., Tuganbaev A. A. Endomorphism rings of modules, and lattices of submodules. *Journal of Soviet Mathematics*, 1985, vol. 31, iss. 3, pp. 3005–3051. https://doi.org/10.1007/BF02106808
9. Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience, 1960. 150 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1964. 168 p.).

10. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Elementy algebraicheskoj teorii avtomatov* [Elements of Algebraic Theory of Automata]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1994. 191 p. (in Russian).
11. Lidl R., Pilz G. *Applied Abstract Algebra*. New York, Springer-Verlag, 1998. 487 p. (Russ. ed.: Ekaterinburg, Ural University Publ., 1996. 744 p.).
12. *International Conference MAL'TSEV MEETING November 16–20, 2020. Collection of Abstracts*. Available at: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf (accessed 15 January 2021).
13. *Materials of the International Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2020"*. Available at: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm (accessed 15 January 2021) (in Russian).
14. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1997. 368 p. (in Russian).
15. Harary F. *Graph Theory*. Boston, Addison-Wesley Publishing Company, 1969. 274 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1973. 300 p.).
16. Ershov Yu. L. *Problemy razreshimosti i konstruktivnye modeli* [Problems of Decidability and Constructive Models]. Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1980. 416 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 16.01.2022
Принята к публикации / Accepted 17.02.2022
Опубликована / Published 30.11.2022